# RESIGNIFICACIÓN DE LOS CAMPOS DE PENDIENTES EN LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN UN CONTEXTO ELECTRÓNICO

Edgar Javier Morales Velasco, Hipólito Hernández Pérez
Cimate de la Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Chiapas    México
emv_dj@hotmail.com, polito_hernandez@hotmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología    Nivel: Superior

**Resumen.** *En la actualidad los textos y programas de estudio de ecuaciones diferenciales usados en los cursos de ingeniería electrónica privilegian resolver las ecuaciones diferenciales de un circuito eléctrico por medio de métodos cuantitativos y la gráfica de la solución analítica, dejando a un lado el uso de los campos de pendientes que permita al alumno identificar el comportamiento gráfico de dichas ecuaciones diferenciales. En este trabajo se pretende explorar los campos de pendientes mediante el uso del software Cabri Geometry II como herramienta de geometría interactiva. En la investigación se diseñará una situación didáctica para generar por medio de los estudiantes argumentos sobre los campos de pendientes de una ecuación diferencial, con la finalidad de reconstruir los significados de los campos de pendientes de una ecuación diferencial en un marco de prácticas sociales de la graficación y modelación basados en la aproximación socioepistemologíca*.
**Palabras Clave:** situación didáctica, prácticas sociales, socioepistemología

## Problemática

En la revisión realizada a los textos y programas de estudio de ecuaciones diferenciales usados en los cursos de ingeniería electrónica se encuentra que se privilegia resolver las ecuaciones diferenciales de un circuito eléctrico por medio de métodos cuantitativos, es decir por métodos algebraicos, dejando a un lado el uso de los campos de pendientes que le permita al alumno identificar el comportamiento gráfico de dichas ecuaciones diferenciales. En los cursos y textos de ecuaciones diferenciales ha predominado el enfoque de la solución analítica, pero también existen textos que le dan un enfoque gráfico y visual como los textos de Lomen y Lovelock (2000), Stewart (2002), en el caso de la ingeniería electrónica se ha privilegiado el método cuantitativo, es decir, el método algebraico y la gráfica de la solución analítica, pero carecen de los aspectos gráfico y visual de los campo de pendientes. Respecto a este contexto que se da en la ingeniería electrónica, Cordero (2000) menciona que en las soluciones de las ecuaciones diferenciales se ha privilegiado el contexto algebraico donde las soluciones de las distintas clases de ecuaciones diferenciales son expresadas por medio de fórmulas algebraicas exactas, explícitas o implícitas, expansiones en series, expresiones integrales entre otras. El privilegio del contexto algebraico deja en la mente del estudiante una restringida e insatisfecha imagen de las ecuaciones diferenciales. Además Cordero dice que los estudiantes están convencidos de que existe una receta que permite la integración algebraica exacta de cada clase de ecuaciones diferenciales. También, él indica que desde un punto de vista epistemológico se encuentra el desarrollo de la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos y por otro se encuentra el desarrollo de la tecnología; en cuanto a este último se refiere a las calculadoras, computadora y graficadores.

## Objetivo

Por tal motivo en este trabajo exploramos en una primera etapa el aspecto gráfico y visual de los campos de pendientes de las ecuaciones diferenciales como un contexto que permita la resignificación de las ecuaciones diferenciales en la ingeniería electrónica. El objetivo es diseñar una situación didáctica en el contexto de los circuitos electrónicos, para generar por medio de los estudiantes argumentos sobre los campos de pendientes de una ecuación diferencial, con la finalidad de reconstruir los significados de los campos de pendientes de una ecuación diferencial en un marco de prácticas sociales de la graficación y modelación.

## Antecedentes

En las revisiones realizadas a los libros de texto de análisis de circuitos eléctricos usados en electrónica, por ejemplo, tenemos a Bobrow (1993), Conejo (2004), Hayt y Kemmerly (1990) estos presentan el análisis de circuitos eléctricos con ecuaciones diferenciales de primer orden y de segundo orden con constantes agrupadas. Los autores mencionan que los resultados de estas ecuaciones diferenciales también pueden ser utilizados por otros contextos, por ejemplo el ingeniero mecánico interesado en el desplazamiento de una masa soportada por un resorte y sometida a un amortiguamiento viscoso, también por el interesado en el comportamiento de un péndulo simple. Los autores muestran el siguiente ejercicio:

*Suponga que tenemos el circuito RL en serie que se muestra en la figura1. La red se excita por una tensión escalón unidad, donde R = 4 Ω, L = 2 H, V(s) = 3U(t) y suponemos un valor inicial de la corriente (en t = 0) de 5 amperios.*

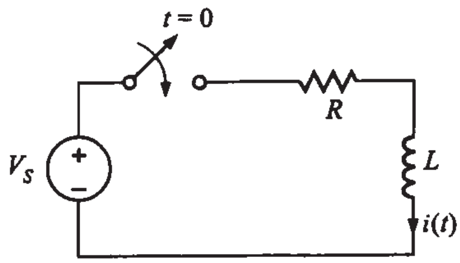


Figura 1. Circuito RL.

