

VIII. El Aprendizaje de las Matemáticas

Luis Rico
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

1.- Currículo y aprendizaje de las matemáticas

La cuestión: ¿qué es el aprendizaje? interviene, de manera compleja, en la determinación del diseño y desarrollo del currículo. Esta cuestión genérica encierra un núcleo amplio de cuestiones importantes: ¿en qué consiste el aprendizaje?, ¿cómo se produce? ¿cómo aprenden niños y jóvenes?, el aprendizaje ¿es resultado de una evolución o efecto de la instrucción, o de ambas cosas?, ¿que función tiene una teoría del aprendizaje? Por lo que se refiere al campo específico de nuestra disciplina la pregunta básica se enuncia así: ¿cómo se caracteriza el aprendizaje de las matemáticas? Estas cuestiones, con uno u otro enunciado, se han venido planteando desde hace tiempo por los especialistas en educación matemática:

"(...) en lugar de plantearnos la pregunta general: "¿Cómo piensa la gente?", nos preguntamos: "¿Cómo piensa la gente en matemáticas?". En vez de preguntarnos: "¿Cómo se desarrollan los procesos de pensamiento de la gente?", nos preguntamos: "¿Cómo se desarrolla la comprensión de los conceptos matemáticos?". Queremos conocer qué proporción de experiencia y de intelecto hace posible aquello que llamamos *capacidad matemática*. (...) queremos saber no solamente cómo la ejecución humana adquiere habilidad, sino cómo la ejecución humana de habilidades matemáticamente significativas adquiere soltura, y cómo se integran dichas habilidades en el contexto de la resolución de problemas matemáticos" (Resnick y Ford, 1981; p. 15)

Todo currículo de matemáticas necesita estar basado en alguna teoría o esquema conceptual que permita dar respuesta fundada a cuestiones generales como las siguientes:

- ¿Cómo son las personas en el trabajo con matemáticas?
- ¿Cómo se desarrolla la comprensión de los conceptos matemáticos?
- ¿En qué consiste la capacidad matemática?

Por ello, destacamos el interés de fundamentar el currículo en alguna teoría del aprendizaje y enfatizamos la consideración cognitiva del conocimiento matemático así como la interpretación y tratamiento de los problemas de aprendizaje relativos a este conocimiento. Las revisiones de los teóricos del currículo ponen de manifiesto el interés que tiene la psicología del aprendizaje para la selección de objetivos (Tyler); para la selección y ordenación del contenido y para la elección de experiencias de aprendizaje (Taba); para seleccionar el contenido, desarrollar una estrategia de enseñanza y diagnosticar los puntos fuertes y débiles de los estudiantes (Stenhouse); para complementar y fundamentar la teoría curricular (Gimeno); y para considerar y organizar el conjunto de experiencias de aprendizaje de los jóvenes en edad escolar (Pérez). Los procesos de aprendizaje de las matemáticas también se consideran como procesos fundamentales que regulan las actuaciones y relaciones de los agentes implicados en la puesta en práctica del currículo de matemáticas, y sirven de hilo conductor a la reflexión que allí se realiza.

En la revisión de investigaciones curriculares se pone de manifiesto que el núcleo principal de las mismas lo constituyen las relativas a enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, siendo difícil diferenciar entre ambas componentes. De hecho, los estudios sobre cognición matemática (Kilpatrick y Neshier, 1990) constituyen uno de los campos de indagación sobre educación matemática más productivos; nuestro trabajo en la línea de investigación *Pensamiento Numérico* (Rico, 1996) también se propone considerar la dimensión cognitiva como una de sus componentes básicas. Pero es en el estudio de Coll (1987) donde quedan recogidas con mayor extensión y profundidad las nociones teóricas sobre aprendizaje en las que debe sustentarse un plan de formación educativa. Los principios psicológicos generales considerados por Coll se organizan y estructuran para justificar una propuesta de diseño curricular y para establecer niveles de concreción del currículo.

Igualmente, en la discusión sobre los fines de la educación matemática se plantean las necesidades de desarrollo y aprendizaje de los niños y jóvenes como unos de los ejes que ar-

ticulan la organización de cualquier currículo, en particular, los currículos de matemáticas. Con estas cuestiones aparece la complejidad del campo de estudio: por un lado, hay que conocer la estructura matemática del conocimiento y, por otro, cómo las personas piensan, razonan y emplean sus capacidades para adquirir, utilizar y controlar esos conocimientos.

El concepto de aprendizaje carece de un significado unívoco y preciso. Son muchos los fenómenos que pueden considerarse como fenómenos de aprendizaje, pero no hay acuerdo en la caracterización de un proceso psicológico definido con el que el concepto se identifique. Desde un punto de vista empírico el concepto de aprendizaje se refiere a la determinación de la conducta por la experiencia. Desde una perspectiva educativa se considera que el aprendizaje, en general, viene a ser un cambio más o menos permanente de la conducta que se produce como resultado de la práctica (Beltrán, 1993). El aprendizaje escolar implica siempre adquisición de conocimientos y construcción de significados; el aprendizaje implica actividad cognitiva, que es inseparable del medio cultural y tiene lugar en un sistema interpersonal de modo que, a través de las interacciones establecidas, los niños aprenden los instrumentos cognitivos y comunicativos de su cultura. Es usual distinguir entre aprendizaje y actuación; el aprendizaje se conceptualiza como una observación que no se identifica con la cosa observada misma, en este caso con la conducta aprendida (Santillana, 1991). Por instrucción se ha entendido usualmente la educación intelectual; en la actualidad la instrucción se vincula con todo proceso de enseñanza-aprendizaje, poniendo atención en el análisis de los componentes, factores, proceso, estrategias, condiciones y contextos que intervienen en la secuencia global de tales procesos. Si las teorías del aprendizaje describen cómo ocurren los mecanismos psicológicos que afectan a los diferentes procesos de aprendizaje en situaciones educativas, las teorías instruccionales nos indican cómo se puede influir para que los alumnos aprendan.

2.- Aportaciones de la psicología al currículo de matemáticas

Además de las dificultades que surgen al considerar las dimensiones culturales y conceptuales del conocimiento matemático, también conviene considerar aquellas otras que surgen de la dimensión individual en la construcción de ese conocimiento. Nos referimos en este caso a las dificultades que encontramos en los fenómenos del aprendizaje. Para abordar los problemas que surgen al analizar los procesos de aprendizaje de las matemáticas, y dar respuesta a algunas de las cuestiones planteadas, contamos con las teorías del aprendizaje. Una teoría del aprendizaje, en términos generales, es una hipótesis sobre el modo en que los sujetos actúan para construir su conocimiento, bien por apropiación de ideas que reciben o bien por elaboración propia. Las expectativas que generan estas hipótesis establecen cuáles elementos y relaciones van a destacarse para un determinado conocimiento, cómo se va a presentar a los sujetos, qué se espera que el sujeto haga con la información que se le proporciona, qué procesos se supone se van a desencadenar y, en definitiva, qué tipo de actuaciones se pretenden generar y cuál va a ser el modo en que se controle si la integración de nuevos conocimientos ha tenido lugar y si ello se ha hecho adecuadamente.

Una teoría del aprendizaje debe prever, con carácter general, que la adquisición de conocimiento (en particular, de conocimiento matemático) no es un proceso lineal y mecánico; sus hipótesis deben contemplar los modos o causas por los que el proceso de aprendizaje no llega a tener efecto. De hecho, cada teoría del aprendizaje, al establecer unas condiciones para el mismo, singulariza aquellos factores que pueden impedirlo. Tendríamos así un tipo de dificultades intrínsecas al propio aprendizaje. En este sentido, una teoría del aprendizaje también es un instrumento de análisis que permite establecer cuáles han sido los impedimentos por los que un sujeto no ha integrado unos conocimientos, es decir, permite determinar las dificultades relativas al propio proceso de aprender.

Tradicionalmente, el conocimiento matemático ha mostrado resistencias específicas durante el proceso de su transmisión y su adquisición por alumnos concretos. Algunas de las más destacables han sido abordadas como problemas específicos (Resnick y Ford, 1981), entre las que señalamos los siguientes.

En primer lugar, *la contraposición entre la habilidad de ejecución en tareas matemáticas y la capacidad de comprensión de los procedimientos y conceptos implicados*. Uno de los temas que ha ocupado a la psicología de las matemáticas desde antiguo es la relación entre habilidad de cálculo y comprensión matemática, cuyo ejemplo paradigmático está en el dominio y empleo de las operaciones aritméticas. Algunos autores, entre ellos los asociacionistas, creían que la habilidad de cálculo era anterior a la comprensión; otros, como Bruner o los gestaltistas,

opinaban que la comprensión servía de base al desarrollo de la habilidad de cálculo. Por esta vía las relaciones entre habilidad y comprensión nunca se llegaron a poner en claro. El punto de vista actual, que está dando lugar a un amplio plan de investigaciones, consiste en estudiar cómo influye la comprensión sobre la adquisición de rutinas y, recíprocamente, cómo puede modificarse la comprensión matemática de los individuos mediante la práctica de habilidades de cálculo. El moderno planteamiento distingue entre conocimiento conceptual o declarativo y conocimiento procedimental, y es una aproximación teórica para abordar con mayor profundidad el complejo nudo de relaciones entre comprensión y ejecución de tareas matemáticas.

