PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE INTEGRAL, UN ACERCAMIENTO VISUAL CON GEOGEBRA

Armando López Zamudio
C.B.T.I.S. No.94 México
larmandozam@hotmail.com
Campo de investigación: Tecnología avanzada Nivel: Medio

Resumen. *La enseñanza del concepto de integral en la educación media superior es considerada clave del curso Cálculo Integral, de la Reforma Integral del Bachillerato como lo señalan los programas de estudio del bachillerato tecnológico SEP (2008). Los nuevos programas demandan una metodología centrada en el aprendizaje, donde los conocimientos previos deben ser el preámbulo para adentrarse al estudio de conceptos clave, por lo que es importante proponer actividades para abordar estos conceptos enmarcados en la metodología sugerida, tradicionalmente se privilegia el tratamiento algorítmico, sobre el conceptual. En este trabajo proponemos algunas actividades, la utilización del software GeoGebra de Hohenwarter (2008) y sus bondades visuales para equilibrar la situación, como un recurso didáctico que permite a los estudiantes de bachillerato apropiarse del concepto en cuestión. Daremos a conocer una experiencia empírico experimental con alumnos de bachillerato.*
Palabras clave: cálculo integral, GeoGebra, visualización, software educativo

Introducción

Un concepto fundamental del curso de Cálculo Integral es la noción Integral, este concepto suele introducirse en la enseñanza del bachillerato como la antiderivada o la primitiva de la derivada, desde este enfoque se privilegia lo algorítmico y los alumnos muchas veces saben integrar pero no comprenden que es la integral, ni cual es su utilidad. Con las nuevas calculadoras CAS o el software como DERIVE, MAPLE o MATEMATICA resolver una integrar es un asunto de dar algunos "teclazos", y un estudiante con acceso a ésta tecnología, tendrá resuelta la algoritmia involucrada en el cálculo de una integral. Pero, ¿contará con elementos conceptuales que le permitan discernir si los resultados emitidos por la calculadora o computadora son correctos, podrá realizar una adecuada interpretación?, ¿será posible revertir la situación? es decir, lograr que los estudiantes tengan una noción del concepto de integral, que sepan para que es útil, aunque la tarea de las técnicas de integración sea sacrificada y delegada en todo caso a un software. La propuesta de este trabajo es que nuestro objeto de estudio en un curso de cálculo integral, debe ser con una tendencia conceptual y no algorítmica, para ello utilizamos el software de Geogebra y su posibilidad de hacer geometría dinámica, además de practicar lo anterior mediante la presentación de problemas que incluyan el contexto inmediato de los estudiantes. También es posible acceder a dichos conceptos mediante la explicación de fenómenos que se presenten en el entorno social y tecnológico del alumno.

Antecedentes

Cabañas y Cantoral (2006) señalan que: "suele introducirse el concepto de integral en la educación media superior como una forma de obtener el área y se fundamenta en una particular utilización del concepto de límite", expresan que: "esta forma causa dificultades cognitivas", diferentes estudios muestran que los estudiantes tienen dificultades para concebir los procesos de integración y que ellas se relacionan con un cierto desequilibrio entre el tratamiento conceptual y con el algorítmico pues se privilegia el tratamiento algorítmico, (Arcos Quezada, 2006; Cordero, 2003; Artigue 1998). Un estudio realizado en (Cordero, 2003) en el que se acude al empleo de marcos epistemológicos, modelos para la cognición y sobre los tratamientos didácticos para entender el patrón de construcción de la teoría de integración, encontró entre otras afirmaciones que: considerar al área bajo una curva como modelo geométrico de la integral en un ambiente de variación continua, *exige mover lo estático.*

