LOS EJEMPLOS Y CONTRAEJEMPLOS COMO HERRAMIENTAS PARA FACILITAR EL PROCESO DE GENERALIZACIÓN CONCEPTUAL

Otilio B. Mederos Anoceto, Boris J. Mederos Madrazo
Universidad Autónoma de Coahuila. Universidad Autónoma de Cd. Juárez — México
oma8111@yahoo.es
Campo de investigación: Formación de profesores — Nivel: Superior

Resumen. *La generalización es una de las operaciones conceptuales que más se utiliza en la matemática. En el trabajo se presenta una organización del conocimiento escolar de siete de las veintitrés generalizaciones del concepto de derivada puntual de una función f, que no exceden la extensión del concepto de función real de una variable real; tomando como criterio de generalización el debilitamiento sucesivo de las exigencias sobre la existencia del límite de la función $F_c(h)=[f(c+h)-f(c)]/h$, $h\neq 0$, cuando h tiende a cero, o de las características topológicas de c con respecto al dominio de f.*
En el trabajo se hace, además, un análisis de la utilidad de la construcción de ejemplos y contraejemplos para facilitar la realización de los procesos de generalización; y se presenta un conjunto de tareas que también facilitan y dan orden a estos procesos.
Palabras clave: derivada, generalización, ejemplos, contraejemplos, mapas

Introducción

En nuestra práctica docente de pregrado, hemos observado que los estudiantes no saben aplicar correctamente las operaciones conceptuales, entre otras, la definición, la generalización y la clasificación. Un artículo sobre la operación clasificación relacionado con este trabajo se muestra en (Mederos y Martínez, 2007). Como profesores de distintos cursos de postgrado, maestría y doctorado, hemos constatado que estas deficiencias persisten en los alumnos. Hemos comprobado que no conocen estas operaciones porque en ninguna asignatura del currículo se definen estas operaciones ni se presentan tareas necesarias para su comprensión.

En este trabajo se presentan resultados que dan solución al problema de investigación siguiente: ¿cuáles son las tareas que facilitan la participación de los estudiantes en los procesos de generalización del concepto de derivada?

El objetivo de la investigación fue la determinación de un conjunto de tareas necesarias para facilitar la participación de los alumnos en los procesos de generalización conceptual; y mostrar como la aplicación de estas tareas facilita la realización y comprensión de siete generalizaciones del concepto de derivada puntual.

En el epígrafe 1.1 de la sección 1 se presenta una definición del concepto de generalización conceptual que se utiliza en el trabajo, y en el epígrafe 1.2 se proponen siete tareas, que son el resultado de haber aplicado diferentes conjuntos de tareas didácticas a los alumnos de la asignatura (optativa) "Matemática Educativa" de la carrera de Matemática Aplicada de la Universidad Autónoma de Coahuila, (UAdeC), que son de utilidad para realizar el proceso de generalización, conducente a una generalización del tipo definido en el epígrafe 1.

Los ejemplos y los contraejemplos juegan un papel esencial en la determinación de relaciones entre las extensiones de dos conceptos subordinadas a un mismo concepto; por tal razón, la sección 2 se dedica a precisar el sentido de utilizar ejemplos ilustrativos y contraejemplos en Matemática, y a indicar como proceder para determinar la relación existente entre las extensiones de dos generalizaciones de un mismo concepto.

En el epígrafe 3.1, de la sección 3, se describe el comportamiento de dos grupos de estudiantes de la asignatura (optativa) "Matemática Educativa" de la carrera de Matemática Aplicada de la UAdeC; al participar en los procesos que conducen a las tres generalizaciones del concepto de derivada puntual que corresponden al caso en que la función cociente incremental tiene una discontinuidad evitable de primera especie.

En el epígrafe 3.2 se presentan las cuatro generalizaciones de la derivada puntual que se obtiene cuando el límite o, al menos uno de los límites laterales, del cociente incremental en 0 es infinito; sin hacer comentarios sobre el comportamiento de los estudiantes por un problema de espacio.

La sección 4 se dedica a describir características de los estudiantes y de la asignatura que consideramos importantes para que se entienda la pertinencia de la aplicación.

La metodología que se utilizó fue el análisis del comportamiento de cada uno de los estudiantes de los dos grupos en los que se desarrolló la investigación.

La operación generalización de conceptos

Para el estudio de muchos conceptos es necesario realizar una o varias generalizaciones, con el propósito de ampliar diferentes significados necesarios del concepto que se generaliza.