En segundo lugar podemos señalar el problema de *la transferencia de los aprendizajes y el papel que la práctica desempeña*. La práctica sirve, fundamentalmente, para automatizar los componentes de un procedimiento, logrando mayor eficacia y seguridad en su ejecución, por un lado, y, por otro, proporcionando más espacio en la memoria de trabajo, al liberarla del control de los pasos mecanizados. La memoria tiene así la posibilidad de explorar el entorno de la tarea propuesta, buscando y detectando otras regularidades que faciliten la ejecución del procedimiento que lleva a su resolución. Muchas de las tareas más rutinarias son realizadas hoy día por calculadoras o microordenadores, permitiendo a los sujetos centrarse en cuestiones más relevantes de las tareas propuestas. ¿Existen modos preferentes de dirigir la práctica que mejoren la probabilidad de que se produzca la invención de procedimientos más útiles y abreviados? Este es, de nuevo, uno de los problemas claves en el aprendizaje de las matemáticas, ya que se trata no sólo de conseguir una ejecución eficaz y fiable de las destrezas operatorias sino de lograr que estas habilidades faciliten el desarrollo de la comprensión y su empleo en la adquisición de nuevos conocimientos. En definitiva, se trata de saber cómo organizar la práctica para optimizar el aprendizaje.

En tercer lugar consideramos el problema general del *papel que desempeñan las representaciones mentales en el aprendizaje*. Esta es una cuestión amplia, que incluye las imágenes mentales con las que los niños, jóvenes y adultos se representan los conceptos y relaciones matemáticas; los símbolos, gráficos, esquemas y diagramas; y, finalmente, los modelos físicos y el material concreto, estructurado o no estructurado. Parece claro que los conceptos y relaciones matemáticas tienen un tipo de representación mental, convencional o no convencional. Estas representaciones desempeñan el papel de modelos intuitivos, que se pueden utilizar para trabajar adecuadamente sobre tareas en las que aparece o en las que hay que emplear el concepto en cuestión. El uso de modelos está bastante extendido en matemáticas y permite salvar las dificultades que surgen por las diferencias entre el razonamiento intuitivo y el abstracto, el implícito y el explícito, el paradigmático y el analógico. De especial interés en el aprendizaje escolar resultan las metáforas físicas para los conceptos matemáticos, es decir, representaciones físicas que permiten una manipulación directa de materiales, de tal manera que ayudan a asociar procedimientos de ejecución con los conceptos matemáticos de base. No están aún claras cuáles son las condiciones de una buena representación mental para un concepto matemático; en particular, tampoco está resuelta la cuestión de hasta qué punto, un material concreto aporta una representación física útil.

Una cuarta cuestión, que señala una fuente de problemas en el aprendizaje de las matemáticas, es *la contraposición entre la elaboración del conocimiento matemático por parte de cada sujeto o su recepción, ya elaborada, de otras personas*. La psicología cognitiva establece como uno de sus supuestos que el nuevo conocimiento es elaborado en gran parte por el aprendiz. Los estudiantes no se limitan a añadir mera información a su fondo de conocimientos; por el contrario, deben conectar la nueva información con las estructuras del conocimiento ya existentes, y elaborar nuevas relaciones entre esas estructuras. La construcción de nuevas relaciones parece esencial en el aprendizaje. Pero son aún muchas las cuestiones que quedan por resolver para tener claro cómo se conecta el hecho de recibir u oír información matemática y construir procedimientos que aprovechen esa información y la vinculen con estructuras de conocimiento ya existentes. Dicho en otros términos: ¿Cuáles son los procesos por los que lo que nos dicen o muestran se integra en estructuras del conocimiento ya establecidas?, ¿cómo se realiza esa integración?, ¿qué conexiones se producen?, ¿se puede facilitar el proceso de elaboración de conexiones?.

Una quinta y última cuestión, también de carácter general, es la relativa a las *diferencias entre los sujetos en relación con su conocimiento matemático*. Se trata en este caso del prob-

lema de la aptitud para las matemáticas. Es un hecho fácilmente observable que, cuando se propone una misma tarea a distintos sujetos, siempre encontramos respuestas diferentes en la realización de la tarea, independientemente de cómo se hayan seleccionado los sujetos, y por muy homogénea que resulte la muestra en relación con las capacidades generales de aprendizaje. ¿A qué son debidas estas diferencias? ¿Se pueden atribuir las diferencias a características individuales estables, o son el resultado de un estado momentáneo del conocimiento y práctica del individuo en relación con una tarea dada? Las condiciones de no equidad en el sistema social escolar, ¿producen diferencias acusadas en aprendizaje de las distintas minorías sociales?. No es mucho aún lo que se conoce sobre diferencias individuales y las discusiones sobre el tema no están exentas de un marcado carácter ideológico o polémico. Resulta necesario poner de manifiesto, si es que existen, los tipos de estructuras del conocimiento que caracterizan a los individuos con mayor éxito en la adquisición de nuevos conceptos o habilidades. También habrá que señalar las características de los procesos de aprendizaje para aquellos sujetos que recorren el currículo de matemáticas más eficaz y rápidamente que los demás. Clarificar estas cuestiones va a permitir abordar con mayor conocimiento los problemas de aprendizaje en matemáticas de sujetos concretos.

Estos núcleos de problemas o cuestiones relativas al aprendizaje de las matemáticas surgen, fundamentalmente, desde el campo de la psicología ya que el énfasis está en los procesos de aprendizaje. Estos núcleos son especificaciones de cuestiones generales, que han preocupado por igual a lo largo de la historia a educadores y matemáticos, a pensadores y psicólogos. La Psicología de la Educación, como campo disciplinar aporta, o debe aportar, las herramientas teóricas y prácticas necesarias para gestionar este cúmulo de cuestiones y problemas que se presentan durante los procesos de enseñanza- aprendizaje de las matemáticas y que, por tanto, condicionan la planificación y desarrollo del currículo de matemáticas.

En el proceso de aprender no podemos aislar al sujeto y al conocimiento en estado puro y aséptico. Los procesos de aprendizaje que nos interesan son los que se producen en el Sistema Educativo y, en este caso, la acción del sujeto está condicionada por el medio social (el entorno); también hay que contemplar al profesor, con el que el alumno interactúa, que trata de promover la formación integral del alumno y, en particular, la adquisición e integración de los conocimientos mediante la enseñanza. Todas estas aproximaciones y estudios son, por tanto, aportaciones necesarias al currículo de matemáticas que provienen del campo de la psicología.

3.- Psicología y Currículo. C. Coll (1986)

Este autor considera necesario destacar algunas de las aportaciones de la psicología al currículo y, en general, a la educación escolar. Comienza por reconocer la inexistencia de un marco teórico unificado que, desde el campo de la psicología, dé explicación coherente y completa a las complejas relaciones del crecimiento intelectual de las personas con las actividades educativas escolares. No obstante, establece que es posible seleccionar un conjunto de teorías y explicaciones que participan de una serie de principios comunes. Los enfoques cognitivos que determinan su marco de referencia son los siguientes:

- 1º la *teoría genética* de Piaget y colaboradores de la escuela de Ginebra;
- 2º la *teoría de la actividad* en la formulaciones de Vygotsky, Luria y Leontiev;
- 3º la ampliación de las teorías anteriores en la *Psicología Cultural*, formulada por Cole;
- 4º la *teoría del aprendizaje verbal significativo* de Ausubel y su ampliación en la *teoría de la asimilación* de Mayer;
- 5º las *teorías de los esquemas*, basadas en el procesamiento humano de la información, formuladas por Anderson, Norman, Rumelhart y Minsky, entre otros;
- 6º la *teoría de la elaboración*, de Merrill y Reigeluth.

Estos enfoques comparten una serie de principios generales, que el autor utiliza discrecionalmente para realizar la fundamentación psicológica de su propuesta de Diseño Curricular. Tales principios, en forma resumida, son los siguientes:

1. El nivel de desarrollo operatorio de cada uno de los alumnos condiciona el impacto de las experiencias educativas convencionales sobre su crecimiento personal.
2. Igualmente, el impacto de las experiencias educativas formales sobre el crecimiento personal de cada alumno está condicionado, en cada caso, por sus conocimientos previos.
3. Hay que tener en cuenta simultáneamente los dos aspectos anteriores cuando se quiere considerar el nivel del alumno para la elaboración y aplicación del Diseño Curricular.
4. Es necesario establecer una diferencia entre aquello que el alumno es capaz de hacer

y aprender por sí mismo y lo que es capaz de hacer y aprender con la ayuda de otras personas.