De la propuesta

El presente trabajo propone una serie de actividades que consisten en medir el área por diferentes métodos de figuras geométricas (Triángulos, trapecios, rectángulos, semicírculos) tangibles, hechas en madera o acrílico. Para generar un conflicto cognitivo se pide el cálculo de áreas de figuras también tangibles como: sectores de áreas parabólicos, de una raíz cuadrada o de la función senx. En esta tarea se pide a los alumnos que planteen un problema contextualizado donde se involucre la figura geométrica de la cuál se desea obtener el área. Posteriormente se recurre al software GeoGebra a través una serie de actividades diseñadas, donde se puede visualizar exhaución de un sector parabólico y la idea de Leibniz de que $\int y dy = Q$ significa que la suma de los rectángulos infinitamente pequeños es *Q*. Con el uso del software podemos revertir lo que Cordero (2003) encontró "la exigencia de mover lo estático". GeoGebra tiene una herramienta o comando llamado *Deslizador* que consiste en asignar a una variable valores que pueden ir cambiando discretamente con incrementos que uno decida, y si esta variable esta asociada a algún objeto geométrico éste cambia en tiempo real. En la figura 1 mostramos como el *Deslizador* a varia de 1 a 20 y esta asociado al radio de una circunferencia, que al mover el *Deslizador* traza las circunferencias con los distintos radios. ¡Estamos moviendo lo estático!

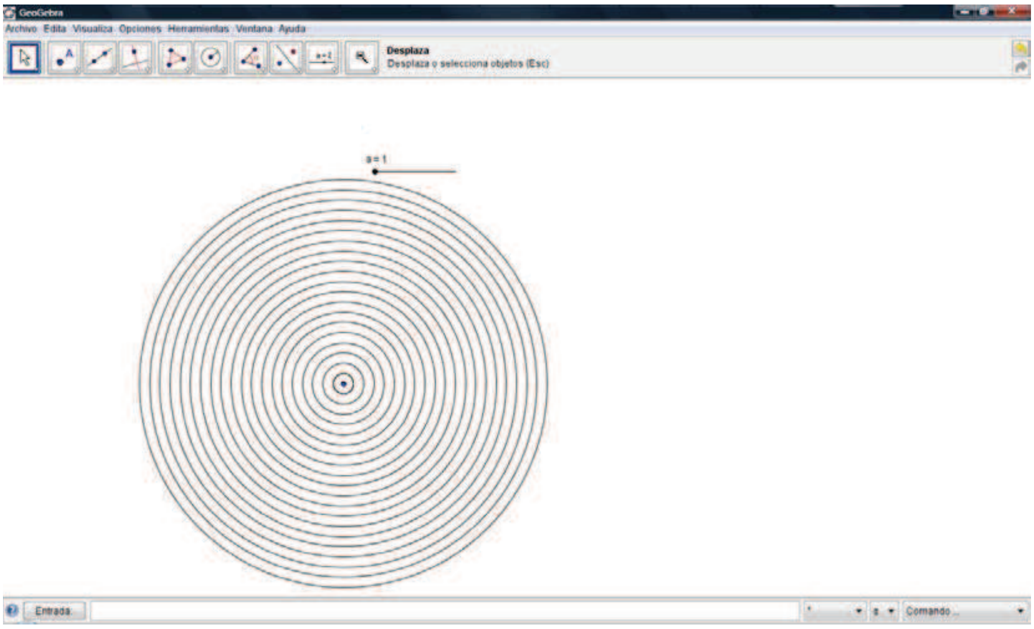

Figura 1. Círculos concéntricos de radio los valores del deslizador a.

Como señala Cantoral y Cabañas (2006) la explicación didáctica asociada a la presentación de la integral, normalmente se realiza a través de la consideración de que para una función positiva definida sobre un intervalo cerrado, la integral proporcionará el valor del "área bajo la curva". La medición de dicha área se obtiene subdividiendo en regiones planas más pequeñas, cuyas disposiciones geométricas permitan la utilización directa de fórmulas conocidas. Suele dividirse, por ejemplo, al intervalo de integración en subintervalos de igual longitud, sobre los cuales se construyen rectángulos construidos. El cálculo del área de estos rectángulos utiliza la fórmula elemental "base por altura" ésta construcción la puede realizar GeoGebra con un comando llamado *sumaInferior[],* o *sumasuperior[]* entre corchetes se escribe la notación, por ejemplo: *sumaInferior[f,a,b,n]* que indica el cálculo del área bajo la curva *f*, en el intervalo *[a,b],* con *n* subdivisiones. Estos comandos realizan un cálculo aproximado al área bajo la curva por defecto o por exceso De esta manera podemos usar un *Deslizador* asociándole valores por ejemplo de uno hasta quinientos y asociarlo a la *sumainferior*, al ir cambiando el número de subdivisiones del intervalo en tiempo real, se logra visualizar que a medida que *n* crece, se tiende a un límite, justamente la medida del área bajo la curva. La figura 2 muestra la suma para 10 rectángulos bajo la función $f(x)=x^2 +3$ en un intervalo de 0 a 2, luego se hace crecer n a 40 y se muestra en la figura 3 luego se cambia hasta 200 como lo muestra la figura 4, finalmente la figura 5 muestra una aproximación del área bajo la curva para 400 subdivisiones

