ARGUMENTOS DE UNA ECUACION DIFERENCIAL DE UN CIRCUITO ELECTRICO A TRAVES DE SU CAMPO DE PENDIENTES

Edgar Javier Morales Velasco, Hipólito Hernández Pérez
Cimate de la Facultad de Ingeniería. Universidad Autónoma de Chiapas — México
emv_dj@hotmail.com, polito_hernandez@hotmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología — Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo se realiza una revisión a los textos y programas de estudio de ecuaciones diferenciales usados en los cursos de ingeniería electrónica en donde se observa que privilegian resolver las ecuaciones diferenciales de un circuito eléctrico por medio de métodos cuantitativos y la gráfica de la solución analítica, dejando a un lado el uso de los campos de pendientes que permita al alumno identificar el comportamiento gráfico de dichas ecuaciones diferenciales. En este trabajo se exploró los campos de pendientes mediante el uso del software Cabri Geometry II como herramienta de geometría interactiva. En la investigación se diseñaron dos situaciones didácticas para generar por medio de los estudiantes argumentos sobre los campos de pendientes de una ecuación diferencial, con la finalidad de reconstruir los significados de los campos de pendientes de una ecuación diferencial en un marco de prácticas sociales de la graficación y modelación basados en la aproximación socioepistemológica.*
Palabras clave: situación didáctica, prácticas sociales, socioepistemología

Problemática

La génesis de este trabajo es en base a la revisión de los textos y programas de estudio de ecuaciones diferenciales usados en los cursos de ingeniería electrónica, donde encontramos que se privilegia resolver las ecuaciones diferenciales de un circuito eléctrico por medio de métodos cuantitativos, es decir por métodos algebraicos, dejando a un lado el uso de los campos de pendientes que le permita al alumno identificar el comportamiento gráfico de dichas ecuaciones diferenciales. En los cursos y textos de ecuaciones diferenciales ha predominado el enfoque de la solución analítica, pero también existen textos que le dan un enfoque gráfico y visual como los textos de (Lomen y Lovelock, 2000; Stewart, 2002). Respecto a este contexto que se da en la ingeniería electrónica, Cordero (2000) menciona que las soluciones de las ecuaciones diferenciales se han privilegiado en el contexto algebraico donde las soluciones de las distintas clases de ecuaciones diferenciales son expresadas por medio de fórmulas algebraicas exactas, explícitas o implícitas, expansiones en series, expresiones integrales, entre otras. El sólo uso del contexto algebraico deja en la mente del estudiante una restringida e insatisfecha imagen de las ecuaciones diferenciales. También, él indica que desde un punto de vista epistemológico se encuentra el desarrollo de la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos y por otro se encuentra el desarrollo de la tecnología (calculadoras, computadora y graficadores). El objetivo de nuestro trabajo fue diseñar situaciones didácticas en el contexto de los circuitos electrónicos a través del uso de tecnología, para generar por medio de los estudiantes argumentos sobre los campos de pendientes de una ecuación diferencial, con la finalidad de reconstruir los significados de los campos de pendientes de una ecuación diferencial en un marco de prácticas sociales de la graficación y modelación. En las revisiones hechas en los libros de texto de análisis de circuitos eléctricos usados en electrónica, por ejemplo, tenemos a Bobrow (1993), Conejo (2004), Hayt y Kemmerly (1990). Ellos presentan el análisis de circuitos eléctricos con ecuaciones diferenciales de primer orden y de segundo orden con constantes agrupadas. Los autores mencionan que los resultados de estas ecuaciones diferenciales también pueden ser utilizados por otros contextos, por ejemplo, en el desplazamiento de una masa soportada por un resorte y sometida a un amortiguamiento viscoso, y también en el comportamiento de un péndulo simple. Los autores muestran el siguiente ejercicio:

Suponga que tenemos el circuito resistor-inductor (RL) en serie que se muestra en la figura1. La red se excita por una tensión escalón unidad, donde R = 4 Ω, L = 2 H, V(s) = 3U(t) y suponemos un valor inicial de la corriente (en t = 0) de 5 amperios.

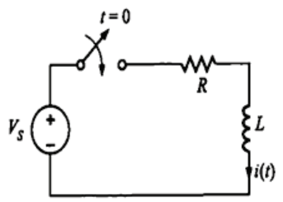


Figura 1. Circuito resistor-inductor (RL).

