LA DEMOSTRACIÓN EN LA FORMACIÓN DOCENTE

Malva Alberto, Gabriela Roldán
Facultad Regional Santa Fe. Universidad Tecnológica Nacional Argentina
mtoso@frsf.utn.edu.ar, gabrielaroldan@arnet.com.ar
Campo de investigación: Educación continua Nivel: Medio

Resumen. *La formación continua, la formación permanente o formación a lo largo de la vida es un aspecto fundamental de la relación entre la Universidad y el medio social y productivo en el que está inserta. Las formas de gestión se diversifican y la sociedad demanda compromisos de participación, haciéndose particularmente enfática la relación entre los docentes universitarios y los educadores que de alguna manera contribuyen en la formación matemática del joven ingresante. En este trabajo exponemos las ideas consensuadas sobre la necesidad de formación; señalamos una de las debilidades detectadas respecto de la formación de los jóvenes ingresantes en cuanto al logro de habilidades para la demostración y el uso del razonamiento; justificamos nuestro compromiso como universitarios con la continuidad de formación de los docentes de pregrado y hacemos aportes para el aula, mediante la socialización de secuencias didácticas que a priori pueden conducir al logro de pensamientos reflexivos, inductivos, deductivos y argumentativos en las aulas de matemática.*
Palabras clave: universidad, formación, matemática, demostración

Justificación: Necesidad de formación a lo largo de la vida

Entendemos por formación a lo largo de la vida toda actividad de aprendizaje llevada a cabo en cualquier momento de la vida, con el propósito de mejorar tanto los accesos al conocimiento como las habilidades y competencias que se requieren para tener buenos desempeños, desde una perspectiva personal, cívica o ligada a las actividades profesionales o de empleo. Este tipo de formación puede realizarse desde diferentes ámbitos y los agentes sociales juegan un papel muy importante, pero las Universidades no pueden quedar al margen de esta importante función social.

La formación es una necesidad permanente a lo largo de la vida profesional, social y laboral; es un espacio de negociación y diálogo social; la formación es un compromiso y un valor estratégico prioritario ante una posible adecuación frente a los disímiles procesos de cambios, sean éstos económicos, tecnológicos, productivos o sociales; el futuro de la sociedad depende, en gran medida, de la preparación de la población activa, por lo que la formación a lo largo de la vida constituye una auténtica inversión.

Los cambios que han experimentado el mercado laboral y las profesiones, referido al concepto de formación permanente tienen implicaciones en el sistema educativo. Cabe a las Universidades la responsabilidad de atender la implementación de una política integrada y sistémica de formación reclamada desde los más diversos sectores, y en particular, generar conocimientos, retos e ideas que coadyuven con la formación del profesorado en servicio.

La educación continua para el profesorado es un proceso que trasciende la propia disciplina del docente para orientarse hacia una formación integral, que no se limita a un espacio o edad determinada; que debe ser accesible para todos y que debe estar comprometida con el adecuado desarrollo de cada individuo.

La mejora de la calidad educativa del cuerpo docente se vislumbra como el instrumento básico para elevar el nivel de aprendizaje de los alumnos en las escuelas e institutos de formación docentes. Hoy, la sociedad reclama buenos profesores; capaces de señalar con claridad qué es lo básico imprescindible y lo básico deseable en la educación de los que aprenden; profesionales permeables a distintas ofertas educativas; se espera que los docentes tengan capacidad para el liderazgo en la toma de decisiones, la comunicación y el autocontrol y que tengan cualidades tales como: impacto y presencia personales, capacidad de adaptación a las circunstancias y a las nuevas ideas; energía y perseverancia con la educación de los jóvenes; confianza en sí mismos; entusiasmo; capacidad intelectual; integridad y solidez; compromiso, buenas competencias profesionales y un sólido compromiso social.

La formación continua, la formación permanente o formación a lo largo de la vida es un aspecto fundamental de la relación entre la Universidad y el medio; la sociedad demanda, particularmente de la Universidad, compromisos de participación de sus docentes y autoridades educativas, haciéndose particularmente enfática la relación con los educadores que de alguna manera contribuyeron en la formación de sus alumnos ingresantes. Coincidimos con Huberman (1992, p. 17) cuando expresa que "la educación permanente sostiene como principal objetivo el de mejorar la calidad de vida humana atendiendo a una visión del ser humano concebido como un todo". Por otro lado la Universidad muestra su propio interés en enfatizar la relación con los educadores generando programas de extensión destinado a satisfacer las demandas de formación y actualización del profesorado en servicio porque puede garantizar que este tipo de formación sea académicamente válida, profesionalmente útil y personalmente enriquecedora.