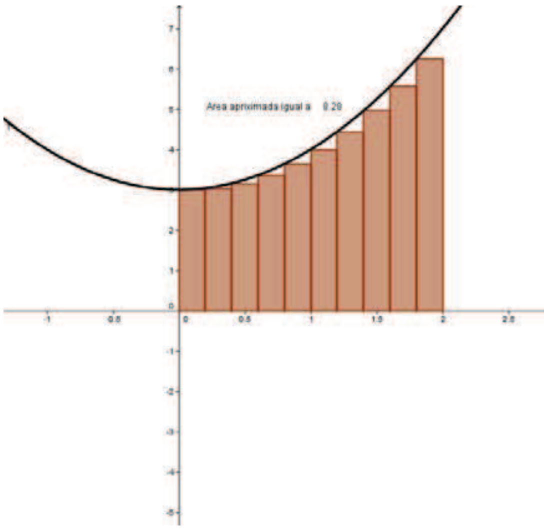

Figura 2. Área aproximada con diez subdivisiones

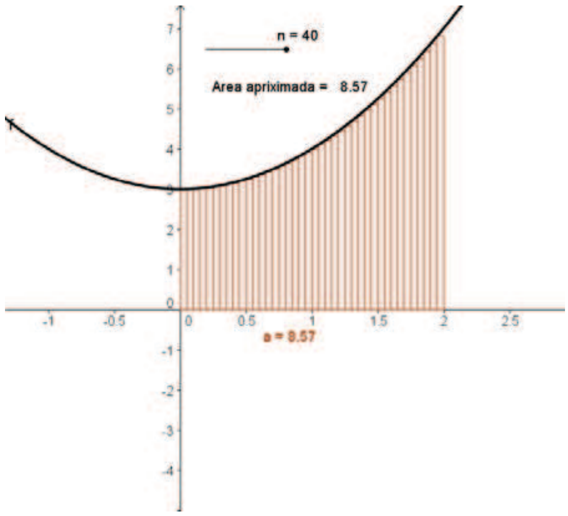

Figura 3. Área aproximada con 40 subdivisiones

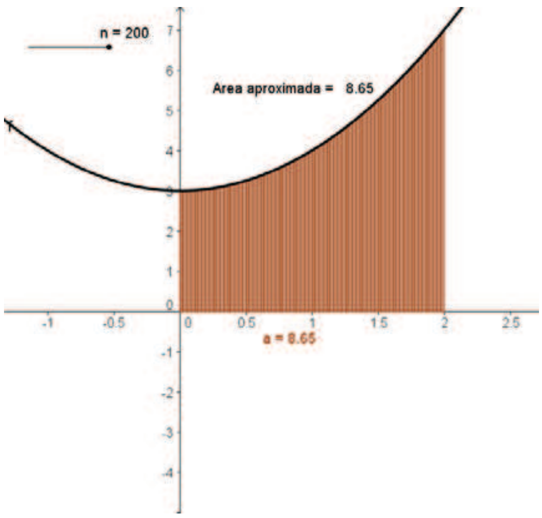

Figura 4. Área aproximada con 200 subdivisiones

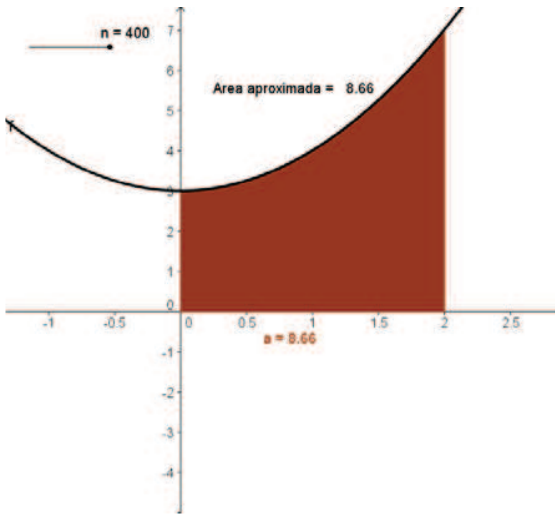

Figura 5. Área aproximada con 400 subdivisiones

El poder que dan los *Deslizadores* para visualizar a la integral como un proceso de un límite moviendo lo estático, es una idea bastante plausible para introducir así el concepto de Integral en el bachillerato.

Metodología

Se aplicaron las actividades a un grupo de 5to semestre de bachillerato, la experiencia fue una experimentación empírico experimental. El grupo estuvo formado por 45 alumnos, se dieron 7 sesiones de una hora en donde los alumnos se familiarizaron con los comandos de GeoGebra a la vez que exploraron graficas de funciones algebraicas y trascendentes. Buscando la articulación entre la representación simbólica y la gráfica, estudiando los efectos de los parámetros de las formas generales en la representación simbólica de las funciones. En la sexta actividad los estudiantes exponen los contextos que inventaron así