APREHENSIÓN DE PROPIEDADES Y USO DE JUSTIFICACIONES GEOMÉTRICAS EN AMBIENTES DE GEOMETRÍA DINÁMICA

Noraísa González González, Víctor Larios Osorio
Universidad Autónoma de Querétaro México
norai11@yahoo.com, vil@uaq.mx
Campo de investigación: Pensamiento geométrico Nivel: Medio

Resumen. *Este trabajo presenta una propuesta para enseñar la Geometría del Triángulo en el nivel medio utilizando Software para Geometría Dinámica. En particular se pretende con la propuesta desarrollar la capacidad de los alumnos para observar propiedades geométricas y justificarlas de manera deductiva a fin de trabajar en la construcción de la demostración. Este diseño está basado en la Teoría de los Conceptos Figurales de Fischbein (1993), la noción de Unidad Cognitiva de los Teoremas (Boero, Garuti y Mariotti, 1996) y la necesidad de definir el sentido de la demostración en la escuela desde un punto de vista pragmático a partir de la noción de institución (Godino y Batanero, 1994).*
Palabras clave: geometría dinámica, enseñanza de la geometría, representaciones gráficas

Introducción

El Software para Geometría Dinámica (SGD) actúa como un mediador semiótico entre el conocimiento geométrico y el alumno, influyendo así en el aprendizaje de la Geometría y generando fenómenos cognitivos. En el nivel medio esta herramienta puede resultar útil para el aprendizaje de la Geometría y la observación de propiedades para llevar a cabo la construcción de justificaciones que tiendan a ser demostraciones dentro de Ambientes de Geometría Dinámica. Estos ambientes no sólo incluyen el uso del SGD, sino el diseño de actividades orientadas específicamente para lograr un objetivo didáctico.

Bajo esta consideración se presenta una propuesta de actividades para estudiar la Geometría del Triángulo en el nivel medio, con alumnos de secundaria o de 14-15 años. Esta propuesta está estructurada considerando como marco teórico la «Teoría de los Conceptos Figurales» (Fischbein, 1993) y la noción de «Unidad Cognitiva de Teoremas» (Boero, Garuti y Mariotti, 1996) para estudiar propiedades de los puntos y rectas notables del triángulo.

Los objetos geométricos y el software para geometría dinámica

Los objetos geométricos son entes teóricos que como humanos no podemos asirlos y manipularlos si no es a través de representaciones, que comúnmente son gráficas. Las representaciones gráficas de los objetos geométricos nos permiten otorgarle un significado, pero éste a veces está vinculado fuertemente con las representaciones y no con las propiedades con las que se rigen los objetos geométricos.

Para el alumno que es novato en el aprendizaje de la Geometría puede ser normal confundir estos dos objetos: el geométrico y su representación. Puede llegar a creer que ésta última es aquél y viceversa. Laborde y Capponi (1994) hacen la distinción entre los términos *dibujo*, *figura* y *objeto*. El *objeto* se refiere al objeto geométrico, el *dibujo* es la representación del objeto (o varios objetos) geométrico y la *figura* es "el emparejamiento de un referente dado a todos sus dibujos, es entonces definida como el conjunto de parejas formadas por dos términos, el primer término es el referente, el segundo es uno de los dibujos que lo representan; el segundo término es tomado del universo de todos los dibujos posibles del referente" (pág. 168). Esta distinción permite distinguir entre la información que pertenece únicamente a la representación y la información proporcionada por el objeto geométrico (propiedades). Una falla en tal distinción puede llevar a darle una importancia excesiva a información inútil y observar propiedades falsas o erróneas o inútiles, no pudiendo observar las propiedades invariantes que se buscan en el estudio de la Geometría.