Antecedentes: La indagación con el profesorado en ejercicio

A través de la participación en numerosos proyectos de extensión hemos asumido la importancia que deviene cuando se genera un ambiente adecuado para la interacción Universidad y Escuela Media propiciando y fortaleciendo el compromiso social de compartir y retroalimentar el capital educativo producido desde la cátedra y la investigación universitarias. Creemos que es insoslayable interactuar con los docentes que han participado, de algún modo, en la formación matemática de nuestros alumnos universitarios.

Por otro lado, la integración de proyectos de investigación en el ámbito de la matemática educativa nos dio el soporte adecuado para la presentación, diseño, implementación y socialización de secuencias didácticas que a priori pueden generar nuevas oportunidades para enriquecer el currículum de grado de los docentes en ejercicio.

En interacción con el profesorado hemos registrado debilidades relacionadas con el escaso uso de habilidades cognitivas relacionadas con la justificación de argumentos; la validación; la justificación de procedimientos; la argumentación y la precisión de los razonamientos matemáticos durante la formación de grado. La propia experiencia parece reflejarse en el ejercicio profesional y uno de los objetivos de este trabajo es ayudar a romper el paradigma que predominó durante la propia formación; aquel que se sustancia en la reproducción de lo vivido en términos de la formación. Por ello, nos propusimos compartir los resultados que seguramente iremos obteniendo y propiciar la instalación de la presente problemática en el ámbito de la extensión.

Durante el desarrollo de instancias de actualización para atender a la formación continua de los docentes en ejercicio realizadas en el año 2008, hemos consultado a 95 docentes de la escuela media sobre la enseñanza y el aprendizaje de las demostraciones. Las preguntas realizadas han sido básicamente las siguientes: ¿qué recuerdos tienen sobre el aprendizaje de demostraciones?; ¿cómo aprendió a hacerlo?; ¿cómo juzgar cuándo una demostración es correcta?; ¿cuándo aprendió a demostrar?; ¿colabora el currículum de grado en la adquisición de habilidades para la demostración?; ¿ha demostrado alguna vez la irracionalidad de $\sqrt{2}$? O el teorema de Pitágoras? comente algún momento en que enseñó una demostración matemática; haga cualquier otro comentario que crea que puede ser útil acerca de enseñar a demostrar. Entre las respuestas encontramos que el 82% de ellos no hace demostraciones la irracionalidad de $\sqrt{2}$; un 70% respondió que hacía más de 10 años que no intentaba tal demostración; un 54% de los docentes encuestados manifestó que no hace demostración alguna sobre el teorema de Pitágoras; el 63% no deduce la expresión que permite calcular la suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética, entre otros ejemplos. En algunos pocos casos se muestran desarrollos algebraicos y construcciones geométricas, por ejemplo, el caso del cuadrado del binomio, construcciones con regla y compás, etc. Pero en términos cuantitativos son muy escasas las experiencias en el aula. Muchos de ellos dijeron que durante las clases de matemática, los alumnos resuelven ejercicios que generalmente están formulados en guías de ejercicios y que las únicas interacciones que se propician se limitan a corregir los resultados. La falta de discusión, de debate, empobrece la actividad del aula. La explicitación hace posible tomar conciencia del conocimiento, permite nombrarlo, hacerlo público y hablar de él. En general existen pocas situaciones que comprometen al estudiante en la producción de respuestas argumentativas. Consultados los docentes acerca de la disponibilidad de material curricular que justifique la enseñanza de la demostración, el 80% respondió que muy poco es lo que se encuentra, poco se sabe sobre cómo y cuándo hacerlo y lo más grave aún, es que en los libros de textos para los estudiantes de la educación secundaria, las justificaciones y deducciones son escasas o no existen. Los docentes también señalan que la actitud negativa que tienen los estudiantes hacia el aprendizaje de las demostraciones no es una situación menor: el problema es mayor aun cuando el alumno debe demostrar resultados que ya sabe y ha usado con anterioridad, por ejemplo, en demostraciones del tipo: demuestra que para todo entero a, se verifica que 0a = a0 = 0 o bien cuando se pide que se demuestre que 2 es un número primo (Roldán, Rogiano, Alberto, Banchik, 2008).