como los métodos que usaron para calcular el área. La sesión 7 aborda el cálculo de áreas bajo curvas, usando la idea antes expuesta a través del uso del comando *Deslizador* para diferentes casos de funciones y diferentes valores de *n*.

Resultados

Los contextos que proponen los estudiantes resultan interesantes porque parten desde sus propios intereses, sus exposiciones son parodias, maquetas sobradas de creatividad. El conflicto cognitivo efectivamente aparece cuando los alumnos no pueden calcular de manera exacta el área, ellos encontraron métodos de exhaución como los mostrados en las figuras 6 y 7.

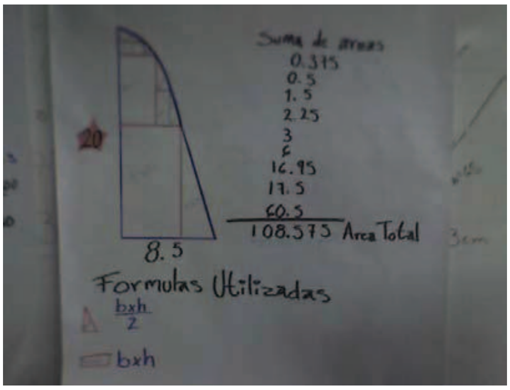

Figura 6. Área aproximada de un sector parabólico

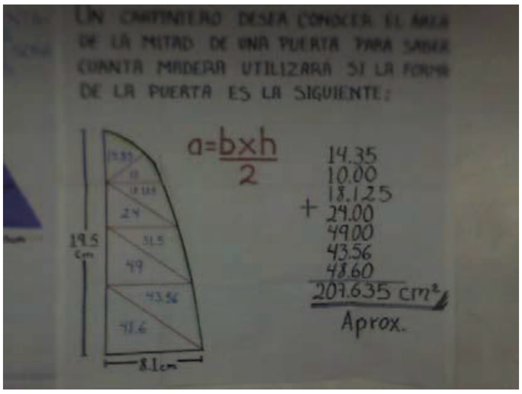

Figura 7. Área aproximada de un sector parabólico

Como podemos observar, hacen un supuesto de que algunos porciones de área son muy parecidas al área de un triángulo, un método recurrente que usaron fue el de cuadricular, otros encontraron el método de cubrir con rectángulos por exceso o por defecto pero tuvieron dificultades para entender el método. Logrando así su interés por aprender un método que les permitiera calcular el área de su problema.