La solución que se muestra es: Por la segunda ley de Kirchhoff se escribe la ecuación de malla en el dominio del tiempo, $2\frac{di}{dt}+4i=3u(t)$ se convierte al dominio de la frecuencia tomando la transformada de Laplace de cada término, $2[sI(s)-i(0)]+4I(s)=3/s$, y luego de una serie de procedimientos algebraicos presenta la respuesta de la ecuación diferencial. $I(t)=0.75u(t)+4.25e^{-2t}u(t)$.

Como se puede observar en la mayoría de los textos de circuitos eléctricos se privilegia la solución analítica de las ecuaciones diferenciales. El uso de los campos de pendientes en el análisis de las ecuaciones diferenciales de los circuitos eléctricos podría permitir al alumno un mejor entendimiento respecto a la solución de las ecuaciones diferenciales.

Los conocimientos que se aprenden están influenciados por los medios y las herramientas utilizadas para el aprendizaje y la enseñanza. En el caso particular de la Matemática esto no deja de ser cierto y la incorporación de herramientas computacionales a los procesos educativos influye indiscutiblemente en los significados que se le otorgan a los objetos matemáticos, fenómeno que siempre ha sucedido con otros tipos de tecnologías utilizadas. En este trabajo particular los software que podrían ser considerados son los que se inscriben dentro de la categoría de *software para Geometría Dinámica* (Larios, 2006). Las características principales que diferencian una aproximación utilizando este software con respecto a una que considera la tecnología papel-y-lápiz, además del hecho evidente y simplista de estar utilizando computadoras son:

* Los macros que posibilitan definir rutinas o cadenas.

* La de construir lugares geométricos.

* La transformación continua en tiempo real llamada comúnmente “arrastre”.

El arrastre permite la modificación directa de la forma o posición de los objetos geométricos construidos por el usuario mediante el uso del ratón sin que se dejen de preservar las relaciones geométricas con las que fueron construidos. Este tipo de software ofrece oportunidades para explorar situaciones geométricas bajo un ambiente que permite llevar a cabo indagaciones que de otra manera podrían ser muy restrictivas y que sólo están al alcance de aquellos que ya tienen un entrenamiento especial (los matemáticos, por ejemplo) o bien que tienen una mayor capacidad de imaginación espacial que los demás. El software permite de manera controlada y física, por medio del ratón, la transformación de construcciones respetando las relaciones geométricas y proporcionando una respuesta visual por medio de la pantalla de la computadora (Larios, 2006). En este trabajo, se pretende explorar los campos de pendientes mediante el uso del software Cabri Geometry II como herramienta de geometría interactiva que debido a la sencillez de su manejo, brinda la oportunidad de que la adaptemos al tema de campos de pendientes de las ecuaciones diferenciales. Si bien es cierto existen otros programas o las mismas calculadoras con capacidades para la graficación de los campos de pendientes que hacen lo mismo con el sólo hecho de introducir la ecuación, la ventaja de Cabri es que existe un procedimiento de construcción que ayuda a la comprensión del tema y a recordar algunos conceptos de cálculo (Buendía, Cruz, Poirier, Hernández, Velasco y Megchún, 2006).