5. Hay que asegurar que los aprendizajes sean significativos; el alumno construye la realidad atribuyéndole significados.

6. Hay dos condiciones para el aprendizaje significativo. El contenido debe ser significativo tanto por su estructura interna (significatividad lógica) como por su posible asimilación (significatividad psicológica). En segundo lugar, el alumno debe tener una actitud favorable para el aprendizaje significativo.

7. Los aprendizajes deben ser funcionales, es decir, se han de utilizar en la práctica cuando las circunstancias lo demanden.

8. El proceso de aprendizaje requiere una intensa actividad por parte del alumno para establecer relaciones entre el nuevo contenido y los elementos ya disponibles en su estructura cognoscitiva.

9. El papel de la memoria es fundamental en los procesos de aprendizaje. El desarrollo de la memoria comprensiva es un objetivo de la educación escolar.

10. También es objetivo de la educación escolar el desarrollo de la capacidad de realizar aprendizajes significativos con autonomía, en una diversidad de situaciones.

11. La estructura cognoscitiva de los alumnos puede interpretarse como un conjunto de esquemas de conocimiento. La nueva información adquirida en cada caso se almacena en la memoria mediante su incorporación y asimilación a uno o más esquemas.

12. Objetivo de la educación escolar es la modificación de los esquemas de conocimiento de los alumnos: su revisión, enriquecimiento, diferenciación, construcción y coordinación.

13. En la base de los procesos de crecimiento personal que trata de promover la educación se encuentra la actividad mental constructiva de los alumnos. La interpretación constructivista del aprendizaje escolar hace igualmente necesaria una interpretación constructivista de la intervención pedagógica.

4.- Aportaciones de la Psicología a la Educación Matemática.

La Psicología ha hecho aportaciones importantes a la Educación Matemática; en este apartado vamos a presentar y comentar tres áreas de dominio psicológico que tienen influencia destacable y contribuyen al avance de la Educación Matemática, señalando algunas de sus características más significativas para nuestra materia en cada caso. Nos vamos a referir a:

* *La psicología cognitiva y el modelo de procesamiento de la información.*

* *Psicología de la Educación.*

* *Constructivismo.*

5.- Psicología cognitiva. Modelo de procesamiento de la información.

En este apartado seguimos las ideas y el planteamiento de Mayer (1981).

Por **Psicología cognitiva** se entiende el análisis científico de los procesos mentales y estructuras de memoria humanas con el fin de comprender la conducta humana.

“Análisis científico” -alude al cómo-. No podemos observar los sucesos mentales privados, sólo pueden inferirse a partir de la conducta de alguien. Los psicólogos cognitivos tienen que diseñar métodos científicos para observar la vida mental indirectamente. Los principales instrumentos de la psicología cognitiva son técnicas de análisis que permiten dividir las actividades globales de la mente en componentes que se puedan medir.

“Procesos y estructuras mentales”. La psicología cognitiva estudia lo que ocurre dentro de la cabeza de una persona cuando realiza una tarea determinada -es decir, procesos mentales- y el modo en que la persona almacena y utiliza su conocimiento para realizar la tarea - es decir, las estructuras mentales-.

“Comprender la conducta humana”. El objetivo de la psicología cognitiva es describir los sucesos cognitivos con claridad y precisión, para predecir y comprender mejor la conducta humana.

La psicología cognitiva se caracteriza porque su objeto de conocimiento es la actividad racional o mental humana, su método es el análisis científico de las estructuras y procesos mentales y su objetivo es comprender la conducta humana.

La actividad matemática es un caso de actividad racional humana, con características bien definidas, que resulta especialmente adecuada para el análisis científico y que forma parte del campo de interés de la psicología cognitiva.

Entre los precedentes de la psicología cognitiva tenemos el conductismo, con el que conviene señalar y establecer diferencias claras. El conductismo tiene como objetivo comprender

la conducta humana pero, a diferencia de la psicología cognitiva, nunca intenta comprender ni estudiar los procesos internos que subyacen a la conducta. Sin embargo, se atiene a los métodos rigurosos de la ciencia, aún cuando las técnicas específicas son distintas. Finalmente, reduce su objeto al estudio de las leyes de la conducta, y no estudia los sucesos que no son observables directamente. El conductismo ha tenido una influencia considerable en los primeros estudios e investigaciones en Educación Matemática, así como en la fundamentación psicológica de los procesos de instrucción, influencia que aún hoy día es fácil detectar.

5.1.- Instrumentos de la psicología cognitiva. Cuatro de los instrumentos más importantes en psicología cognitiva, para el estudio de la conducta humana, son los siguientes:

i. Análisis del sistema de procesamiento de información. Se basa en la idea de que las personas somos procesadores de información: recibimos información, modificamos la información mediante una operación mental, aplicamos la información mediante una operación mental, aplicamos otra operación que la vuelve a modificar, y así sucesivamente hasta que se llega a un resultado disponible para almacenar en la memoria o para generar una conducta específica.

El modelo de procesamiento de la información hace referencia a las diferentes organizaciones a que se somete la información a medida que pasa a través del sistema.

ii. Análisis de Procesos Cognitivos. Esta técnica de análisis consiste en elegir una tarea intelectual, observar a una persona cómo resuelve el problema y preguntarle sobre lo que hace, analizar el proceso en pequeñas partes consistentes en procesos (manipulación de cosas) y decisiones (comprobaciones de algo); después hay que confrontar el modelo de proceso que se ha construido con la conducta humana real. El modelo procesal de la tarea estudiada debe poder escribirse en forma de un programa de ordenador, de un diagrama de flujo, o de algún otro modo.

iii. Análisis de estructuras cognitivas. Existen técnicas para representar el conocimiento de una persona que conoce una historia u otro tipo de información verbal. La información se analiza en función de grandes apartados y de las relaciones entre ellos; seguidamente se compara el modelo estructural con las actuaciones reales de los sujetos.

iv. Análisis de estrategias. El cuarto de los principales instrumentos de la psicología cognitiva está relacionado con la investigación de las técnicas que utilizan las personas para controlar los diferentes fragmentos de información que poseen. Estas técnicas se conocen con el nombre de estrategias cognitivas.

Veamos más en detalle algunas características de estos cuatro instrumentos y algunas contribuciones realizadas a la Educación Matemática.

5.2.- Procesamiento de la información.

El instrumento cognitivo más útil para explicar y estudiar el problema de las diferencias en las aptitudes es el modelo general del procesamiento de la información. Idea fundamental es que todos los seres humanos están equipados básicamente con el mismo sistema de procesamiento de información (SPI).

Los componentes principales del sistema de procesamiento son:

i. Almacén sensorial a corto plazo (ASCP). Tiene una capacidad de memoria grande o ilimitada; el modo de almacenamiento es exacto y sensorial; la duración es muy breve ya que se desvanece en medio segundo.

ii. Memoria a corto plazo y memoria en funcionamiento (MCP-MF). Tiene una capacidad limitada (7 "chunks"); la información se transforma y se almacena por repetición y repaso; la duración es mayor: unos 18 sg. sin repaso; la información se pierde por falta de repaso o por desplazamiento debido a nueva información.

iii. Memoria a largo plazo (MLP). Tiene capacidad ilimitada; el modo de almacenamiento es organizado y significativo; la duración se supone permanente y por ello no se contempla la pérdida de la información sino el fallo en la recuperación o la interferencia de otras informaciones.

Analizar las aptitudes en términos de los componentes del sistema de procesamiento de la información consiste en analizarlas en términos de las características de los almacenes de memoria y los procesos que intervienen en la ejecución de una tarea determinada.

El modelo de procesamiento de la información se ha aplicado al estudio de una variedad de tareas tales como estudios sobre Atención, Discriminación, Reconocimiento de Patrones, etc. Entre las aplicaciones de interés para las matemáticas se encuentran los estudios relativos a tareas de inducción, que pasamos a describir brevemente, siguiendo a Pellegrino.

Se entiende por Inducción el desarrollo de reglas, ideas o conceptos generales a partir de grupos específicos de ejemplos. Al analizar semejanzas y diferencias entre experiencias específicas se extraen las características generales de las clases de objetos, sucesos y situaciones. Se aplican estas generalizaciones a nuevas experiencias, se refinan y modifican y así pasan a formar parte de nuestra base de conocimientos permanentes.

Tareas de inducción: Todas las tareas de razonamiento inductivo tienen la misma propiedad básica. Se presentan un grupo de estímulos a un sujeto y su tarea consiste en inferir el modelo o regla estructural, de forma que se pueda generar o seleccionar una continuación apropiada del modelo.

Se dan una variedad de tareas diferentes: clasificaciones, series incompletas, analogías y matrices. En las tareas de inducción se trabaja también sobre una variedad de contenidos: letras, números, palabras, figuras.

El procesamiento de la información aborda el estudio de las tareas de razonamiento inductivo planteando tres cuestiones generales:

1º. ¿Cuáles son los procesos psicológicos básicos implicados en la resolución de problemas de razonamiento inductivo?