La solución que proponen es la siguiente: por la segunda ley de Kirchhoff se escribe la ecuación de malla en el dominio del tiempo, $2\frac{di}{dt}+4i=3u(t)$; se convierte al dominio de la frecuencia tomando la transformada de Laplace de cada término, $2[sI(s)-i(0)]+4I(s)=3/s$, y luego de una serie de procedimientos algebraicos presenta la respuesta de la ecuación diferencial $I(t)=0.75u(t)+4.25e^{-2t}u(t)$.

Observando el privilegio de la solución analítica de las ecuaciones diferenciales, creemos que el uso de los campos de pendientes en el análisis de las ecuaciones diferenciales de los circuitos eléctricos podría permitir al alumno un mejor entendimiento respecto a la solución de las ecuaciones diferenciales. Encontramos en Larios (2006) que los conocimientos que se aprenden están influenciados por los medios y las herramientas utilizadas para el aprendizaje y la enseñanza. En el caso particular de la Matemática esto no deja de ser cierto y la incorporación de herramientas computacionales a los procesos educativos influye indiscutiblemente en los significados que se le otorgan a los objetos matemáticos, fenómeno que siempre ha sucedido con otros tipos de tecnologías utilizadas. En este trabajo particular el software que se considera es el que se inscriben dentro de la categoría de *software para Geometría Dinámica*. Las características principales que diferencian una aproximación utilizando este software con respecto a una que considera la tecnología papel-y-lápiz, además del hecho evidente y simplista de estar utilizando computadoras son: (1)_ Los macros que posibilitan definir rutinas o cadenas, (2)_ La de construir lugares geométricos, (3)_ La transformación continua en tiempo real llamada comúnmente "arrastre", la cual permite la modificación directa de la forma o posición de los objetos geométricos construidos por el usuario mediante el uso del ratón sin que se dejen de preservar las relaciones geométricas con las que fueron construidos. Para nuestro trabajo, empleamos el software Cabri Geometry II como herramienta de geometría interactiva, el cual brinda la oportunidad de que la adaptemos al tema de campos de pendientes de las ecuaciones diferenciales. La ventaja de Cabri es que existe un procedimiento de construcción que ayuda a la comprensión del tema y a recordar algunos conceptos de cálculo (Buendía, Cruz, Poirier, Hernández, Velasco, y Megchún, 2006).

Marco Teórico

En la presente investigación nos apoyamos en teorías como la de Cantoral (1996), donde menciona que la matemática educativa no es la enseñanza de las matemáticas ni la matemática escolar una simplificación de la matemática, pero sí existen fuertes vínculos entre sí. No constituyen los mismos cuerpos de conocimiento, puesto que la matemática educativa es una disciplina con ubicación en las prácticas sociales y conceptuales de enseñar y aprender matemática y de la matemática escolar. En Cordero y Flores (2007) mencionan que la aproximación socioepistemológica nos ha señalado que las prácticas sociales con referencia al conocimiento matemático son un elemento insoslayable en las explicaciones de los fenómenos didácticos. Lo anterior integra componentes para tratar a las gráficas de los campos de pendientes de las ecuaciones diferenciales como prácticas en lugar de representaciones. El conocimiento matemático escolar en la aproximación socioepistemologíca se concibe como un conocimiento que se resignifica al paso de la vivencia institucional, lo que hace que la actividad humana o las prácticas sociales sean las generadoras de tal conocimiento. También, Buendía (2004) indica que la socioepistemología se refiere al análisis de las relaciones epistemológicas entre prácticas sociales y el conocimiento matemático. La socioepistemología es una línea de investigación que brinda elementos para caracterizar una epistemología, distinta a las epistemologías basadas en los conceptos, que se base en elementos organizadores llamados categorías. Existe actualmente un consenso en identificar estas categorías con prácticas sociales sustentado en análisis de enfoque histórico epistemológico realizados para diferentes cortes de conocimiento matemático (Suárez, 2006). La socioepistemología debe significar el reflejo de cualquier individuo al hacer matemáticas, y en segundo lugar, considerar que el funcionamiento mental debe estar en correspondencia con el lenguaje de herramientas que resulta de esta actividad. En este trabajo pretendemos mostrar la resignificación de las gráficas de los campos de pendientes de las ecuaciones diferenciales en los circuitos eléctricos como práctica social y tratamos de hacer epistemología de prácticas sociales que cumpla con la intencionalidad que demanda el ingreso de un saber al sistema didáctico, ya que debe ser consistente con las formas de organización de los grupos humanos.