En la figura 8 se muestra como un alumno que ya comprendió el concepto de integral prefiere este método para calcular un área, que las fórmulas de la geometría plana, en la figura 9 un alumno muestra que comprendió los dos métodos el uso de la integral definida y un método numérico. En la figura 10 un alumno usa sus conocimientos de geometría plana y los de cálculo integral para calcular el área bajo una parábola, incluso por dos métodos, mostrando un gran avance en comprensión del tema. En cambio en la figura 11 un alumno aplica un método numérico y obtiene un resultado muy lejano del real.

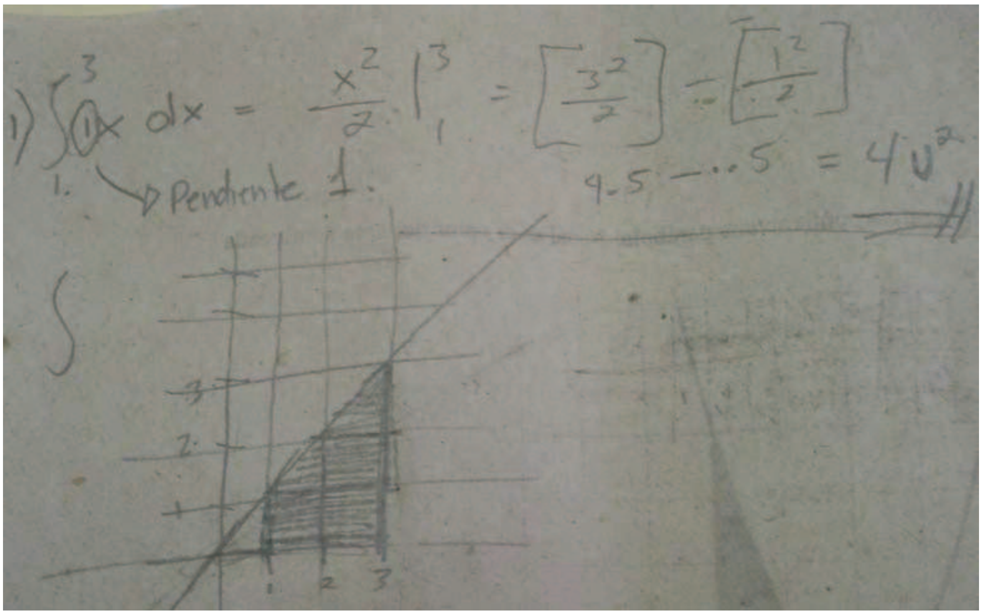

Figura 8. Cálculo del área de un trapecio usando la integral definida

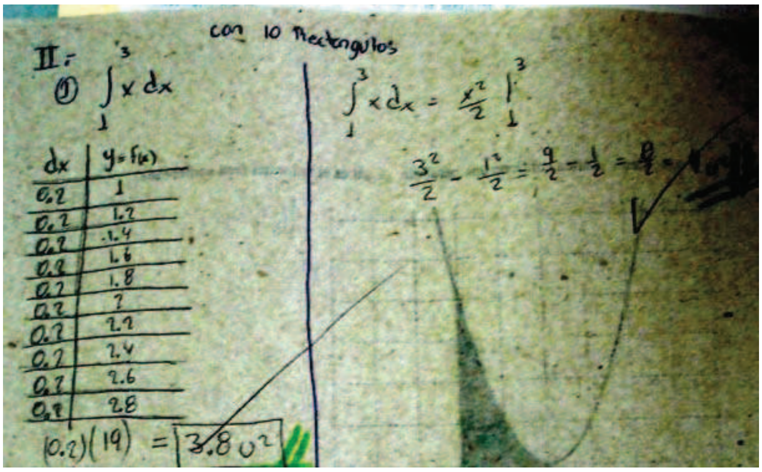

Figura 9. Cálculo del área de un trapecio usando la integral definida y un método numérico