La respuesta consiste en proponer una hipótesis sobre cuáles son los procesos mentales necesarios para enfrentarse al contenido y a la estructura de un problema. Parte de la hipótesis debe incluir suposiciones sobre la secuencia en que se presentan o ejecutan los procesos y proponer un esquema interpretativo teórico.

2º. ¿Cuáles son las predicciones de las hipótesis y el esquema teórico asociado y cómo podemos probar su validez?

Normalmente, la hipótesis debe basarse en una teoría que proporcione predicciones explicativas sobre las diferencias entre tareas de inducción. Se pueden hacer experimentos para falsar esa teoría. Se debe conseguir una teoría que explique y prediga el rendimiento.

3º. ¿Cómo se diferencian las personas?

La teoría debe proporcionar una base para analizar detalladamente las diferencias individuales en velocidad y seguridad de ejecución.

Veamos el modo en que el procesamiento de la información ha hecho el estudio de un tipo concreto de razonamiento inductivo: las series numéricas incompletas.

Se consideran tres componentes en el proceso de completar series:

* Primera componente: detección de relaciones; hay que examinar la serie y emitir una hipótesis de cómo un elemento de la serie está relacionado con otro. En series de letras hay tres relaciones básicas: identidad, continuidad, precedencia. En series de números hay mayor variedad de relaciones: tipo de operación, variación en la magnitud de la operación, combinación de operaciones.

* Segunda componente: descubrimiento de la periodicidad. La longitud del periodo es el número de elementos que constituyen un ciclo completo del modelo en el que actúan las relaciones detectadas. Hay dos enfoques para descubrir la periodicidad de las series:

i. enfoque adyacente: se descubre el periodo observando las interrupciones regulares en las relaciones entre elementos adyacentes.

ii. enfoque no adyacente: se descubre la longitud del periodo observando algún intervalo regular en el que se repita una relación.

* Tercera componente: finalización de la descripción del modelo.

Localizado el periodo - su longitud- hay que determinar las relaciones establecidas entre las restantes posiciones dentro del periodo, se llega así a definir de forma completa la regla de la secuencia.

* Cuarta Componente: extrapolación.

Los resultados obtenidos de los estudios realizados sobre la base del modelo anterior han aportado las siguientes evidencias:

La solución de un problema de series no puede subdividirse en tiempos discretos para cada uno de los diferentes componentes. Uno de los factores más importantes que afectan a la exactitud de la solución de problemas de series numéricas es el número de espacios de la memoria que se necesitan para representar el modelo de un ítem.

La capacidad para manejar grandes cantidades de información y reglas más complejas también puede ser atribuible a diferencias en los conocimientos. Los adultos son más capaces en el manejo de reglas numéricas más complejas. Los niños presentan un mejor rendimiento en problemas de series basados en relaciones de adición y sustracción que en los que se

basan en relaciones de multiplicación y división. Los problemas de series incompletas son índices sensibles de la capacidad de resolución de problemas y de razonamiento inductivo.

El razonamiento inductivo es un elemento destacable en el razonamiento matemático, por ello el estudio de los procesos psicológicos implicados en la resolución de series incompletas, en particular, y de analogías, en general, tienen interés para el conocimiento e interpretación del razonamiento matemático. El procesamiento de la información aborda el problema de las habilidades y procedimientos mediante el diseño de modelos para los procesos cognitivos.

5.3.- Modelos de procesos cognitivos.

Según el enfoque cognitivo las personas no aprenden conductas directamente, sino que adquieren procedimientos de orden superior o sistemas de reglas que se utilizan para generar conductas en múltiples situaciones. Para abordar el problema de las habilidades de procedimiento los psicólogos han tenido que desarrollar instrumentos rigurosos que permitieran analizar un proceso cognitivo en sus partes; y han aplicado con éxito técnicas diferentes para analizar formalmente y especificar el conocimiento procedimental que utiliza una persona ante un problema dado.

Hay dos formas útiles de representar el conocimiento procedimental: escribir un programa y dibujar diagramas de flujo. Un programa es una lista de cosas que hay que hacer, empezando desde arriba y siguiendo paso a paso las instrucciones.

Las técnicas de análisis de procesos cognitivos se han empleado con éxito al estudio de cómo los niños ejecutan procedimientos aritméticos, permitiendo prever, detectar, diagnosticar y corregir errores en la ejecución de tareas algorítmicas en aritmética. El enfoque cognitivo contempla el aprendizaje como la adquisición de procedimientos cada vez más potentes. Este enfoque es bastante prometedor respecto del tipo de cambio que es necesario introducir en el modo de llevar a cabo la instrucción escolar.

5.4.- Modelos de Estructuras Cognitivas.

El problema del conocimiento verbal. Gran parte de lo que sabemos sobre el mundo nos llega como información verbal. Cuando escuchamos o leemos información verbal siempre tendemos a recordar algo u olvidar algo y también a añadir y cambiar cosas. ¿Cuál es el proceso por el que adquirimos nueva información verbal? ¿Cómo lo almacenamos en la memoria? Estas preguntas constituyen lo que podría llamarse el problema del conocimiento verbal.

El enfoque cognitivo del problema del aprendizaje verbal consiste en intentar analizar este conocimiento verbal en sus partes e indicar la estructura en la que se enlazan éstas. Por ello, un modelo estructural del conocimiento verbal de una persona consiste generalmente en elementos y relaciones entre esos elementos. Dos de las técnicas más útiles para representar el conocimiento verbal son las redes y los árboles. Una red es un diagrama en el que los elementos principales se señalan mediante cuadros u óvalos y las relaciones entre ellos se indican con flechas. Un árbol es un diagrama que comienza en un nivel superior, se ramifica en un segundo nivel, este a su vez, se ramifica en un tercero, etc.

Una variante de la representación mediante red es la del mapa conceptual, elaborada por Novak y Gowin, que viene utilizándose recientemente con éxito para representar y analizar el conocimiento declarativo que tienen las personas en relación con el dominio conceptual del conocimiento matemático. Esta técnica permite establecer los núcleos o unidades informativas de que dispone un sujeto en relación con un contenido concreto y las relaciones que es capaz de establecer entre ellas. Las ausencias o carencias en la representación permiten detectar posibles fallos o lagunas en el dominio conceptual correspondiente. Un ejemplo de mapa conceptual sencillo puede verse en el apartado II.3.2.3, relativo a la noción de currículo.

5.5.- Modelos de estrategias cognitivas.

Las personas suelen disponer de varias estrategias alternativas para abordar tareas complicadas de resolución de problemas. Especificar con claridad cuáles son esas estrategias (también llamadas heurísticas) y cómo se utilizan, es una de las tareas de los psicólogos cognitivos. Lo podemos llamar el problema de las estrategias. Los primeros trabajos sobre el problema de las estrategias se basaban en observaciones informales de personas cuando resolvían problemas. Una de las observaciones más comunes era que las personas tienden a pasar por una serie de fases antes de alcanzar la resolución de problemas matemáticos muy similares a las señaladas por algunos psicólogos previamente. Los psicólogos de la Gestalt observaron que las personas se fijaban metas parciales para resolver problemas. Duncker constató que las personas primero tienden a fraccionar los problemas en metas parciales y

después intentan acceder a esas metas parciales o submetas.

Polya también se dio cuenta de que cuando un problema parece muy difícil de resolver, una buena estrategia es fraccionarlo en pequeños problemas que sí admiten solución. Sin embargo, los instrumentos analíticos pertinentes para predecir y describir con claridad las estrategias en la ejecución de problemas eran un tanto vagos hasta la revolución cognitiva, si bien la obra de Polya y otros autores sacaron a la luz ideas interesantes, estimulando a los psicólogos para trabajar en este tema.

Con el enfoque cognitivo, a principio de los años cincuenta se construyeron ordenadores capaces de resolver problemas muy diversos. Para dotarlos de programas que resolvieran problemas, los ordenadores necesitaban varias cosas: un conjunto de procedimientos para acceder a objetivos, un conjunto de estrategias generales, o heurísticas, que controlaran el proceso de resolución de problemas.

Para resolver un problema con ordenadores se requerían descripciones muy precisas de heurísticas; para describir las estrategias de los humanos podrían utilizarse, en principio, los mismos instrumentos de análisis que se estaban utilizando para estudiar las estrategias de los ordenadores. Uno de los programas de ordenador más conocidos, relacionados con este tema, fue el Solucionador General de Problemas (SGP), de Ernst, Newell y Simon, que supuso una ruptura con los planteamientos limitados anteriores.

Pensamos cómo se puede representar la estrategia de resolución de problemas de una persona. Para comprender cómo lo hace el SGP hay que considerar dos ideas. La primera es que el problema tiene que representarse en un "espacio del problema". El espacio del problema contiene el estado actual del problema, el estado final (o meta) del problema y todos los estados intermedios. El espacio del problema puede tener multitud de caminos inútiles y callejones sin salida.