## Marco Teórico

Nuestro marco teórico se basa en investigaciones como el de Cantoral (1996) que menciona que la matemática educativa no es la enseñanza de las matemáticas ni la matemática escolar una simplificación de la matemática, pero sí existen fuertes vínculos entre sí. No constituyen los mismos cuerpos de conocimiento, puesto que la matemática educativa es una disciplina con ubicación en las prácticas sociales y conceptuales de enseñar y aprender matemática y de la matemática escolar. La vieja visión de que la didáctica de la matemática era sólo una colección de trucos para el “bien enseñar”, se ha visto modificada por aquel espacio en el cual los estudios de investigación en el campo están siendo usados para construir unidades de conocimiento organizado que puede ayudar las prácticas sociales de referencia. En Cordero y Flores (2007) mencionan que la aproximación socioepistemologíca nos ha señalado que las prácticas sociales con referencia al conocimiento matemático son un elemento insoslayable en las explicaciones de los fenómenos didácticos. Es decir, que para entender la construcción del conocimiento escolar es necesario formular epistemologías de prácticas sociales. Éstas brindarán indicadores para desarrollar tales prácticas en el sistema didáctico. El planteamiento anterior integra componentes para tratar a las gráficas de los campos de pendientes de las ecuaciones diferenciales como prácticas en lugar de representaciones. El conocimiento matemático escolar en la aproximación socioepistemologíca se concibe como un conocimiento que se resignifica al paso de la vivencia institucional, lo que hace que la actividad humana o las prácticas sociales sean las generadoras de tal conocimiento, ya que éstas son propias de las formas de organización de los grupos humanos, donde se manifiestan sus pensamientos, significados y argumentaciones, todos ellos orientados por las intenciones para alcanzar los consensos requeridos. Al igual que Buendía (2004) señala que la socioepistemología se refiere al análisis de las relaciones epistemológicas entre prácticas sociales y el conocimiento matemático. Es necesario estudiar cómo se constituye el conocimiento desde una perspectiva de la actividad en la que se involucra un individuo como parte de la comunidad y tomar en cuenta no sólo la producción matemática final, sino las herramientas y los argumentos que el estudiante pone en juego. La socioepistemología debe significar el reflejo de cualquier individuo al hacer matemáticas y en segundo lugar, considerar que el funcionamiento mental debe estar en correspondencia con el lenguaje de herramientas que resulta de esta actividad. En este trabajo pretendemos mostrar la resignificación de las gráficas de los campos de pendientes de las ecuaciones diferenciales en los circuitos eléctricos como práctica social. Para ello, se diseñarán secuencias que tiene como propósito que el alumno construya un significado de las ecuaciones diferenciales en los circuitos eléctricos a través de la graficación de los campos de pendientes usando Geometría Dinámica. Con el marco anterior tratamos de hacer epistemología de prácticas sociales que cumpla con la intencionalidad que demanda el ingreso de un saber al sistema didáctico y porque debe ser consistente con las formas de organización de los grupos humanos. Su *función* consiste en buscar las bases para que la reorganización matemática (responsabilidad de la matemática educativa) sea coherente y pertinente con los fenómenos didácticos en cuestión. Para ello, su *forma de operar* consiste en interpretar el fenómeno didáctico a través de relaciones complejas que abarcan, a parte de la epistemológica, dimensiones cognitivas, didácticas y sociales.

## Diseño de la situación didáctica

Para llevar a cabo nuestra investigación, la metodología a seguir proporciona un mecanismo de validación interna, como la ingeniería didáctica. Su esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, la concepción, observación y análisis de secuencias de enseñanza, Lezama y Farfán (2001). Siguiendo esta propuesta de la ingeniería didáctica se realizó una fase de planeación estableciendo el propósito que alcanzaríamos en la investigación. Como segundo paso se diseñó la situación didáctica la cual se aplicó a los estudiantes. En nuestra fase experimental, a un grupo de estudiantes de tercer semestre de ingeniería se dividió en 4 equipos de cuatro integrantes y 3 equipos de 3 integrantes, a los cuales se les aplicó la situación didáctica.

Se les solicitó que explicaran que es una “pendiente”; lo que ellos respondieron fue:

**Argumento 1:** es la inclinación $\alpha$ de dicha recta con respecto a un eje de referencia, se obtiene mediante la función tangente $m = tg\alpha$.

**Argumento 2:** es la inclinación que existe si se trazara una línea entre dos puntos en el plano cartesiano.

**Argumento 3:** La derivada de la función en un punto.

Luego mediante una gráfica se les pide que encuentren una relación geométrica de la inclinación de los segmentos con los signos de las pendientes y que la explicaran, en esta parte lo que se busca es que los alumnos relacionen la inclinación de las rectas con el signo de la pendiente, por lo que la mayoría de los equipos si lograron hacer esta relación; cabe mencionar que los equipos para establecer su respuesta comentaban de los términos de la inclinación de la recta, de máximos y mínimos.

**Argumento 1:** cuando el signo de la magnitud de la pendiente es positivo indica que la pendiente se inclina hacia la derecha eje (+ $x$), cuando el signo es negativo indica que la pendiente es constante y se inclina sobre la izquierda (- $x$).

**Argumento 2:** cuando $0 < \alpha < 90º$ el signo de la pendiente es positivo si solo si el eje de referencia es el eje $x$, el signo de la pendiente es negativo si solo si $180º < \alpha < 90º$, cuando el eje de referencia es el eje $x$.