Fischbein (1993), con su *Teoría de los Conceptos Figurales*, establece la noción de *concepto figural* que permite explicar el proceso del manejo de las representaciones y de las propiedades geométricas: "los objetos de investigación y manipulación en el razonamiento geométrico son entonces entidades mentales, llamadas por nosotros *conceptos figurales*, que reflejan propiedades espaciales (forma, posición y tamaño), y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales –como idealidad, abstracción, generalidad y perfección" (pág. 143). A las primeras se encuadran en el aspecto *figural* y las últimas en el *conceptual*.

El Software para Geometría Dinámica, con su capacidad de herramienta para manipular "directamente" (a través del ratón) las representaciones gráficas a través del *arrastre*, permite construir significados de los objetos geométricos a través de la posibilidad de la transformación continua de los dibujos que son diferentes a los significados construidos al utilizar la tecnología de papel y lápiz, convirtiéndose así en un mediador semiótico entre el conocimiento geométrico y el usuario.

Además, la característica dinámica del software hace necesaria que la diferencia entre *dibujo* y *figura* se destaque, pues en este ambiente las construcciones geométricas están construidas con base en las relaciones lógicas entre los objetos y no sólo sobre los aspectos figurales de las mismas. Esto permite que al momento de hacer una transformación de una construcción por medio del arrastre las propiedades geométricas (más que la información figural) se mantengan invariantes. Es por esto que el uso de este tipo de herramienta para el diseño de ambientes se puede convertir en un medio que propicie la exploración de la Geometría, abriéndole la posibilidad al alumno de generalizar situaciones y buscar casos particulares para construcciones realizadas.

Actividades para observar y justificar propiedades

Con la intención de que los alumnos observen propiedades geométricas y propongan justificaciones deductivas (demostraciones) dentro de un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) se diseñaron actividades orientadas al estudio de la Geometría del Triángulo en el nivel secundaria.

El diseño realizado tomó en cuenta dos cosas relacionadas con la demostración:

1. Una definición pragmática de la demostración basada en la noción de *institución* planteada por Godino y Batanero (1994).
2. La noción de *Unidad Cognitiva de Teoremas* propuesta por Boero, Garuti y Mariotti (1996).

La demostración, como medio para validar el conocimiento matemático, es una parte importante de la ciencia matemática, pero en la escuela del nivel medio no es posible manejarla en los mismos términos o los mismos requerimientos que en la Matemática en sí. Es por ello que al tomar en cuenta la noción de institución, como comunidad de personas dedicadas a resolver problemas comunes por medio de métodos comunes, nos permite pensar en la comunidad escolar (la institución de los enseñantes de la Matemática) y en la comunidad matemática (la institución de los matemáticos profesionales), y así otorgarle un significado al término *demostración* en la escuela teniendo siempre como referencia el significado que se le otorga en la institución matemática y los diversos usos que puede llegar a tener.

Así pues, el sentido que se le puede dar a la demostración en la escuela no es arbitrario, sino que requiere ser caracterizado, por lo que se ha tomado en cuenta lo propuesto por Larios y Acuña (2009):

1. "Es una justificación implícitamente rigurosa de un hecho matemático
2. "Está basado en argumentos que tienen como principal función convencer (al interlocutor y a los que le rodean)
3. "Explica dicho hecho rigurosa y explícitamente.
4. "Y su estructura se organiza con base en inferencias de argumentos deductivos."

Con estas características se ha considerado la Unidad Cognitiva de Teoremas como herramienta para el diseño de actividades, en la cual se propone que la construcción de la demostración involucra un proceso continuo, en términos cognitivos, en el que se pasa por varias etapas de una manera no necesariamente lineal. Estas etapas comienzan con una exploración de una situación dada, tras la cual se genera una conjetura o el planteamiento de una propiedad, para después buscar una justificación al respecto realizando otra exploración y así se encadenan argumentos que permitan demostrar (validar o justificar) la propiedad observada.

Esto no quiere decir que aquella persona que realice una exploración sobre un hecho geométrico (o matemático) y que incluso llegue a proporcionar algunos argumentos que lo justifiquen logre desarrollar una demostración, pues el proceso de construirla es gradual y complejo.

