

## ANÁLISIS DIDÁCTICO Y COGNITIVO DE LOS ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA

José Luis Miranda Nava, Erika S. Maldonado Mejía

Universidad Autónoma de Guerrero

México

jluis.es@hotmail.com, elika.mm@hotmail.com

Campo de investigación: Pensamiento Matemático Avanzado

Nivel: Básico, Medio

**Resumen.** *Diversas investigaciones reportan sobre las diferentes nociones que tienen los estudiantes del concepto de ángulo (Martínez y Rodríguez, 2005) y de razón trigonométrica (Araya, et al, 2007), donde muestran la falta de significación que pudiera ser la causa de no concebir la noción de función trigonométrica (Maldonado 2005) o causa de los conflictos que presentan los estudiantes al estudiar este tipo de función (Montiel 2005).*

*Por este motivo nos interesamos en mostrar cómo están presentes los elementos de la trigonometría en el medio escolar y cuáles son las concepciones que el estudiante tiene respecto de los conceptos previos a la función trigonométrica, como son los elementos de trigonometría. En el presente trabajo, se reporta parte del análisis didáctico sobre los elementos de la trigonometría, en el que identificamos cuáles son estos conceptos y cuál es el patrón que siguen para su enseñanza.*

**Palabras clave:** concepto, significado, elementos de trigonometría, transposición didáctica

### Introducción

Uno de los intereses de la humanidad se ha centrado en conocer distancias astronómicas, como por ejemplo la distancia que existe entre la Tierra y el sol. En la actualidad sabemos que para calcular distancias inaccesibles, se realiza a través de semejanza de triángulos y relaciones entre los lados y ángulos de éstos, teniendo entonces una herramienta para este tipo de cálculos, desde la época de los griegos, a la trigonometría. Los primeros en hacer uso de los elementos de trigonometría, sin que en ese entonces se consideraran como tales, fueron Menelao, Ptolomeo e Hiparco.

En el medio educativo los elementos de trigonometría son de vital importancia para el estudio de la función trigonométrica. La enseñanza de la trigonometría, o la enseñanza de los primeros conceptos ligados a la función trigonométrica, son abordadas a partir del nivel básico (secundaria), de modo que las concepciones que se adquieren en este nivel son de vital importancia, pues forman una base para adentrarse al estudio de la función trigonométrica en el nivel medio superior. Pero, cuando se plantea una actividad de enseñanza de un tema o concepto matemático, se espera que el estudiante logre asociarle un significado al concepto nuevo por aprender; sin

embargo, suele ocurrir que sólo se esté fortaleciendo el conocimiento carente de significación o erróneo.

De acuerdo con Vinner (1983) y Tall (1996), (citado en Montiel, 2005), apropiarse del significado de la noción de un concepto implica formar una imagen del mismo, es decir, tener estructuras cognitivas que se asocien al concepto, incluyendo sus representaciones mentales, procesos y propiedades asociados.

Sin embargo, las nociones que tienen los estudiantes del concepto de ángulo (Martínez y Rodríguez, 2005) y razón trigonométrica (Araya, et al, 2007), suelen ser deficientes y carentes de significación y pudiera ser la causa del por qué no conciben la noción de función trigonométrica (Maldonado 2005) o causa de los conflictos que presentan los estudiantes (Montiel 2005).

Por tal motivo nos planteamos lo siguiente como problema de investigación ¿Cómo están presentes los elementos de la trigonometría en el medio escolar y cuáles son las concepciones que el estudiante tiene con respecto a los conceptos previos a la función trigonométrica, como son los elementos de trigonometría? Con el propósito de dar cuenta de cómo son presentados los elementos de la trigonometría en el plan y programa de estudio y en los libros de texto utilizados por el profesor; también, identificar las concepciones que los estudiantes tienen respecto de los conceptos que son necesarios para el estudio de la función trigonométrica, a fin de describir dichas concepciones.

Para realizar esta investigación nos ubicamos en el nivel básico (secundaria) para el estudio didáctico, y el cognitivo en el nivel medio superior. El análisis cognitivo se hace en este nivel porque el estudio de la trigonometría se realiza al finalizar el último ciclo escolar del nivel medio.

Como pretendemos inferir sobre las concepciones que tienen los estudiantes, en nuestra investigación tomaremos el término concepción como: *los conocimientos del sujeto sobre un objeto, originados como consecuencia de los procesos de enseñanza-aprendizaje en el seno de sistemas didácticos o en entornos informales*, (Ruiz, 1998, p. 49).

## Antecedentes

Recientes investigaciones muestran evidencias de que algunos estudiantes presentan conflictos al momento de asignar un significado a la función trigonométrica (Montiel 2005) así como las concepciones que tienen los estudiantes con respecto al concepto de ángulo, razones trigonométricas y sus funciones (Martínez y Rodríguez 2005).