La segunda idea es que la resolución de un problema conlleva una búsqueda dirigida por el objetivo, a través del espacio del problema. En nuestro caso, la solución del problema consiste en encontrar el recorrido correcto desde el estado inicial al estado final, pasando por algunos de los estados intermedios. El aspecto a resaltar aquí es que el proceso de búsqueda está dirigido por una meta.

A la estrategia básica de búsqueda en el espacio del problema del SGP se la denomina análisis medios-fines. El análisis medios-fines no es más que una de las estrategias posibles que puede utilizar una persona, pero es una de las más generales y de las más potentes. El análisis de medios-fines trabaja a partir de un espacio del problema muy bien especificado; tienen que estar definidos todos los estados posibles y todos los operadores. Después el solucionador de problemas genera metas y hace ensayos para encontrar operadores que puedan satisfacer cada meta; si no puede acceder a una meta determinada creará una submeta; nunca podrá trabajar con más de una submeta simultáneamente.

El SGP utiliza tres submetas generales para llevar a cabo el análisis medios-fines. Pueden usarse repetidamente en un problema, pero nunca más de una a la vez. Las tres submetas generales son:

1. Transformar el estado A en el estado B. Para acceder a esta submeta hay que comparar el estado A con el estado B; si son iguales, ya se ha conseguido pero si son diferentes hay que especificar claramente cuál es la diferencia D.
2. Reducir la diferencia D entre el estado A y el estado B. Una vez localizada la diferencia, para reducirla hay que aplicar algún operador Q apropiado.
3. Aplicar el operador Q al estado A. Para ello debemos considerar si el operador Q es adecuado para el estado A; cuando esto ocurre lo aplicamos y damos lugar a un estado A'.

Hay dos instrumentos importantes que se pueden utilizar para resolver la cuestión de las estrategias. Estos instrumentos, son: una técnica para especificar el espacio del problema y una técnica para especificar la estructura de metas del problema.

Las submetas e instrumentos anteriores se han empleado con éxito para simular las diversas estrategias posibles en la resolución de algunos problemas. El caso más conocido es el análisis del problema de la Torre de Hanoi, pero hay muchas otras aplicaciones a tareas específicamente matemáticas. Cuanto más se avanza en la descripción de heurísticas generales potentes, más cerca se está del diseño de métodos para enseñar directamente estas técnicas a los principiantes.

6.- Aportaciones de la Psicología de la Educación.

La Psicología de la Educación trata de la aplicación de los principios y explicaciones de la Psicología a la teoría y la práctica educativas. Coll expresa las diferentes opciones que

pueden surgir de este planteamiento general:

“Por un lado, es posible entender la Psicología de la Educación como una simple etiqueta que sirve para designar la amalgama de explicaciones y principios psicológicos que son pertinentes y relevantes para la educación y la enseñanza; en este caso la Psicología no configura un ámbito propio de conocimiento, sino que es más bien el resultado de una especie de selección de los principios y explicaciones que proporcionan otras parcelas de la Psicología. Por otro lado, la Psicología de la Educación realiza contribuciones originales teniendo en cuenta al mismo tiempo los principios psicológicos y las características de los procesos educativos; en este caso la Psicología de la Educación es una disciplina con unos programas de investigación, unos objetivos y unos contenidos propios”.

Tenemos así, en un extremo, los autores que conciben la psicología de la educación simplemente como un campo de aplicación de la psicología; bajo esta idea se encuentra la creencia de que las aportaciones de la psicología permitirán resolver, por sí solas, los problemas educativos de una manera científica y racional. En el otro extremo se encuentran los planteamientos que niegan que la Psicología de la Educación sea una disciplina independiente.

En una posición intermedia se encuentran quienes conciben la Psicología de la Educación como una disciplina puente entre Psicología y Educación, con un objeto de estudio, unos métodos y unos marcos teóricos y conceptuales propios. En esta posición se encuentran autores, como Glaser y Ausubel, que tienen una influencia destacable en Educación Matemática. Glaser defiende una psicología de la instrucción, con características de disciplina aplicada, como una ciencia del diseño o disciplina tecnológica; idea clave es que no se limita a describir su objeto de estudio sino que además elabora procedimientos para modificarlo, Ausubel señala que la diferencia básica entre Psicología y Psicología de la Educación consiste en que la primera se ocupa del estudio de las leyes del psiquismo humano, mientras que la segunda limita su estudio a las leyes del psiquismo humano que actúan durante el aprendizaje escolar.

Con carácter general, se señala como objeto de estudio de la Psicología de la Educación los procesos de formación, es decir, los procesos de cambio sistemático en el comportamiento humano que satisfacen los siguientes criterios: son procesos de adquisición, o lo que es lo mismo, dan lugar a un aprendizaje; son intencionales y se proponen una finalidad, es decir, responden a unas intenciones u objetivos educativos; tienen lugar durante un periodo de tiempo relativamente largo; provocan efectos durables en las personas; y, finalmente, producen reestructuraciones importantes del comportamiento.

“La Psicología de la Educación estudia los procesos educativos con una triple finalidad: contribuir a la elaboración de una teoría explicativa de estos procesos, elaborar modelos y programas de intervención dirigidos a actuar sobre ellos con una finalidad determinada y dar lugar a una praxis educativa coherente con las propuestas teóricas formuladas” (Coll, 1990)

La Psicología de la Educación es también una disciplina educativa, y por tanto, de naturaleza aplicada y fuertemente vinculada con la práctica. Bajo este supuesto surge una triple consideración. En primer lugar, un conjunto de conocimientos que se aplican, a los que se denominan el núcleo teórico-conceptual; en segundo lugar, el ámbito de aplicación, en nuestro caso los procesos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas; y en tercer lugar, los procedimientos de ajuste del conocimiento teórico a las características particulares de la Educación Matemática.

Por lo que se refiere al primer punto hay que indicar que la Psicología de la Educación no dispone de un marco teórico unificado y coherente que permita dar cuenta de los múltiples y complejos aspectos implicados en los procesos de desarrollo personal, de la influencia que la educación escolar tiene sobre ellos y, en particular, del peso real que tiene el aprendizaje de conocimientos matemáticos.

No se dispone de una teoría comprensiva de la instrucción, con apoyo empírico y teórico suficientes para utilizarla como fuente única de información en la preparación y realización del currículo escolar; tampoco existe una teoría específica de la instrucción en el campo de la Educación Matemática. Sí hay, sin embargo, múltiples teorías que proporcionan información parcial adecuada. Nuestro marco de referencia concreto es un conjunto de teorías y explicaciones que, si a veces mantienen entre sí discrepancias importantes en algunos puntos, participan de una serie de principios comunes o, por lo menos, no contradictorios. Estos principios son los que determinan el desarrollo actual de la Educación Matemática y vienen

marcando la línea de progreso en la investigación y el diseño curricular en este campo.

El marco de referencia está delimitado por lo que se puede denominar enfoques cognitivos en sentido amplio. Entre ellos hay que destacar la Psicología genética de J. Piaget y sus colaboradores de la Escuela de Ginebra; en este caso las aportaciones más destacables se refieren a la concepción de los procesos de cambio, las formulaciones estructurales del desarrollo operativo y las elaboraciones en torno a las estrategias cognitivas. También es importante la teoría del origen socio-cultural de los procesos psicológicos superiores de Vygotsky y su desarrollo posterior, en especial lo relativo al modo de entender las relaciones entre aprendizaje y desarrollo y la importancia de los procesos de interacción interpersonal. La teoría del aprendizaje verbal significativo de Ausubel y su prolongación en la teoría de la asimilación de Mayer, tienen un interés destacable por ir especialmente dirigidas a explicar los procesos de aprendizaje de bloques de conocimientos altamente estructurados. También hemos considerado en el apartado anterior la teoría del procesamiento de la información, cuyo interés en este caso se concreta en la hipótesis de que el conocimiento previo, organizado en bloques interrelacionados, es un factor decisivo en la realización de nuevos aprendizajes.

¿Existe una teoría del aprendizaje de las matemáticas?. Aunque se han realizado intentos bastante elaborados por avanzar en la construcción de una tal teoría, no se han alcanzado resultados efectivos hasta el momento. Entre los intentos más difundidos se encuentra el trabajo de Dienes, inspirado en la obra de Piaget, Bruner y Bartlett, algunos de cuyos aspectos se han comentado ya en este Proyecto. La teoría de Dienes se resume en cuatro principios:

1. Principio dinámico.
2. Principio constructivo.
3. Principio de variabilidad matemática.
4. Principio de variabilidad perceptiva,

cuyo desarrollo puede encontrarse en las obras de este autor.