Diseño de la situación didáctica

La metodología seguida en esta investigación fue la que proporciona un mecanismo de validación interna, como la ingeniería didáctica. Su esquema experimental está basado en las realizaciones didácticas en clase, la concepción, observación y análisis de secuencias de enseñanza (Lezama y Farfán, 2001). Lo expuesto anteriormente ayudó a diseñar situaciones didácticas en el área de ingeniería en electrónica resignificando los campos de pendientes en las ecuaciones diferenciales, es decir, que los alumnos aprendan el comportamiento de las ecuaciones diferenciales por medio de sus campos de pendientes de forma cualitativa. La utilidad que presentan los campos dependientes, es que sin necesidad de resolver a la ecuación diferencial de forma algebraica, solo con el trazo de dichos campos de pendientes de la ecuación diferencial del circuito eléctrico se conoce el comportamiento del circuito eléctrico, además de que se aprenden otros conceptos acerca de las ecuaciones diferenciales. Para llevar a cabo nuestra investigación, primeramente se trabajó con dos diseños de situaciones didácticas, donde hacemos uso de herramientas tecnológicas como la de papel y lápiz y posteriormente con el software Cabri. En el diseño de las situaciones didácticas, nos dimos la tarea de hacerlas de manera que el alumno a través de la ecuación diferencial de un circuito eléctrico, bosqueje a través de su campo de pendientes información del comportamiento de dicha ecuación diferencial y a la vez del circuito eléctrico.

Situación didáctica uno:

La dinámica que se llevó para la situación didáctica 1 fue en un salón de la facultad de Ingeniería Civil de la Universidad Autónoma de Chiapas, la cual consistió en agrupar a los 31 participantes en equipos de tres alumnos, se les proporcionó la situación didáctica 1 para resolverlo en una hora treinta minutos. Para los estudiantes de Posgrado la situación didáctica 1 la resolvieron de forma individual con una duración de una hora treinta minutos. Se les solicitó que explicaran qué es una "pendiente"; lo que ellos respondieron fue:

Argumento a: es la inclinación α de dicha recta con respecto a un eje de referencia, se obtiene mediante la función tangente $m = tg\alpha$.

Argumento b: es la inclinación que existe si se trazara una línea entre dos puntos en el plano cartesiano.

Argumento c: La derivada de la función en un punto.

Luego mediante una gráfica se les pide que encuentren una relación geométrica de la inclinación de los segmentos con los signos de las pendientes y que la explicaran; en esta parte lo que se busca es que los alumnos relacionen la inclinación de las rectas con el signo de la pendiente, por lo que la mayoría de los equipos sí lograron hacer esta relación; cabe mencionar que los equipos para establecer su respuesta dialogaban acerca de los términos de la inclinación de la recta, de máximos y mínimos.

Argumento d: cuando el signo de la magnitud de la pendiente es positivo indica que la pendiente se inclina hacia la derecha eje (+ *x*), cuando el signo es negativo indica que la pendiente es constante y se inclina sobre la izquierda (- *x*).

Argumento e: cuando 0 < α < 90º el signo de la pendiente es positivo si sólo si el eje de referencia es el eje *x*, el signo de la pendiente es negativo si sólo si 180º < α < 90º, cuando el eje de referencia es el eje *x*.

Posteriormente los alumnos calcularon una serie de pendientes con la expresión $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$ que sirve para construir el campo de pendientes; todos los equipos lograron obtener las pendientes, excepto que al dibujarlas ninguno de los equipos dibujó completo el campo de pendientes; argumentaban que eran muchos y se volvía un tanto tedioso dibujarlas a mano, ver figura 2; es en esta parte donde el software Cabri Geometry II nos es de utilidad ya que facilita el trazado de las pendientes en menos tiempo y menos tedioso, como argumentaron los alumnos. Posteriormente se les pide que encuentren la antiderivada de la expresión que utilizaron para crear el campo de pendientes; en esta parte también los alumnos muestran la respuesta que se esperaba: $y = x^2 + c$. Al final de la situación se les preguntó a los estudiantes si el campo de pendientes trazado genera las familias de curvas de la solución de la antiderivada; ellos responden:

Argumento f: sí la genera porque al trazar el campo de pendientes se interceptan las pendientes positivas y negativas que generará familias de parábolas, es decir $y = x^2 + C$.