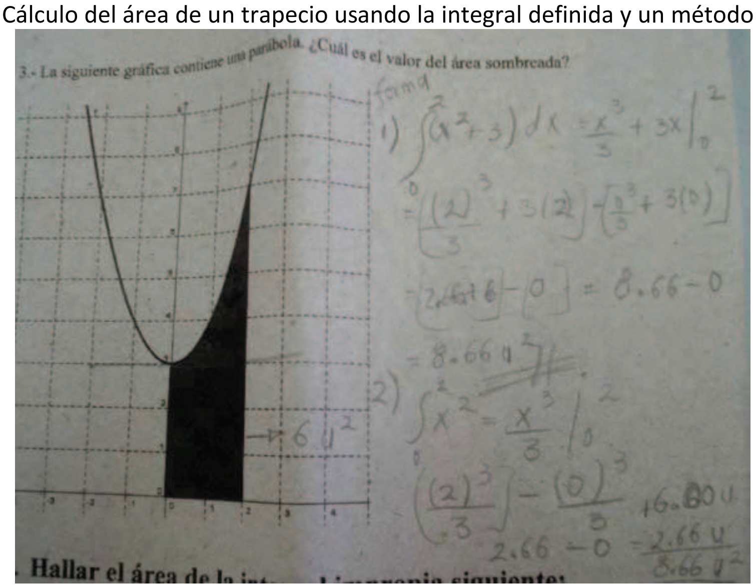

Figura 10. Cálculo del área bajo una parábola dos formas

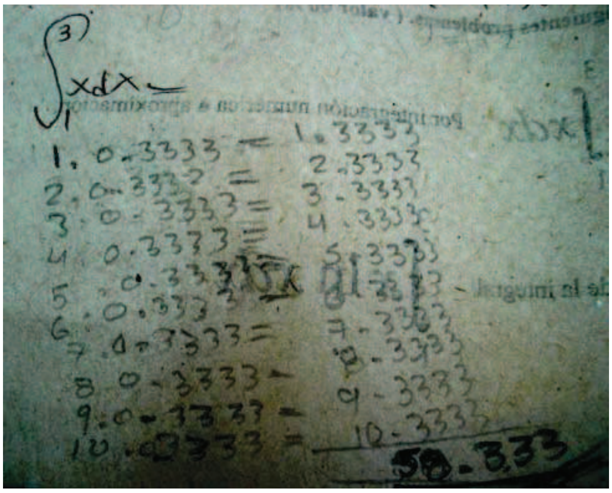

Figura 11. Cálculo del área bajo una recta resultado erróneo

Conclusiones

La posibilidad de visualizar el concepto de integral con GeoGebra da la oportunidad de que los alumnos reacomoden sus saberes e incorporen nuevos conceptos para resolver problemas, esta experiencia empírico experimental nos permitió realizar un análisis cualitativo y en algún momento pudimos observar que los estudiantes sabían para que es útil la integral, aunque no sabían integrar. Avanzado el curso pudimos lograr el equilibrio entre lo conceptual y lo algorítmico. La gran mayoría pudo interiorizar el concepto de integral. Queda en el horizonte poner en la práctica docente esta propuesta y experimentar con más grupos para alcanzar mayores estándares en los saberes de nuestros estudiantes.

Referencias bibliograficas

Artigue, M. (1998) Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *1*(1), 40-55.

Arcos Quezada J. I. (2006) El cálculo infinitesimal y la enseñanza del cálculo en el siglo XXI. *En* Sepúlveda, L. A., García, P. R., Guerrero, M. L. (Eds.). *Memorias. XIV Encuentro de Profesores de Matemáticas*, (pp. 51-57) . Morelia: UMSNH.

Cabañas, G y cantoral, R. (2006). La conservación en el estudio de área. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.) *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 199-226). México D.F. México:Diaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del cálculo integral: La noción de acumulación como una argumentación.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hohenwarter M. (2008) *GeoGebra* (Versión 3.0) [Software de cómputo] Salzburgo, Austria.

SEP (2008) *Programas de Estudio Matemáticas, Bachillerato Tecnológico, Reforma Integral del Bachillerato*. Subsecretaria de Educación Media Superior. Coordinación Sectorial de Desarrollo Académico. México.