Necesidad de incluir la demostración en la currícula de formación

Ya en la década del 60, autores como Burton, Kimball, Wing, (1969, p.9) señalan que "enseñar a pensar a los estudiantes" es uno de los propósitos que más se menciona en educación. Ellos toman como una definición aceptable para el pensamiento aquella que dice: "el pensamiento tiene lugar cuando existe un esfuerzo persistente para examinar las pruebas en las que se apoya cualquier creencia, solución o conclusión cuya aceptación haya sido sugerida, y para analizar la implicaciones y posteriores conclusiones de dichas pruebas” (Burton, et al, 1969, p.10). Desde hace más de cuarenta años, enseñar a pensar implica reconocer la existencia de un problema, o de una situación no demasiado clara o situación incierta, proponer hipótesis y elaborar respuestas que sirven de guía para el acopio y análisis de datos y hechos, y emitir juicios basados en relaciones lógicas desarrollando conclusiones que finalmente se pondrán a prueba en la acción. Los contenidos disciplinares de la lógica matemática brindan elementos para adquirir un pensamiento crítico y eficaz, más preciso y científico y da herramientas para argumentar situaciones diversas, evitando las ambigüedades. Los razonamientos matemáticos enfatizan algunos elementos del análisis de tipo lógico que son necesarios para comprender el lenguaje de la matemática y la estructura propia de sus demostraciones.

En la década de los 90, las reformas educativas de la mayoría de los países latinoamericanos (CBC RA Educación Polimodal, 1995; Barriga, Espinosa, 2001) indican la necesidad de rescatar el uso y explicación del valor del contraejemplo para rebatir generalizaciones e hipótesis, la utilización e interpretación correctas de los términos relacionales tales como: "si ... entonces", "y", "o", "suficiente", "necesario", "algunos", "todos", "no correlacionado con", "a causa de", "si y sólo si...". La enumeración continúa con la elaboración de proposiciones condicionales distinguiendo hipótesis de conclusiones, discriminación entre razonamientos inductivos y deductivos, realización de demostraciones matemáticas sencillas, etc. (Saiz, 1994; Santaló, 1997)

En los últimos años, el significado de las demostraciones para la educación matemática ha tomado un interés creciente por sus importantes perspectivas en el desarrollo de habilidades cognitivas tales como la verificación, la exploración, la sistematización y la deducción, el descubrimiento y la comunicación, capacidades que posibilitan la construcción del conocimiento. Bravo y Arrieta (2003) afirman que las demostraciones también contribuyen al desarrollo de operaciones mentales generales tales como abstraer, concretar, analizar, sintetizar, comparar, clasificar, particularizar y generalizar y que el trabajo con teoremas matemáticos y sus demostraciones tiene una poderosa influencia sobre el desarrollo de capacidades para argumentar, fundamentar, inferir, refutar y deducir. Otras investigaciones recientes dan cuenta sobre dificultades encontradas en los estudiantes al realizar una demostración. Antonini y Mariotti (2008) proponen un modelo para analizar demostraciones y argumentaciones indirectas. Este modelo revela su eficiencia para identificar, analizar e interpretar las dificultades de los estudiantes en este tipo de método de demostración. Durand-Guerrier (2008) proporciona argumentos epistemológicos y didácticos que justifican la necesidad de distinguir, para la educación matemática, el sentido común y la lógica matemática, teniendo en cuenta para ello la distinción y relación hecha en lógica entre verdad y validación por un lado, y sintaxis y semántica por otro.

El uso de la demostración estrictamente deductiva en el marco escolar ha sido ampliamente tratado por Godino y Recio (2001). La demostración aparece como un objeto de estudio complejo, estrechamente relacionado con otros elementos de validación como pueden ser los de explicación, comprobación, argumentación y prueba, teniendo un significado más flexible e incluyendo otros modos de validación como las que se derivan del uso de recursos tecnológicos; la formulación de conjeturas, los ejemplos y contraejemplos, los procesos de generalización, las pruebas de existencia. La clase debe familiarizarse con vocablos tan emparentados como demostrar, validar, justificar, explicar, argumentar, mostrar; es posible el acercamiento desde el uso de implicaciones, disyunciones y conjunciones; el trabajo con teoremas matemáticos y sus demostraciones tienen importantes funciones para anclar el desarrollo de capacidades generales para fundamentar, inferir, refutar y deducir; las demostraciones también contribuyen al desarrollo de operaciones mentales generales tales como comunicar, concretar, analizar, sintetizar, comparar, clasificar, particularizar y generalizar, destacándose la importancia del proceso seguido para la construcción por encima del resultado, ya que más allá del conocimiento teórico alcanzado, la habilidad para demostrar seguirá siendo usada en otras demostraciones.