Martínez y Rodríguez (2005) con la finalidad de dar cuenta del discurso y vida escolar de los conceptos de ángulo, ángulo negativo, ángulos mayores de  $360^\circ$ , razones y funciones trigonométricas, realizan un análisis de libros de textos utilizados por profesores y alumnos. Diseña un cuestionario tras su análisis didáctico y lo aplican a diecinueve estudiantes. Al confrontar su análisis didáctico y cognitivo, encuentran que los fundamentos para tratar su tema de su interés no son muy amplios, la mayoría de los estudiantes asumen la inexistencia de los ángulos negativos y mayores de  $360^\circ$ , puesto que sólo tres de diecinueve pudieron relacionar a las funciones trigonométricas con sus gráficas y notan una dislexia tras la confrontación de dichos análisis.

Maldonado (2005) realiza un análisis didáctico de la función trigonométrica, encontrando que, antes de mencionar a la función trigonométrica como función real de variable real, la definen como razón que involucra a los ángulos medidos en grados, después realizan la conversión de estos ángulos a radianes en el círculo unitario y así presentar a la función real de variable real. Afirma que la relación radianes-reales no es explícita, y por tanto el estudiante no concibe la noción del concepto de función.

Montiel (2005), atiende al fenómeno didáctico relacionado con el tratamiento escolar de la función trigonométrica, de acuerdo al análisis realizado distingue seis etapas, las cuales proporcionan el proceso por el cual pasa la función trigonométrica para considerarse como una función real de variable real. A demás identifica conflictos que presentan los estudiantes:

- Como el procedimiento que consiste en dividir una entre otra las longitudes de dos lados de un triángulo (rectángulo) y que producen el seno o el coseno de un ángulo (agudo). Aunque a veces los alumnos aplicaban este procedimiento indebidamente a triángulos que no eran rectángulos o a ángulos que no eran agudos;

- Como coordenadas cartesianas de un punto en un círculo trigonométrico, esas coordenadas eran, para los alumnos, el coseno y el seno del «punto»;
- Como las funciones de una calculadora, funciones que proporcionaban, según los alumnos, el seno y el coseno de un número que expresaba la medida de un ángulo.
- Como las curvas de aspecto ondulado. Incluso algunos alumnos admitían que esas curvas seguían representando las mismas funciones cuando sufrían una rotación o un cambio de escala.
- Como una ecuación, aunque raramente recurrieron a ella y eran susceptibles de equivocarse cuando lo hacían.

Debe ser claro que si los conceptos iniciales no son aprehendidos de forma significativa por el estudiante, este hecho repercutirá necesariamente en la aprehensión o comprensión de los temas o contenidos subsecuentes de la asignatura.

A diferencia de las investigaciones anteriores, nos proponemos a realizar un estudio sobre los conceptos que anteceden al concepto de función trigonométrica, a fin de dar cuenta de las concepciones del estudiante y de inferir si dichas concepciones son pertinentes para la apropiación significativa del concepto de función trigonométrica.

### Marco teórico

Todo proyecto social de enseñanza y de aprendizaje se constituye dialécticamente con la identificación y designación de contenidos de saberes como contenidos a enseñar.

De esta manera el saber al transponerlo al aula sufre algunos cambios en donde el estudiante genera ciertas concepciones en cuanto al saber en juego. Los contenidos de saberes a enseñar (explícitamente: en los programas; implícitamente: por la tradición evolutiva, de la interpretación de los programas), en general preexisten al movimiento que los designa como tales. Sin embargo, algunas veces son verdaderas creaciones didácticas, suscitadas por las “necesidades de la enseñanza” (Chevallard, 1991).

Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los

objetos de enseñanza. El trabajo que transforma de un objeto de saber a enseñar a en un objeto de enseñanza, es denominado Transposición didáctica.

Chevallard dice que un objeto de saber se trata como tal, cuando se presenta como útil para la economía del sistema didáctico, el cual lo establece como:

*Nociones matemáticas*, que son considerados como objetos y herramientas de estudio, poseen propiedades y tienen ocasiones de uso, es decir, son objetos de enseñanza para un matemático (que están explícitamente en programas de estudio). Por ejemplo, nuestro objeto de estudio (elementos de trigonometría), son nociones tratadas como objetos de estudio y como herramientas para el estudio de la función trigonométrica.

*Nociones paramatemáticas*, éstas son nociones-herramientas de la actividad matemática las cuales son objeto de saber auxiliares que no son enseñados pero son necesarios para la enseñanza de los objetos matemáticos.

*Nociones protomatemáticas*, estas nociones son utilizadas implícitamente en la solución de algún problema y no son reconocidos ni como objetos de estudio, ni como herramientas para el estudio de otros objetos.