Por otro lado, tampoco es innegable que los dos procesos de argumentar y de demostrar están diferenciados claramente a pesar de esta continuidad cognitiva y de una continuidad en términos semánticos, pues en términos estructurales y epistemológicos existen rupturas que pueden ser difíciles de salvar, pero que quizá con actividades específicamente diseñadas puedan serlo.

En términos particulares de este trabajo, las actividades que se ha propuesto no apuntan como fin último la validación o justificación de propiedades en todas ellas, pero como esto es una parte central de muchas de ellas entonces se ha decidido considerar esta propuesta de los investigadores italianos para estructurarlas. Esta estructura es la siguiente:

1. *Planteamiento de una situación* a través de una consigna en texto para que los alumnos realicen la construcción con el software.
2. *Construcción de la situación*. Se les pide a los alumnos que realicen la construcción con el software. Hay que considerar que si no se hace bien la construcción no se podrán observar muchas cosas, pero es necesario un proceso no lineal para lograr la internalización de la herramienta.
3. *Exploración de la situación*. En esta parte de las actividades se realiza una exploración dirigida de la situación, donde se deja a los alumnos parcialmente libres y porque está documentado en investigaciones que dejar a los alumnos "jugar libremente" con el software no produce resultados adecuados en términos del ambiente y la dinámica escolar.
4. *Explicitación de propiedades observadas*. Después de la construcción y de la exploración, se les pide a los alumnos que expliciten las propiedades que hayan observado, describiendo en ocasiones las acciones realizadas para la exploración.
5. *Justificación de las propiedades*. En algunas de las actividades se les pide a los alumnos que justifiquen las propiedades que hayan observado. En estos casos se busca que las justificaciones avancen hacia una estructura deductiva, para lo cual se hacen pausas en las hojas de trabajo para realizar un proceso de interacción con los alumnos a nivel grupal y se permite el trabajo en parejas.
6. *Conclusión*. En la última parte de la mayoría de las actividades se proporcionan en las hojas de trabajo una breve conclusión de las propiedades que se pretenden estudiar. Esta conclusión en términos docentes no queda ahí, pues en la clase se propone que sea más amplia y que sirva como momento en el cual se lleva a cabo el proceso de institucionalización del conocimiento matemático que se fue desarrollando a trabajos del trabajo y las prácticas en el salón de clase.

Es importante señalar que en ocasiones las etapas de *exploración*, *explicitación de propiedades* y *justificación* se repiten en una sola actividad debido a la intencionalidad de cada una de ellas. Generalmente esto ocurre cuando se propone la exploración de varias propiedades relacionadas en una misma actividad o la exploración de una propiedad que no resulta evidente y que necesita de un proceso progresivo de acercamiento.

Las actividades pensadas han sido 18 y se interrelacionan entre sí como se muestra en la ilustración de la siguiente página. Como ya se mencionó, en ellas se aborda la Geometría del Triángulo y se consideran temas relacionados con el estudio de las medianas, las mediatrices, las bisectrices y las alturas. Además, se ha considerado por lo pronto el uso del software *Cabri-Géomètre*, pero en general pueden ser abordadas con casi cualquier SGD.