Algunos autores, como Skemp y Mialaret, han desarrollado tratamientos teóricos relativos al aprendizaje de las matemáticas, siempre fundamentados en las grandes corrientes teóricas antes señaladas. Otros autores se han ocupado con mayor interés del ámbito de aplicación de las teorías a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Orton plantea una serie de cuestiones destacables en este ámbito de aplicación y recuerda continuamente que, aunque la fundamentación teórica conductista parezca estar desprestigiada científicamente y sea excluida explícitamente en la elaboración de diseños curriculares, tiene una influencia real en el aula ya que sostiene las creencias y pautas de actuación de muchos profesores.

Entre las cuestiones planteadas por Orton destacamos las siguientes:

1. ¿Necesitan teorías los profesores de matemáticas?. La respuesta es obvia: “*un profesor acepta una posición teórica al admitir un determinado punto de vista o al tomar postura respecto de una cuestión específica*”; la idea resultante es que siempre se está interpretando, es decir, empleando una teoría; la cuestión se transforma en ¿qué teoría interpreta mejor el aprendizaje escolar en matemáticas?

2. ¿Cuáles son las exigencias cognitivas en el aprendizaje de las matemáticas? Sobre esta cuestión plantea algunos de los puntos más relevantes en el aprendizaje de las matemáticas; los concreta en: retención y memorización; empleo de algoritmos; aprendizaje de conceptos; y resolución de problemas.

3. Un tercer bloque lo desglosa en las siguientes cuestiones:

¿Podemos promover el aprendizaje a través de una secuencia óptima?

¿Debemos aguardar hasta que los alumnos están dispuestos?

¿Pueden los alumnos descubrir las matemáticas por sí mismos?

En cada uno de los casos se analizan las implicaciones de tres planteamientos teóricos en relación con el aprendizaje de las matemáticas.

4. Finalmente, hay un cuarto bloque de cuestiones más concretas:

¿Por qué algunos alumnos rinden más que otros?

¿Influye el lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas?

A lo largo de la obra citada, y mediante la estructura diseñada por las cuestiones anteriores, explora sistemáticamente el ámbito de aplicación de las teorías generales a la Educación Matemática.

Gómez también estudia esta relación entre Psicología y Educación Matemática, destacando las aportaciones tanto teóricas como de desarrollo:

“Se asume que el aprendizaje de las Matemáticas tiene su propia psicología, que los estudiantes y profesores tienen ideas propias acerca de las Matemáticas en las situaciones de aprendizaje y que los profesores estarán mejor equipados para su tarea si pueden comprender cómo se ven las Matemáticas desde la perspectiva del que aprende”.

El ámbito de aplicación de las teorías que fundamentan la Psicología de la Educación en el aprendizaje de las matemáticas suele estar muy conectado, en la mayor parte de los casos, con los procedimientos de ajuste: procedimientos de diseño y planificación de procesos educativos, que abarcan la dimensión tecnológico-proyectiva de la Psicología de la Educación. Estos procedimientos de diseño y planificación suelen ir precedidos por el desarrollo de investigación básica sobre el aprendizaje de tópicos matemáticos concretos en los que se debe poner de manifiesto si el modo concreto de interpretar aprendizajes específicos, bajo un esquema teórico, da los resultados previstos, necesita de alguna revisión en profundidad o de nuevos planteamientos. Todo este campo de investigación, que trata de ajustar el marco teórico general a las actividades de diseño y planificación de procesos educativos en matemáticas, es, en la actualidad, uno de los campos de estudio e investigación más fecundos en Educación Matemática y una de las aportaciones más relevantes que se realizan desde la Psicología de la Educación en el momento actual.

En resumen, el campo de problemas que se pretende clarificar mediante las aportaciones de la Psicología Educativa está centrado en el modo de entender e interpretar las relaciones entre desarrollo, aprendizaje y enseñanza, y por tanto en la concepción misma sobre la Educación en general y la Educación Matemática en particular. No hay discrepancias al afirmar que la finalidad última de la educación es promover el desarrollo de los seres humanos; sí las hay cuando se quiere definir y explicar en qué consiste ese desarrollo y hay que decidir el tipo de acciones educativas más adecuadas para promoverlo; mayor dificultad presenta integrar el conocimiento matemático en ese desarrollo.

La disyuntiva básica se produce entre los que entienden que el desarrollo es el resultado de un proceso endógeno, que procede de dentro a fuera y los que lo conciben como resultado de un proceso exógeno, que procede de fuera a dentro, producido por una serie de aprendizajes específicos.

En el primer caso, lo verdaderamente importante es la competencia cognitiva general, siendo finalidad de la educación reforzar esta competencia cognitiva dentro de los márgenes que permiten las leyes generales del desarrollo a las que está sometida. Las teorías estructurales del desarrollo han proporcionado un apoyo considerable a esta orientación al postular la existencia de una dirección y unos estadios o niveles universales del desarrollo que pueden adoptarse como fines educativos, es decir, que pueden tomarse como un modelo del desarrollo personal que debe promover la educación, a los que se ajusta la educación matemática.

La segunda alternativa, que interpreta el desarrollo fundamentalmente como resultado de aprendizajes específicos, critica el enfoque cognitivo/evolutivo y denuncia el carácter cíclico de sus argumentos: si los aprendizajes específicos introdujeran modificaciones en los universales del desarrollo cognitivo, dejarían de ser universales. Se argumenta que es absurdo plantearse como meta que los niños alcancen un estadio determinado pues de todos modos lo alcanzarán sin necesidad de ayudas específicas, ya que se trata de un eslabón del proceso natural del desarrollo del ser humano. En este caso, el Sistema Escolar debe seleccionar y promover el aprendizaje de parcelas específicas de conocimiento, incluidos los conocimientos matemáticos.

7.- Constructivismo.

Aunque el Constructivismo no se puede considerar como una teoría del aprendizaje, son varios los motivos que nos han llevado a incluir una reflexión sobre el Constructivismo y sus relaciones con la Educación Matemática, dentro del apartado dedicado a las aportaciones procedentes de la Psicología.

En primer lugar, en los documentos recientes elaborados por el Ministerio, relativos al Diseño Curricular para el Área de Matemáticas, encontramos las siguientes consideraciones:

“Desde la perspectiva de su elaboración y adquisición, las matemáticas son pues más constructivas que deductivas. Desligado de la actividad constructiva que está en su origen, el conocimiento matemático corre el peligro de caer en puro formalismo y de perder toda su potencialidad como instrumento de representación, explicación y predicción.

La naturaleza del conocimiento matemático, su carácter constructivo y su vinculación con la

capacidad de abstraer relaciones a partir de la propia actividad y reflexionar sobre ellas obliga a tener especialmente en cuenta, en la planificación de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, el nivel de competencia cognitiva de los alumnos. Existe un estrecho vínculo entre las relaciones que los niños pueden establecer en un momento determinado y su nivel de desarrollo intelectual”

La relación que se establece entre Constructivismo y aprendizaje de las matemáticas es una de las características innovadoras del Diseño Curricular.

En esta misma línea Novak hablando del constructivismo humano, dice:

“La creación de nuevo conocimiento es, por lo que respecta al creador, una forma de aprendizaje significativo. Implica, al mismo tiempo, el reconocimiento de nuevas regularidades en los hechos u objetos, invención de nuevos o extensión de antiguos conceptos, reconocimiento de nuevas relaciones entre conceptos y, en los saltos más creativos, una gran reestructuración de las tramas conceptuales para que incluyan relaciones de orden superior. Estos procesos pueden ser vistos como parte del proceso del aprendizaje asimilador, que implica la adición de nuevos conceptos, la diferenciación progresiva de los conceptos existentes, el aprendizaje de orden superior (en ocasiones) y una nueva reconciliación integradora significativa entre las tramas conceptuales”.

También Fischbein, al presentar las líneas y nuevas tendencias de interés en Educación Matemática, procedentes del campo de la Psicología señala el Constructivismo como una línea de reflexión prioritaria, y hace las siguientes consideraciones:

“Aprender matemáticas significa construir matemáticas. La actividad matemática es esencialmente un proceso constructivo. El estudiante no aprende matemáticas absorbiendo conceptos, definiciones, teoremas y demostraciones, sino construyéndolos mediante sus propios esfuerzos intelectuales. Pero los individuos no hacen todo esto respondiendo a sus propios problemas y movilizándolo sus propios significados intelectuales naturales. Nuestro comportamiento natural se adapta a la realidad concreta en la que vivimos y no a constructos formales gobernados por reglas y definiciones formales”.

Los trabajos elaborados recientemente relativos al interés que presenta el Constructivismo para la Educación Matemática y, en particular, al aprendizaje escolar de las matemáticas, las contribuciones realizadas y los debates que han tenido lugar corroboran el interés que tiene el Constructivismo en nuestro campo.

El Constructivismo puede caracterizarse simultáneamente como una posición cognitiva y como una perspectiva metodológica. Como perspectiva metodológica en las ciencias sociales, el constructivismo asume que los seres humanos son sujetos que conocen, que el comportamiento humano responde principalmente a propósitos y que los organismos humanos, en el momento actual, tienen una capacidad altamente desarrollada para organizar conocimiento. Como posición cognitiva, el constructivismo asume que todo el conocimiento es construido y que los instrumentos de construcción incluyen las estructuras cognitivas que son, a su vez, innatas (Chomsky) o bien resultado de una construcción evolutiva (Piaget).