La transposición didáctica de las matemáticas y los requisitos se encuentran tendencialmente satisfechos a través de un proceso de preparación didáctica, es decir, la puesta en textos del saber.

Teniendo entonces que, una transmisión escolar burocrática supone en cuanto al saber:

- La división de la práctica teórica en campos de saber delimitados que den lugar a prácticas de aprendizaje especializadas, es decir, la desincretización del saber.
- En cada una de esas prácticas, la separación del saber y de la persona, es decir, la despersonalización del saber.
- La programación de de los aprendizajes y de los controles, según las secuencias razonadas que permitan una adquisición progresiva de los conocimientos expertos, es decir, la programabilidad de la adquisición del saber.

En cuanto a la transmisión, supone:

- La definición explícita, en comprensión y extensión, del saber a transmitir, es decir, la publicidad del saber.
- El control regulado de los aprendizajes según procedimientos de verificación que autoricen la certificación de los conocimientos expertos, es decir, el control social de los aprendizajes.

### Metodología

Dado que se pretende dar cuenta de la presencia de los elementos de la trigonometría, hacemos el análisis de programas de estudio así como de los libros de texto que se emplean para el estudio de los conceptos de trigonometría. Con base en el resultado del análisis realizado se diseñará un cuestionario con el objetivo de inferir sobre las concepciones que tienen los estudiantes, producto de la enseñanza. Finalmente, se confrontará lo expuesto por el estudiante en el cuestionario con lo expuesto en los libros de texto, planes y programas de estudio a fin de inferir sobre la concepción que queda en el estudiante tras la enseñanza-aprendizaje de los elementos de la trigonometría.

### Análisis de programas y libros de texto

#### Elementos de trigonometría en los programas de estudio

En el programa de estudios del plan 1993 de educación básica, se establece que las matemáticas son el producto de un intento por comprender y explicar los fenómenos que en este mundo ocurren, es decir, tratar de entender un fenómeno darle significado y justificarlo dando una explicación racional del por qué y cómo es que ocurre el mismo, considerando por ello a la enseñanza de las matemáticas de tal forma *que fomente en el estudiante la curiosidad y las actitudes que la hicieron posible y la mantienen viva* (p. 37), además de que debe de desarrollar habilidades operatorias, comunicativas y de descubrimiento, por tanto el producto de lo anterior, debe de ser el aprendizaje de las matemáticas, es decir *que el alumno adquiera seguridad y habilidad, capacidad de predecir y generalizar resultados, desarrollo gradual del razonamiento deductivo* (p. 37).

Los temas en el programa están agrupados en cinco áreas: Aritmética, Álgebra, Geometría (en el tercer grado se agrega trigonometría), Presentación y tratamiento de la información, Nociones de probabilidad.

Los conceptos considerados como elementos de trigonometría, es decir, los conocimientos previos al estudio de la función trigonométrica, en el programa son los siguientes:

- Razones trigonométricas de un ángulo agudo: seno, coseno, tangente, y sus recíprocas.
- Valores del seno, el coseno y la tangente para los ángulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$ . Uso de tablas (ejercicios de interpolación) y calculadora para otros ángulos agudos.
- Resolución de triángulos rectángulos y su aplicación a la solución de problemas: cálculo de distancias inaccesibles; del lado y la apotema de polígonos regulares.

En el último grado se presentan los conceptos de triángulos y cuadriláteros, círculo, semejanza, el teorema de Pitágoras.

El saber sigue la siguiente programabilidad en el tercer grado en el área de geometría: Triángulos y cuadriláteros, Círculo, Semejanza, Teorema de Tales en el triángulo y su recíproco; Criterios de semejanza de triángulos, el Teorema de Pitágoras, y finalmente lo que considera como elementos de trigonometría, mencionados anteriormente.

Algo de suma importancia es que el programa no está concebido como una sucesión de temas que deben agotarse uno a continuación del otro, si no que el profesor debe organizar el contenido de manera conveniente para su aprendizaje.

Podemos observar que los elementos de trigonometría siguen una programabilidad, por tanto cumple con uno de los requisitos cuando un saber se designa como saber a enseñar.

### Elementos de trigonometría en los libros de texto

En el análisis de los libros de texto se identificó lo que en estos es considerado como elementos de la trigonometría así como la estructura que tiene la presentación de los mismos.