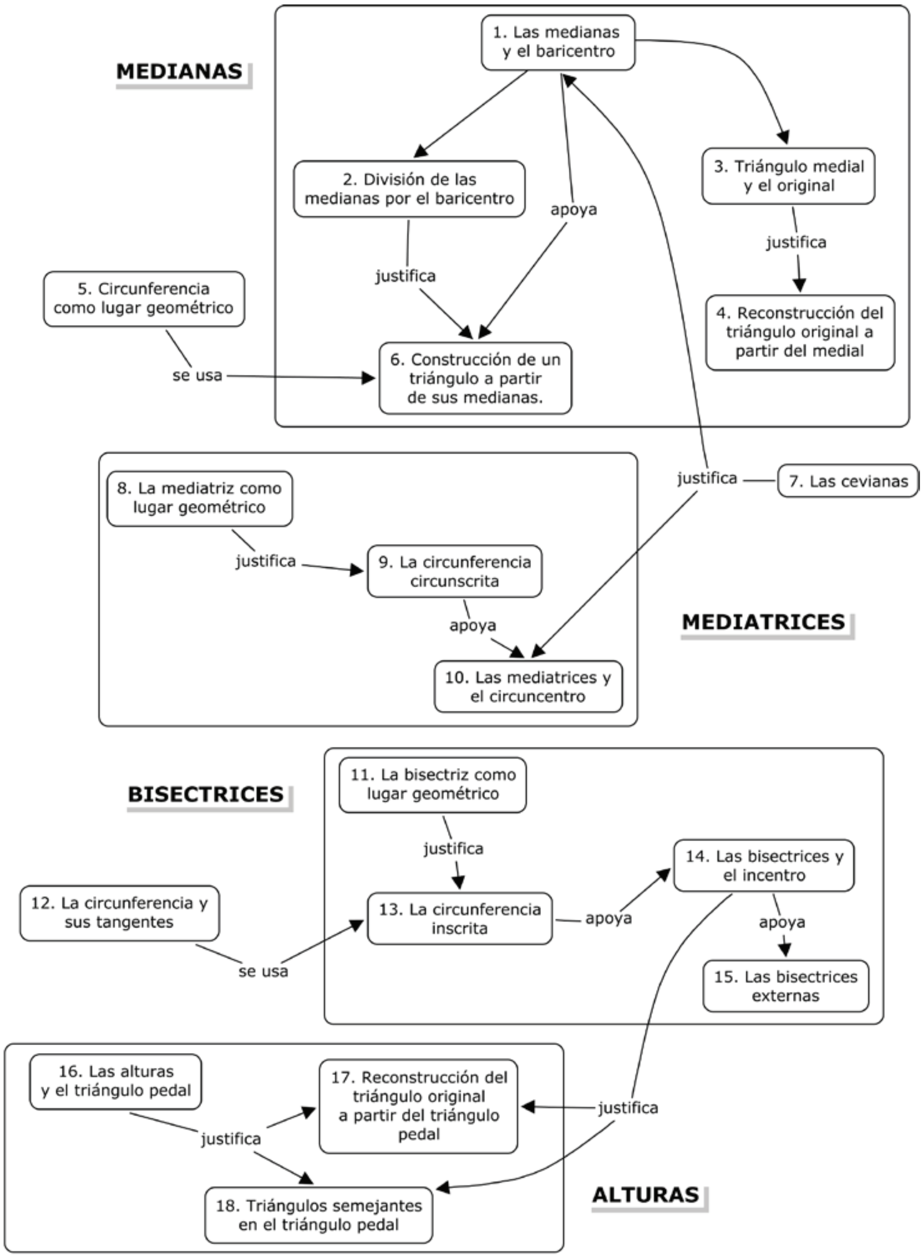
La descripción general de las actividades es la siguiente:

A. Medianas:

1. Construcción de las medianas y del baricentro, observando sus propiedades básicas y justificando la concurrencia.
2. Observación y justificación de la propiedad de que el baricentro corta a cada mediana en una razón dada (1:2).
3. Construcción del triángulo medial y estudio de las propiedades que tiene y las relaciones geométricas que tiene con el triángulo original.
4. Reconstrucción del triángulo original a partir de un triángulo medial dado utilizando las propiedades geométricas observadas en la actividad anterior.
5. Construcción de la circunferencia como lugar geométrico de puntos equidistantes a un punto fijo.
6. Construcción de un triángulo a partir de uno de sus lados y de dos de sus medianas, justificando el procedimiento con las actividades 2 y 5.
7. Construcción de cevianas y exploración del teorema de Ceva.