La segunda interpretación es más característica del constructivismo como posición cognitiva y es la que sostienen la mayoría de los constructivistas en Educación Matemática.

Esta idea es la que sostiene Fischbein cuando afirma:

“el constructivismo es una teoría del conocimiento. Nuestras congniciones, no son duplicados de un mundo externo dado sino más bien construcciones cuyo propósito es el de garantizar los éxitos prácticos de nuestro comportamiento.”

Los orígenes del constructivismo actual se atribuyen, principalmente, al trabajo de Piaget. Noddings explica la aparición y desarrollo de las ideas constructivas a partir de Piaget, que pasamos a resumir.

Al aceptar la distinción kantiana entre conocimiento empírico y lógico-matemático Piaget aceptó la difícil tarea de explicar el desarrollo de las estructuras matemáticas cognitivas. En este caso, Piaget confió en el concepto de abstracción reflexiva. La abstracción reflexiva se diferencia de la abstracción clásica en que no procede de una serie de observaciones de acontecimientos u objetos contingentes. Antes bien, es un proceso de interiorización de nues-

tras operaciones físicas sobre los objetos. Piaget se separó de Kant al describir las estructuras cognitivas como resultado del desarrollo, en vez de como estructuras innatas.

No podemos forzar determinados resultados en los objetos sobre los que operamos. Nuestras operaciones están constreñidas de algún modo. Hay algo inevitable en los resultados y características de las operaciones. Esto sucede debido a que las estructuras resultantes son lógico-matemáticas y sus actuaciones están marcadas por la necesidad. Esta conclusión plantea un reto a aquellos constructivistas que enfatizan la singularidad de las construcciones individuales. Las teorías de Piaget son, en el importante sentido que acabamos de describir, completamente constructivistas. No son únicamente procesos intelectuales constructivos sino que las propias estructuras cognitivas son, ellas mismas, productos de una construcción continua. Esta construcción activa implica a la vez una estructura básica desde la que comenzar la construcción (una estructura de asimilación) y un proceso de transformación o creación que es la construcción. Finalmente el constructivismo cognitivo de Piaget conduce, lógicamente, al constructivismo metodológico.

El constructivismo en educación matemática sostiene que el constructivismo cognitivo implica el constructivismo pedagógico; es decir, la aceptación de premisas constructivas acerca del conocimiento y los sujetos que conocen implica un modo de enseñar que reconoce a los sujetos del aprendizaje como conocedores activos. Sin embargo, es cierto que se pueden aceptar los métodos pedagógicos sugeridos por el constructivismo sin aceptar las premisas constructivistas. También puede ocurrir que un constructivista filosóficamente convencido no necesite, lógicamente, emplear los llamados métodos constructivos.

Los constructivistas están, por lo general, de acuerdo en lo siguiente.

1. Todo conocimiento es construido. El conocimiento matemático es construido, al menos en parte, a través de un proceso de abstracción reflexiva.

2. Existen estructuras cognitivas que se activan en los procesos de construcción. Estas estructuras importan para construcción; es decir, explican el resultado de la actividad cognitiva en el sentido genérico en el que un programa de ordenador cuenta para los resultados.

3. Las estructuras cognitivas están en desarrollo continuo. La actividad con propósito induce la transformación de las estructuras existentes. El entorno presiona al organismo para que se adapte.

4. El reconocimiento del constructivismo como una posición cognitiva conduce a la adopción del constructivismo metodológico.

a) El constructivismo metodológico en investigación desarrolla métodos de estudio en consonancia con los supuestos del constructivismo cognitivo.

b) El constructivismo pedagógico sugiere métodos de enseñanza en consonancia con el constructivismo cognitivo.

Carpenter, recientemente señala algunas de las ventajas obtenidas en investigación al emplear el constructivismo metodológico:

“Hay una gran variedad de resultados prometedores en áreas específicas de investigación, pero la contribución más significativa de esta investigación consiste en que la enseñanza y el aprendizaje se describen como procesos activos en los que los profesores y aprendices construyen su propio conocimiento. Esto implica que, incluso aunque podamos no tener un mapa específico de cómo se adquieren los conceptos y destrezas particulares, podemos planificar la instrucción teniendo en cuenta lo que los estudiantes ya conocen y cómo asignan significado a los nuevos conceptos y destrezas que han aprendido, y podemos tener en cuenta el pensamiento de los profesores y la toma de decisiones. Si aceptamos seriamente estos supuestos, tienen profundas implicaciones para el tipo de soluciones que buscamos para dirigir los problemas de la educación”.

Para los profesores, el constructivismo metodológico se convierte en constructivismo pedagógico. Para enseñar bien, necesitamos conocer lo que nuestros estudiantes piensan, cómo producen la cadena de marcas que vemos en sus hojas de trabajo, y qué es lo quieren hacer (o pueden hacer) con el material que les presentamos. Pero las premisas cognitivas del constructivismo pueden dictar solamente guías para una buena enseñanza. No podemos obtener de ellas, como tampoco lo podemos hacer de ninguna otra posición cognitiva, métodos específicos de enseñanza.

El constructivismo pedagógico sugiere instrumentos de diagnóstico más sofisticados, herramientas que pondrán al descubierto patrones de pensamiento, errores sistemáticos y con-

cepciones erróneas persistentes. El método de hacer explícito el pensamiento es, o puede ser, un método potente de enseñanza tanto como una herramienta de diagnóstico, pero los profesores no deben limitarse sólo a ella debido a su carácter constructivo. Las premisas constructivas implican que puede haber muchas vías para llegar a muchas soluciones o terminales de instrucción.

Muchos educadores matemáticos reconocen el poder de los métodos constructivos en situaciones individualizadas, pero también aprecian que los escolares no pueden trabajar continuamente en tales situaciones. Las condiciones del aula nos fuerzan a pensar acerca de cierta economía en la instrucción. Los profesores constructivistas necesitan tener sus premisas básicas en la mente, pero debieran tener libertad para adaptar una amplia variedad de métodos a sus propios propósitos. Por ejemplo, consideremos la recomendación constructiva general de que los profesores deben procurar un empleo considerable de material manipulativo. Esta recomendación fue un primer y plausible intento para aplicar la teoría de Piaget directamente a la enseñanza. Si la abstracción reflexiva proviene de las operaciones que realizamos sobre los objetos, entonces tiene sentido poner a los estudiantes a trabajar con objetos. La dificultad, por supuesto, está en que los estudiantes deben tener un propósito para implicarse en la manipulación de objetos.

Comprendiendo esta posibilidad, necesitamos quizás, proporcionar alguna instrucción directa sobre el uso de diferentes materiales y luego ponerlos a disposición de los alumnos. En las situaciones de resolución de problemas, no deberíamos probablemente guiar a los estudiantes en su uso. Si lo hacemos, es posible que apartemos a los estudiantes de sus propósitos y los pongamos a trabajar ciegamente en los nuestros.

La valoración del constructivismo es, por lo general, positiva y su influencia sobre Educación Matemática considerable aún cuando se siguen planteando hoy día cuestiones importantes en relación con la aplicación del constructivismo a la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, debido a que los profesores tienen que trabajar con muchos niños, debemos preguntarnos si hay algún modo de trabajar en situaciones uno a uno con un grupo completo. ¿Se puede lograr un pensamiento genuino de cada alumno en situaciones en las que interviene todo el grupo?

Se han producido varios modelos, que son altamente interactivos. Los profesores, simultáneamente, aplican el modelo y dirigen los logros, pero la aplicación del modelo se debe realizar planteando cuestiones, siguiendo los ejemplos y conjeturando, más que presentando productos incompletos. Enseñar por esta vía requiere un conocimiento matemático considerable tanto como destrezas pedagógicas. ¿Cómo pueden los profesores seguir las sugerencias de los alumnos si no saben las suficientes matemáticas como para percibir hacia dónde deben conducir las sugerencias?

¿Cómo puede lograrse la implicación personal, que es esencial para realizar construcciones potentes? Una posibilidad está en incrementar la cantidad de tiempo que los alumnos emplean trabajando juntos. El uso de pequeños grupos de aprendizaje cooperativo está llegando a ser una estrategia popular, y hay buenas razones cognitivas para permitir que los estudiantes trabajen juntos. Comienzan así a retarse a sí mismos, a preguntar las razones y, en general, a conducir su propio trabajo mental mientras que otros hacen la exposición pública. Una dificultad que se presenta consiste en que, una vez más, debemos asegurarnos que la comunidad es una comunidad matemática. La gran fuerza del constructivismo está en que conduce a pensar crítica e imaginativamente acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje. La creencia en las premisas del constructivismo lleva a no confiar en soluciones simples, y proporciona un potente conjunto de criterios para juzgar las posibles elecciones de métodos de enseñanza.