Posteriormente los alumnos calculan una serie de pendientes con la expresión $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$ que servirán para construir el campo de pendientes, todos los equipos lograron obtener las pendientes, excepto al dibujarlas ninguno de los equipos dibujo completo el campo de pendientes, argumentaban que eran muchos y se volvía un tanto tedioso estarlas dibujando a mano; es en esta parte donde el software Cabri Geometry II nos es de utilidad ya que facilita el trazado de las pendientes en menos tiempo y menos tedioso como argumentan los alumnos. Posteriormente se les pide que encuentren la antiderivada de la expresión que utilizaron para crear el campo de pendientes, en esta parte también los alumnos muestran la respuesta que se esperaba: $y = x^2 + c$. Al final de la situación se les pregunta a los estudiantes si el campo de pendientes trazado genera las familias de curvas de la solución de la antiderivada; ellos responden:

**Argumento:** si la genera porque al trazar el campo de pendientes se interceptan las pendientes positivas y negativas que generará familias de parábolas, es decir $y = x^2 + C$.

Para la siguiente situación didáctica el grupo anterior se seleccionó solo a tres equipos, el equipo A con 3 integrantes, el equipo B con 2 integrantes y el equipo C con 2 integrantes, se les proporcionó un circuito RL como el que se muestra en la figura 1 donde R = 2Ω, L = 1H, $V_s$ = 8V y cuya ecuación diferencial esta definida por $\frac{dI}{dt} = 8 - 2I$ con la condición inicial de *t* = 0. De los tres equipos solo dos equipos pudieron dibujar el campo de pendientes, al concluir la situación didáctica los equipos dan una explicación haciendo un análisis del campo de pendientes:

**Argumento del equipo A:** No concluyeron bien.

**Argumento del equipo B:** Vemos que la ecuación diferencial tiene un comportamiento exponencial, llegando a cierto valor para *(I)* la familia de curvas que podemos ver se vuelven constantes.

**Argumento del equipo C:** Para nosotros vemos también que la familia de curvas tiene un comportamiento exponencial, conforme crece el tiempo *t* la familia de curvas tiende a un valor constante por lo que el valor de las pendientes comienza a disminuir, es decir, la corriente *(I)* al llegar a este valor constante permanece sin variación aunque el tiempo aumente.

En nuestra fase de validación observamos que el propósito de la situación didáctica si cumplió con nuestro objetivo, cabe mencionar que en la segunda situación didáctica el equipo C nos muestra un argumento mas detallado del comportamiento del circuito eléctrico solo con el análisis del campo de pendientes.

## Conclusiones

Podemos concluir en este trabajo que abordar a las ecuaciones diferenciales de forma cualitativa con ayuda de software como el Cabri es interesante, porque facilita el trazo de las pendientes en menor tiempo, al trazar el campo de pendientes nos recuerda conceptos de cálculo, además de que aprendemos mayor información de las ecuaciones diferenciales, por ejemplo, la rapidez de crecimiento o decrecimiento de las pendientes, su comportamiento en el tiempo, de forma visual. En cambio, resolver una ecuación de forma algebraica nos deja una restringida e insatisfecha imagen de las ecuaciones diferenciales como argumenta Cordero (2000) y Artigue (1999) en sus obras. Por tanto, los argumentos vertidos por los estudiantes proporcionan elementos para resignificar el campo de pendientes de las ecuaciones diferenciales.

## Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1999). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* (pp. 97-140) México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bobrow, L. (1993). *Análisis de Circuitos Eléctricos*. México: McGraw Hill interamericana de México, S. A. de C. V.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales.* Tesis de Doctorado. Cinvestav-IPN, México.

Buendía, G., Cruz, C., Poirier, P., Hernández, H., Velasco, E. y Megchún, J. (2006). *La tecnología en el aula de Matemáticas: prácticas de laboratorio y medios virtuales.* Chiapas: Talleres gráficos de la Universidad autónoma de Chiapas.

Cantoral, R. (1996). *Una visión de la matemática educativa. Investigación en matemática educativa.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Conejo, A. (2004). *Circuitos Eléctricos para la ingeniería*. España: Edigrafos.

Cordero, F. (2000). *Un acercamiento gráfico a las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes*. México: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10* (1), 7-38.

Hayt, W. y Kemmerly, J. (1990). *Análisis de circuitos en ingeniería*. México: Editorial McGraw Hill.

Larios, V. (2006). La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9* (3), 361-381.

Lezama, J. y Farfán, R. (2001). Introducción al estudio de la reproducibilidad. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4,* (2), 161-193.

Lomen, D. y Lovelock, D. (2000). *Ecuaciones diferenciales a través de gráficas, modelos y datos*. México: CECSA.

Stewart, J. (2002). *Cálculo: Trascendentes tempranas*. México: Thomson.