Matemáticas 3 Briseño, L., Verdugo, J. (2006)

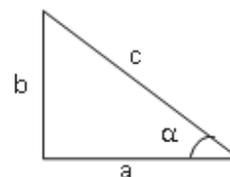
En este libro se consideran como elementos de la trigonometría los siguientes: Razones trigonométricas, Círculo unitario, Identidades trigonométricas, Razones trigonométricas de los ángulos  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$ . La estructura que se presenta para la enseñanza de estos conceptos se da de la siguiente manera:

Razón trigonométrica,

El seno es la razón  $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ , es decir,  $\sin \alpha = \frac{b}{c}$

El coseno es la razón  $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ , es decir,  $\cos \alpha = \frac{a}{c}$

La tangente es la razón  $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$ , es decir,  $\tan \alpha = \frac{b}{a}$



Continúan dando uno y sólo un ejemplo como: ¿Cuáles son las razones trigonométricas de un triángulo cuyos lados miden 6, 8 y 10 unidades?

Para finalizar la presentación de este concepto se propone una serie de ejercicios; cabe señalar que en la presentación de éstos, los datos del ejercicio ya son presentados en los lados y ángulos que corresponden del triángulo, el estudiante sólo tendría que operar. Este es el patrón en general que se sigue para la presentación de los conceptos restantes. Inferimos que este tipo de presentación pudiera causar dificultades en cuanto a la representación gráfica de un problema como:

Un cable tensor de 30 m de longitud, sostiene un poste de 18 m de altura ¿A qué distancia del pie del poste el ancla que sujeta el cable al piso si dicho cable forma con el piso un ángulo de  $37^\circ$ ?

En los libro sólo se pide que realice los cálculos necesarios y en este caso el estudiante tendría que representar gráficamente e indicar los valores en dicha representación para dar solución al problema.

### Razón trigonométrica

Seno. Es la razón entre la ordenada y la distancia al origen

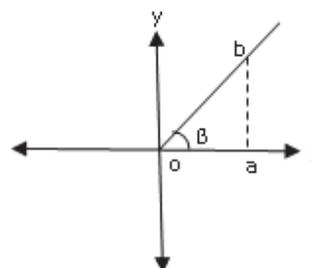
- $\sin \beta = \frac{b}{r}$

Coseno. Es la razón entre la abscisa y la distancia al origen.

- $\cos \beta = \frac{a}{r}$

Tangente. Es la razón entre la ordenada y la abscisa.

- $\tan \beta = \frac{b}{a}$



La definición de las razones trigonométricas están dadas con base en el plano coordenado.

La secuencia para la presentación de este concepto es presentar una definición, se da sólo un ejemplo y finalizan con ejercicios, sin embargo en el planteamiento de los ejercicios nuevamente se observa que los datos del problema y su representación gráfica se presentan en los lugares correspondientes, que al estudiante solo se habilita en la mecanización de las de las definiciones dadas.

### A manera de reflexión

Por una parte en el plan se afirma que el alumno debe adquirir seguridad y habilidad, capacidad de predecir y generalizar resultados, desarrollar gradualmente su razonamiento deductivo. Sin embargo, en los libros de texto los ejercicios orientan a quedarse en la algoritmización, limitando al estudiante de poder significar los conceptos necesarios para el estudio de la función trigonométrica, orillándolo a formarse conceptos carentes de significado y de esta manera no lograr la aprehensión del concepto, en este caso de función trigonométrica. Por tanto con este trabajo, al identificar las concepciones que los estudiantes tienen de los elementos de trigonometría, podremos contribuir a la mejora de la enseñanza y aprendizaje de la función trigonométrica.

### Referencias bibliográficas

- Araya, A., Monge A. y Morales, C. (2007). Comprensión de las Razones Trigonómicas: Niveles de Comprensión, Indicadores y Tareas de su Análisis. *Actualidades Investigativas en Educación* 7(2), 1-31. Obtenido en noviembre 6, 2007, de <http://revista.inie.ucr.ac.cr/articulos/2-2007/archivos/compression.pdf>
- Baldor, J. (1999). *Geometría plana y del espacio y trigonometría*. México: Cultural.
- Briseño, L., Verdugo, J. (2006). *Matemáticas 3*. México D.F., México.: Santillana.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 33 - 115.
- Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique.
- Maldonado, E. (2005). *Un análisis didáctico de la función trigonométrica*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.
- Martínez, J. y Rodríguez, P. (2005). *La didáctica y la cognición de los ángulos negativos y mayores de 360º y sus funciones trigonométricas*. Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero, México.
- Montiel, G. (2005) *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. Tesis de Doctorado no publicada, Cicata-IPN, México.
- Guerrero, L. S. (2006). *Tipos de concepciones sobre la naturaleza de las matemáticas, de su enseñanza y de su aprendizaje. Estudio con profesores en servicio*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.
- Higueras, L. R. (1998). *La noción de función: Análisis Epistemológico y Didáctico*. Jaén: Universidad de Jaén. Servicio de Publicaciones.
- SEP. (1993). *Plan y programas de estudio. Educación básica. Secundaria*. México: Secretaría de Educación Pública.