Sin embargo, también el constructivismo ha recibido fuertes críticas, que han originado cierta polémica en los últimos años. Entre las críticas más elaboradas encontramos la de Kilpatrick. Aunque el núcleo del análisis de Kilpatrick sobre el constructivismo está centrado en su fundamentación epistemológica, las implicaciones para el aprendizaje de las matemáticas son importantes. Resumimos a continuación algunos de los argumentos empleados por Kilpatrick en este trabajo, que nos parecen de especial interés.

Lo que el constructivismo parece ser:

Un problema epistemológico antiguo, no resuelto por la filosofía occidental, se refiere a cómo una realidad objetiva independiente puede llegar a ser conocida por el sujeto cognoscente, quien no tiene posibilidad de controlar si su conocimiento es o no conocimiento de algo. Cualquier intento para probar la veracidad de lo que es conocido debe ser, en sí mismo, un acto de conocimiento y por tanto, subjetivo. Cualquier conocimiento de una "verdad objetiva", resulta imposible. El constructivismo corta el nudo gordiano separando la epistemología de la

ontología y argumentando que una teoría del conocimiento debiera ocuparse de la adaptación del conocimiento a la experiencia y no del emparejamiento entre conocimiento y realidad. La única realidad que podemos conocer es la realidad de nuestra experiencia.

El punto de vista constructivista implica dos principios:

1. El conocimiento es construido activamente por el sujeto que conoce, y no recibido pasivamente desde el entorno.
2. Llegar a conocer es un proceso adaptativo que organiza el mundo de experiencias de cada sujeto; no se descubre un mundo independiente y preexistente fuera de la mente del que conoce.

El primero de estos principios es más ampliamente aceptado que el segundo entre los que se consideran a sí mismos como constructivistas; el segundo principio resulta chocante para muchas personas. Esto separa lo que se denomina constructivismo simple del constructivismo radical, que está basado en la aceptación de ambos principios.

El constructivismo radical se denomina así porque rechaza el realismo metafísico en el que aún permanecen muchos empiristas. Requiere de los que lo aceptan olvidar todos los esfuerzos por conocer el mundo tal y como es.

El constructivismo radical adopta una visión ciega hacia "el mundo real". Nunca llegaremos a conocer una realidad exterior a nosotros. En vez de eso, todo lo que podemos aprender son las limitaciones del mundo sobre nosotros, las cosas no permitidas a través de nuestra experiencia con la realidad, lo que no funciona.

En resumen, el constructivismo radical parece ser una epistemología que convierte todo el conocer en activo y todo el conocimiento en subjetivo. Siguiendo a las ciencias físicas en su rechazo de la posibilidad de llegar a conocer las realidades últimas, trata al sujeto cognoscente como organizador de su propia experiencia y constructor de su propia realidad. Considera el llegar a conocer como un proceso en el que, más que obtener información, el sujeto que conoce, mediante ensayo y error, construye un modelo viable del mundo.

Lo que el constructivismo parece no ser.

Al ser una teoría de la adquisición del conocimiento, el constructivismo no es una teoría de la enseñanza o instrucción. No hay una conexión necesaria entre cómo se considera la adquisición del conocimiento y qué procedimientos de instrucción parecen óptimos para lograr que esa adquisición suceda. La epistemología es descriptiva mientras que las teorías de la enseñanza y la instrucción deben ser, necesariamente, teorías sobre la práctica. Sin embargo, los constructivistas han tratado de obtener implicaciones para la práctica de su teoría, y en algunos casos las implicaciones parecen indicar que algunas prácticas de enseñanza y consideraciones sobre la instrucción presuponen una visión constructivista del conocimiento.

Sin embargo, Kilpatrick es rotundo con relación a esa pretensión y niega que las consecuencias que los constructivistas derivan del constructivismo radical para la práctica educativa puedan explicarse únicamente en términos de los supuestos del constructivismo. Por el contrario, argumenta con convicción que las consecuencias más importantes pueden entenderse en términos de otras hipótesis alternativas. Citando a Von Glasersfeld señala que las consecuencias que se siguen del constructivismo radical para la práctica educativa son:

- a) la enseñanza (es decir, usar procedimientos que pretenden y generan comprensión) puede distinguirse con precisión de la instrucción (es decir, usar procedimientos que pretenden un comportamiento repetido);
- b) los procesos que se supone ocurren en el interior de la cabeza de los estudiantes son más interesantes que el comportamiento explícito;
- c) la comunicación lingüística resulta un proceso para guiar el aprendizaje de los estudiantes, no un proceso para transferir conocimiento.
- d) las desviaciones de los estudiantes de las expectativas del profesor resultan medios para entender sus esfuerzos por comprender;
- e) la enseñanza por entrevista se propone como un intento no sólo de inferir las estructuras cognitivas sino también de modificarlas.

El resto del trabajo lo dedica a señalar conceptos y relaciones que los constructivistas deben clarificar para lograr mayor credibilidad y coherencia y, también, contribuir a una explicación científica de los fenómenos de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. En particular, señala líneas de reflexión en la conexión con las Matemáticas indicando la necesidad de profundizar y expresarse con más claridad sobre las relaciones entre el constructivismo, las matemáticas como disciplina y las matemáticas como materia escolar. Más aún, el constructivismo necesita orientar las demandas de una nueva aproximación a la

filosofía de las matemáticas, cuasi-empirismo, que estudia la práctica de las matemáticas en un contexto socio-histórico y que parece ser compatible tanto con la matemática realista como con la constructivista. También es necesario trabajar adecuadamente con las matemáticas escolares. Sola la epistemología no puede responder a la cuestión de qué matemáticas enseñar. Un análisis del conocimiento no puede producir un currículo. El currículo se basa en nuestros propósitos, en lo que valoramos y, acerca de todo esto, la epistemología no tiene nada que decir. Pensar de otro modo es caer en “falacia epistemológica”.

La crítica que realiza sobre la fundamentación constructivista del currículo es especialmente lúcida:

“ *Algunos constructivistas han tratado de basar el currículo sobre una fundamentación constructivista. Se ha argumentado que necesitamos en primer lugar determinar el orden moral, político o social que creemos necesario, luego expresar nuestros propósitos educativos y, a la vista de estos propósitos, escoger el contenido y los objetivos del currículo. La epistemología puede resultar útil en este momento para determinar los objetivos cognitivos, pero serán necesarias otras ayudas para los objetivos no cognitivos.*”

Como se ha visto, la polémica es seria y va al fondo de las cuestiones; seguramente queda aún camino por recorrer, fundamentaciones que completar e implicaciones que establecer. Aún así, no cabe duda que la contribución actual del Constructivismo a la Educación Matemática es, hoy día, importante y merecedora de consideración.

Referencias:

- Carpenter T.** (1990). Editorial. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol 21, nº 3.
- Coll, C.** (1990). Psicología y Educación: aproximación a los objetivos y contenidos de la Psicología de la Educación, en Coll, Palacios, Marchesi: *Desarrollo psicológico y educación II*. Madrid: Alianza.
- Fischbein E.** (1990). Introduction, en Kilpatrick J. & Nesher P. (Edts.). *Mathematics and Cognition*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Gómez B.** (1991). Las Matemáticas y el proceso educativo, en A. Gutiérrez (Edt.) *Area de Conocimiento Didáctica de la Matemática*. Madrid: Síntesis.
- González, R.; Barca, A.; Escoriza, J. y González, J.A.** (1996) *Psicología de la Instrucción*. Vol. I. Barcelona: EUB.
- Kilpatrick J.** (1987). What constructivism might be in Mathematics Education, en Bergeron J., Herscovics N. & Kieran C. *Proceedings of the Eleventh PME Conference* Vol. I, pp. 3-27, Montreal: University of Montreal.
- Kilpatrick J. & Nesher P.** (Edts). (1990) *Mathematics and Cognition*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Mayer R.** (1981). *El futuro de la Psicología Cognitiva*. Madrid: Alianza Universidad.
- Ministerio de Educación y Ciencia** (1989). *Diseño Curricular Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Centro de Publicaciones del MEC.
- Noddings N.** (1990). Constructivism in Mathematics Education, Davis R., Maher C. & Noddings N. (Edts.) Constructivist views on the Teaching and Learning of Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*. Monograph nº 4.
- Novak J.D.** (1988). El constructivismo humano, en Porlán R., García E., Cañal P. (Edts.) *Constructivismo y Enseñanza de las Ciencias*. Sevilla: Diada Editoras.
- Orton A.** (1988). *Learning Mathematics. Issues, Theory and Classroom practices*. London: Cassell.
- Pellegrino J.** (1986). Capacidad de Razonamiento inductivo, en R. Stenberg: *Las capacidades humanas*. Barcelona: Labor.

Santillana (1991) *Léxicos Ciencias de la Educación. Tecnología de la Educación*. Madrid: Santillana.