B. Mediatrices:

8. Construcción de la mediatriz de un segmento como el lugar geométrico de puntos equidistantes a los extremos de un segmento.
9. Circunferencia que pasa por tres puntos no colineales utilizando la propiedad de equidistancia de las mediatrices de la actividad anterior.
10. Construcción de las mediatrices de los lados de un triángulo y de su concurrencia para el centro de la circunferencia circunscrita.



Construcción del triángulo órtico del triángulo.

C. Bisectrices:

11. Construcción de la bisectriz de un ángulo como el lugar geométrico de puntos equidistantes a los lados del mismo.
12. Construcción de las tangentes a una circunferencia observando la perpendicularidad entre aquéllas y los radios correspondientes.

13. Circunferencia inscrita de un triángulo utilizando la propiedad de equidistancia de la actividad 11 y de perpendicularidad de la 12.
14. Construcción de las bisectrices de los ángulos de un triángulo y observación de su concurrencia.
15. Construcción de las bisectrices externas a los ángulos de un triángulo, observando la perpendicularidad entre las bisectrices internas y las externas.
16. Construcción de las alturas de un triángulo y observación de su concurrencia.

D. Alturas:

17. Reconstrucción de un triángulo a partir de un triángulo órtico dado utilizando las propiedades observadas en la actividad anterior y en la actividad 14.
18. Observación de los triángulos semejantes que se obtienen al construir un triángulo órtico de uno dado.

Comentarios finales

Estas actividades están siendo aplicadas en una escuela con alumnos de tercero de secundaria (14-15 años) en una escuela pública cercana a la ciudad de Querétaro (centro de México). Se han observado la aparición de algunos fenómenos relacionados con el uso del SGD, pero también con relación a la misma construcción de la demostración y de justificaciones deductivas.

Algunos de estos fenómenos están relacionados con la visualización y que ya han sido reportados en la literatura, como es el caso de la *rigidez geométrica* y el uso de *prototipos* (Larios, 2005; Acuña y Larios, 2008), que en un ambiente dinámico puede afectar la percepción de dinamicidad proporcionada por el *arrastre*, entorpeciendo el estudio de objetos y propiedades, disminuyendo las posibilidades cuando se hacen exploraciones.

Existe también un cambio en el discurso de los alumnos, ya que los términos utilizados por los alumnos hacen referencia al movimiento y la dinamicidad del software. En la aplicación actual un alumno expresó la relación entre un triángulo y su triángulo medial (actividad 3) utilizando términos similares: "Que conforme el triángulo (sic) grande se mueve el chico también y toma la forma del triángulo (sic) grande."

Aunque los resultados son parciales aún, consideramos que es necesario tomar en cuenta resultados de investigación para poder avanzar más eficazmente en la enseñanza de la Geometría.

Referencias bibliográficas

Acuña Soto, C. M., y Larios Osorio, V. (2008). Prototypes and learning of geometry. A reflection on its pertinence and its causes. En A. Arcavi y N. Presmeg (Edits.), *Proceedings of TSG 20 of ICME-11*. http://tsg.icme11.org/document/get/193

Boero, P., Garuti, R. y Mariotti, M. A. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. En Á. Gutiérrez y L. Puig (Ed.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* vol. 2, (pp. 121-128). Valencia, España.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*, 139-162.

Godino, J. D., y Batanero Bernabeu, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Laborde, C., y Capponi, B. (1994). Cabri Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(1-2), 165-210.

Larios Osorio, V. (2005). *Fenómenos cognitivos presentes en la construcción de argumentos en un ambiente de Geometría Dinámica.* México: Cinvestav-DME.

Larios Osorio, V., y Acuña Soto, C. M. (2009). Geometrical proof in the institutional classroom environment. En F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna y M. de Villiers (Edits.), *Proceedings of the ICMI Study 19: Proof and Proving in Mathematics* (págs. 59-63). Taipei, Taiwán: NTNU.