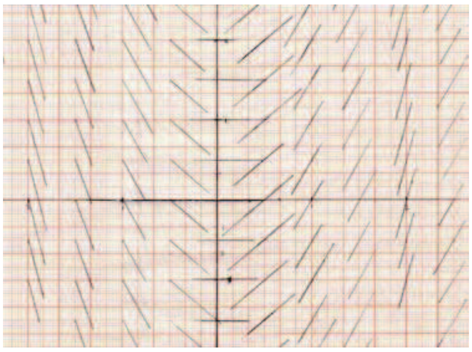


Fig. 2. Campo de pendientes de la secuencia 1 hecho por los equipos; la mayoría de los equipos coinciden como el que se muestra en la figura.

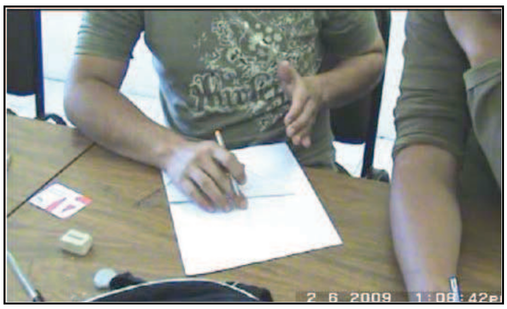


Fig. 3. Los alumnos argumentando la secuencia

Situación didáctica dos:

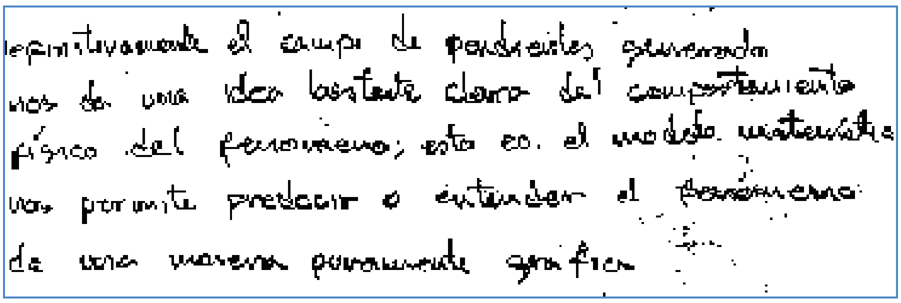
Para la segunda situación didáctica se seleccionó a tres grupos de los estudiantes de ingeniería civil, en la cual se les realizó una grabación de video digital y de voz para registrar las argumentaciones de los estudiantes en la situación didáctica. Esta misma situación didáctica fue aplicada a estudiantes de posgrado. A los estudiantes de Posgrado se les aplicó la misma situación didáctica resolviéndola en una hora y media. Posteriormente esta situación didáctica fue aplicada a un segundo grupo de 36 estudiantes de ingeniería civil donde se formaron equipos de tres integrantes. Primero se les proporcionó las actividades 1 y 2, posteriormente las actividades 3 y 4; la duración de la situación didáctica fue de 2 horas. La secuencia dos consistía principalmente en resolver un circuito resistor-inductor (RL) como el que se muestra en la figura 1, donde R = 2Ω, L = 1H, V_s = 8V y cuya ecuación diferencial esta definida por $\frac{dI}{dt} = 8 - 2I$ con la condición inicial de *t* = 0. De los tres equipos sólo dos equipos dibujaron bien el campo de pendientes; al concluir la situación didáctica los equipos dan una explicación haciendo un análisis del campo de pendientes:

Argumento del equipo A: No concluyeron bien, les faltó dibujar más el campo de pendientes.

Argumento del equipo B: Vemos que la ecuación diferencial tiene un comportamiento exponencial, llegando a cierto valor para *(I)*, la familia de curvas que podemos ver se vuelven constantes.

Argumento del equipo C: Para nosotros vemos también, que la familia de curvas tiene un comportamiento exponencial, conforme crece el tiempo *t* la familia de curvas tiende a un valor constante por lo que el valor de las pendientes comienza a disminuir, se hacen cero, es decir, la corriente *(I)* al llegar a este valor permanece constante sin variación aunque el tiempo aumente.