Por último, nuestra indagación al momento del ingreso a la universidad, sobre los conocimientos previos en demostraciones matemáticas indican una base inexistente y un seguimiento posterior durante el primer cuatrimestre en la universidad, marcan una dependencia lineal del alumno hacia el docente (Roldán, et al, 2008); el alumno es repetidor o reproductor y poco se observa la relación dialéctica entre la teoría y la práctica; es entonces muy comúnmente observable un alumno que no está entrenado para investigar, analizar y descubrir, construir o reconstruir. Prueba de ello lo tenemos cuando, después de haber demostrado que 3 es un número primo, solicitamos a nuestros alumnos que demuestren que dados a, b enteros positivos tales que 3 = a b entonces a = 3 o b = 3. Resultado análogo obtuvimos cuando solicitamos que demuestren que dados a, b enteros positivos tales que 2 = a b entonces a = 1 o b = 1 (Roldán, et al, 2008).

Estamos requiriendo en los alumnos universitarios la necesidad de justificar procedimientos, de mostrar deducciones, argumentar hechos y precisar razonamientos matemáticos; pero somos conscientes que estas habilidades deben enseñarse desde épocas más tempranas incentivando la tenacidad, perseverancia, esfuerzo, disciplina y constancia a lo largo del proceso de resolución de un problema de demostración, para poder lograr independencia en el momentos en que las demostraciones se conviertan en formas usuales de trabajo y desarrollo del pensamiento.

¿Cómo motivar en el aprendizaje de las demostraciones en matemática?

Desde la educación primaria y secundaria se pueden fomentar, con distintos niveles de concretización, generalización o abstracción, actividades favorecedoras de buenas situaciones de aprendizaje para el anclaje de habilidades para demostrar, probar, argumentar, verificar, etc. Algunas herramientas útiles pueden ser los acertijos, las paradojas, los problemas abiertos, la búsqueda de patrones, la inducción y deducción de propiedades; los sistemas formales sencillos; etc. Entre otros ejemplos disponibles, socializamos los siguientes:

Ejemplo 1: Se dan pares de afirmaciones. Justifica si tales afirmaciones son equivalentes:

1.1) Afirmación A: “Los autos se detienen si el semáforo tiene la señal en rojo”

Afirmación B: “Los autos se detienen sólo si el semáforo tiene la señal en rojo”

1.2) En el lenguaje comercial se utilizan frases como por ejemplo:

“Si el consumidor paga con tarjeta de crédito entonces el precio aumenta en un 2%”.

“El consumidor paga con tarjeta de crédito sólo sí el precio aumenta en un 2%”.

¿Tienen los mismos valores de verdad?

Ejemplo 2: el uso de la verdad de la disyunción se pone en práctica en la siguiente demostración sobre la existencia de números irracionales a y b tales que a^b es racional. En efecto, sea b = $\sqrt{2}$, que es irracional; el número $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ puede ser racional o irracional.

Si $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ es racional ya está probado tomando a = $\sqrt{2}$ y b = $\sqrt{2}$.

Si $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ es irracional entonces a = $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ y b = $\sqrt{2}$ y se verifica que

a^b = $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ = $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$ = $\left(\sqrt{2}\right)^{\left(\sqrt{2}\right)^2}$ = $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ que es racional.

Ejemplo 3: ¿Contradices o demuestras la proposición? La expresión p(n) = $n^2 - n + 41$ es número primo para todo n entero no negativo.

Ejemplo 4: Critica la siguiente demostración en Z.

TEOREMA: $\forall$ a $\in$ Z, a = 0.

Demostración: Se verifica que $a^2 = a^2$. Luego $a^2 - a^2 = a^2 - a^2$.

Es decir: (a – a) (a + a) = a (a – a) y cancelando a + a = a. Sumando a ambos lados de la igualdad, el opuesto de a, (–a), obtenemos a = 0.

Reflexiones

Durante muchos años, durante la década de los 60, la enseñanza de la matemática se centró en sus aspectos deductivos. Décadas más tarde se desechó el método axiomático y las demostraciones y pruebas formales desaparecieron de los libros de texto, dando lugar exclusivamente al método heurístico, la experimentación, el descubrimiento, la analogía y la comparación, con el propósito de guiar al estudiante para que pueda descubrir por sí mismo los procedimientos y los principios que debe aprender. Éstos, y otros métodos pueden convivir en verdadera armonía y todos constituyen importantes entradas al conocimiento. Polya (1954, p. vi), citado en Burton, et al (1969, p. 525) nos dice "el resultado de la labor creadora de los matemáticos consiste en razonamientos deductivos, en demostraciones; pero las demostraciones se descubren por medio del razonamiento plausible, de las conjeturas. Si se quiere que el aprendizaje de la matemática refleje en alguna medida el carácter inventivo que ésta posee debe haber lugar en él para las conjeturas y las inferencias plausibles".

El aprendizaje debe venir guiado por la búsqueda de respuestas a problemas, primero a nivel intuitivo y empírico; más tarde generalizado y finalmente justificando, demostrando. Un buen diagnóstico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemática debe incluir no sólo los déficit tal cual los señalamos, sino también las fortalezas en las cuales el profesorado puede ayudarse para enfrentar los problemas planteados: en los últimos años se ha observado un cultura pro científica que ha permitido la divulgación y difusión masiva de los avances de las distintas investigaciones sobre el tema (Pedemonte, 2008); existen experiencias innovadoras pero que hasta el momento representan experiencias piloto y esto conlleva un nuevo problema, ya que al implementarlas a nivel micro pueden perder su potencialidad a nivel macro (Nápoles, Macías, Caputo, Espinoza, (2008). Sin embargo, recuperar los distintos métodos de la demostración desde la formación inicial del profesorado contribuirá a una mejor educación matemática para nuestros jóvenes.

Referencias bibliográficas

Antonini, S. y Mariotti, M. A. (2008). Indirect proof: what is specific to this way of proving?, *ZDM Mathematics Education*, 40, 401-412.

Bravo, M. L. y Arrieta, J. J. (2003). *Algunas reflexiones sobre las funciones de las demostraciones matemáticas*. Recuperado el 10 de mayo de 2009 de http://www.rieoei.org/deloslectores/838Bravo.PDF

Burton, W., Kimball, R.y Wing, R. (1969). *Hacia un pensamiento eficaz.* Buenos Aires: Ediciones Troquel.

Diaz, A. e Inclán C. (2001). *El docente en las reformas educativas: Sujeto o ejecutor de proyectos ajenos*. Recuperado el 2 de mayo de 2009 de http://www.rieoei.org/rie25a01.htm

Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido a lo largo del curriculum. En Gorgorió, N., Deulofeu, A. y Bishop, A. (Eds.). *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. (pp. 125-133). Barcelona: Graó.

Durand-Guerrier, V. (2008): Truth versus validity in mathematical proof. En *ZDM Mathematics Education* 40, 373-384.

Godino, J. y Recio, A. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. En *Enseñanza de las Ciencias*, 19 (3), 405-414.

Huberman, S. (1992). *Cómo aprenden los que enseñan*. Buenos Aires: Editorial Aique.

Nápoles Valdés, J., Macías, D., Caputo, S.y Espinoza, R. (2008). *La enseñanza de la demostración matemática.* Recuperado el 25 de junio de 2009 en http://www1.unne.edu.ar/cyt/2002/09-Educacion/D-020.pdf

Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. En *ZDM Mathematics Education* 40, 385-400.

Roldán, G., Rogiano, C., Alberto, M. y Banchik, M. (2008). *Habilidades cognitivas en Matemática*. *Propuestas para atender a su fortalecimiento*. Santa Fe: Universidad Nacional del Litoral.

Saiz, I. (1994). *Propuesta de Contenidos Básicos Comunes para la EGB*, Ministerio de Cultura y Educación. Argentina.

Santaló, L. A. (1997): Matemática para no matemáticos. En Parra, C. y Saiz, I. (comps.). *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*.(pp.12-34). Buenos Aires: Editorial Paidós.

CBC Educación Polimodal (1995) Recuperado el 20 agosto de 2009 de http://www.me.gov.ar/consejo/documentos/cf_documentos.html