A continuación se muestra un argumento de los participantes de posgrado.


lcualitativamente el campo de pendientes generado
nos da una idea bastante clara del comportamiento
físico del fenómeno; esto es, el modelo matemático
nos permite predecir o entender el fenómeno
de una manera puramente gráfica

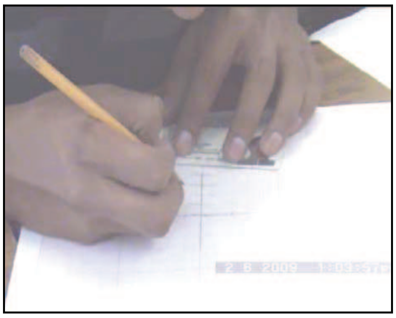


Fig. 4. Uso de la tecnología de papel y lápiz

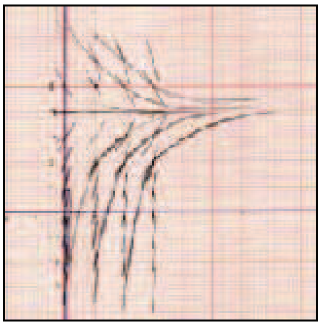


Fig. 5. Campo de pendientes de los alumnos de Ingeniería civil

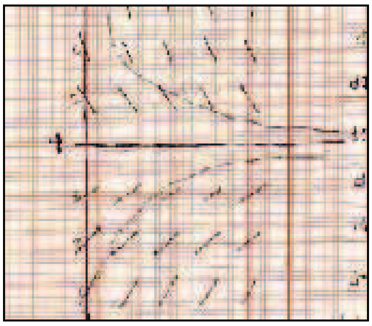


Fig. 6. Campo de pendientes de alumnos de Posgrado.

En nuestra fase de validación observamos que el propósito de la situación didáctica si cumplió con nuestro objetivo; los equipos argumentaban observando los campos de pendientes, pero cabe mencionar que en la segunda situación didáctica el equipo C de los alumnos de la carrera de ingeniería civil nos muestra un argumento más detallado del comportamiento del circuito eléctrico sólo con el análisis del campo de pendientes.

Conclusiones

Podemos concluir en este trabajo que abordar a las ecuaciones diferenciales de forma cualitativa con ayuda de tecnologías como el de papel y lápiz o software como el Cabri es interesante, más este último, porque facilita el trazo de las pendientes en menor tiempo que la de tecnología de papel y lápiz, al trazar el campo de pendientes de las ecuaciones diferenciales nos muestra conceptos de cálculo, además de que aprendemos mayor información de las ecuaciones diferenciales, por ejemplo, la rapidez de crecimiento o decrecimiento de las pendientes, su comportamiento en el tiempo, todo de forma visual. En cambio, resolver una ecuación de forma algebraica nos deja una restringida e insatisfecha imagen de las ecuaciones diferenciales como argumentan Cordero (2000) y Artigue (1999) en sus investigaciones. Por tanto, los argumentos vertidos por los estudiantes proporcionan elementos para resignificar el campo de pendientes de las ecuaciones diferenciales. Además, al establecer situaciones didácticas de este tipo, vemos que el alumno se enfrenta a una situación de análisis tipo cualitativo de las ecuaciones diferenciales. Este tipo de análisis cualitativo, debido a su forma visual, aporta un valor enriquecedor en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, ya que muestra de forma gráfica el comportamiento y características de las ecuaciones diferenciales sin ser resueltas.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1999). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. (pp. 97-140) México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bobrow, L. (1993). *Análisis de Circuitos Eléctricos*. México: McGraw Hill Interamericana.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Buendía, G., Cruz, C., Poirier, P., Hernández, H., Velasco, E., y Megchún, J. (2006). *La tecnología en el aula de Matemáticas: prácticas de laboratorio y medios virtuales.* Talleres gráficos de la Universidad Autónoma de Chiapas.

Cantoral, R. (1996). *Una visión de la matemática educativa. Investigación en matemática educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Conejo, A. (2004). *Circuitos Eléctricos para la ingeniería*. Madrid: McGraw Hill

Cordero, F. (2000). *Un acercamiento gráfico a las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes*. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 10(1), 7-38

Hayt, W. y Kemmerly, J. (1990). *Análisis de circuitos en ingeniería*. México: McGraw Hill.

Larios, V. (2006). La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9* (3), 361-381.

Lezama, J. y Farfán, R. (2001). Introducción al estudio de la reproducibilidad. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*. *4 (2),* 161-193

Lomen, D. y Lovelock, D. (2000). *Ecuaciones diferenciales a través de gráficas, modelos y datos*. México. CECSA.

Stewart, J. (2002). *Cálculo: Trascendentes tempranas*. México: Thomson

Suárez, L. (2006). *El uso de las gráficas en la modelación del cambio. Un estudio socioepistemológico.* Memoria predoctoral no publicada. Cinvestav-IPN. México.