El proceso de generalización conceptual

Todo concepto tiene dos características muy importantes, su extensión y su contenido. Se denomina extensión de un concepto al conjunto *E* de todos los objetos que corresponden a ese concepto y contenido a una colección de propiedades $C=\{p_i,\ i\in I\}$, donde *I* es un conjunto, que cumplen todos los elementos de *C* y solo estos elementos. En el trabajo un concepto se indica mediante el par *(E, C)* formado por su extensión y su contenido, o simplemente por *E*.

A continuación se presenta de manera sintetizada una definición del concepto de generalización, tomada de la tesis doctoral escrita por (Martínez, 2003), "Dado el concepto ya formado (E1,C1) que se ha definido a partir del concepto (E,C), la operación que permite construir, a partir de (E1,C1), el concepto (F1,D1), debilitando, al menos, una de las propiedades de C1 y comprobando que C1 es más fuerte que D1 y que D1 es más fuerte que C, se llama generalización del concepto (E1,C1) subordinada a (E,C)". El proceso de construcción de (F1,D1) a partir de (E1,C1) recibe el nombre de proceso de generalización; y el concepto (E,C) se denomina concepto de partida de la generalización.

Tipos de tareas sobre la generalización de conceptos que se presentan en la matemática

En el trabajo matemático se pueden presentar distintos tipos de tareas, relativas a la generalización de conceptos, entre las cuales están las siguientes:

1. Dados un concepto (E_1,C_1) y un conjunto de propiedades D_1; determinar si D_1 es más débil que C_1.
2. Dado un concepto (E_1,C_1), obtener un debilitamiento D_1 de C_1.
3. Dado un concepto (E_1,C_1) y un debilitamiento D_1 de C_1; construir la generalización (F_1,D_1) de (E_1,C_1).
4. Dado un concepto (E_1,C_1); realizar varias generalizaciones de (E_1,C_1), determinando los debilitamientos de C_1 correspondientes.
5. Dados un concepto (E_1,C_1) y varias generalizaciones (F_k,D_k), k=1:m; establecer las relaciones conjuntistas entre las extensiones F_k, k=1:m; y construir mapas de extensiones y de contenidos.

6. Dados dos conceptos (E_1,C_1) y (F_1,D_1) subordinados a un mismo concepto de partida (E,C); determinar si uno de ellos es una generalización del otro.

7. Dados dos conceptos (E_1,C_1) y (E_2,C_2) subordinados al concepto (E,C) tales que $E_1 \subset E_2$, una colección de generalizaciones (F_i,D_i), i=1:m, de (E_1,C_1) y otra colección de generalizaciones (G_j,H_j), j=1:n de (E_2,C_2); determinar el mapa de las extensiones $\{F_i\} \cup \{G_j\}$ correspondientes a las dos colecciones de generalizaciones.

Para dar cumplimiento a una tarea del primer tipo es necesario demostrar que C_1 implica D_1; pero que D_1 no implica C_1. La segunda tarea es de mayor complejidad que la primera y se presenta cuando se quiere, por ejemplo, obtener un nuevo concepto que generalice algún significado del concepto que se desea generalizar.

El tercer tipo de tarea requiere la realización de un proceso de generalización consistente en considerar a D_1 como el contenido de un nuevo concepto, asociar a este contenido un conjunto F_1 formado por todos los objetos de E que satisfacen las propiedades de D_1, utilizar una notación adecuada para F_1 y emplear el par (F_1,D_1) para indicar el nuevo concepto, donde en lugar de F_1 se utiliza su notación. Cuando no hay dudas es usual utilizar la notación de F_1 para referirse al concepto (F_1,D_1).

En la sección 3 de este artículo se realizan varias generalizaciones del concepto de derivada determinando los debilitamientos necesarios, se establecen las relaciones conjuntistas de sus extensiones y se construyen algunos de los mapas correspondientes. Se muestra de esta forma cómo proceder para dar cumplimiento a tareas de los tipos 4, 5 y 6. Por un problema de espacio no se describe en el trabajo como se aplicó la tarea 7 al caso en que (E_1,C_1) y (E_2,C_2) son los conceptos de continuidad y derivada puntual, respectivamente.

Los ejemplos y los contraejemplos

Dados dos conceptos (E_1,C_1) y (F_1,D_1) subordinados a un mismo concepto (E, C) para determinar si (F_1, D_1) es una generalización del concepto (E_1,C_1) es necesario demostrar, o refutar, una o varias afirmaciones U (universales) de la forma: "todo elemento de la clase A pertenece a la clase B". En la figura 1 se muestra un mapa de afirmaciones universales que puede utilizarse para determinar si (F_1, D_1) es una generalización del concepto (E_1, C_1).

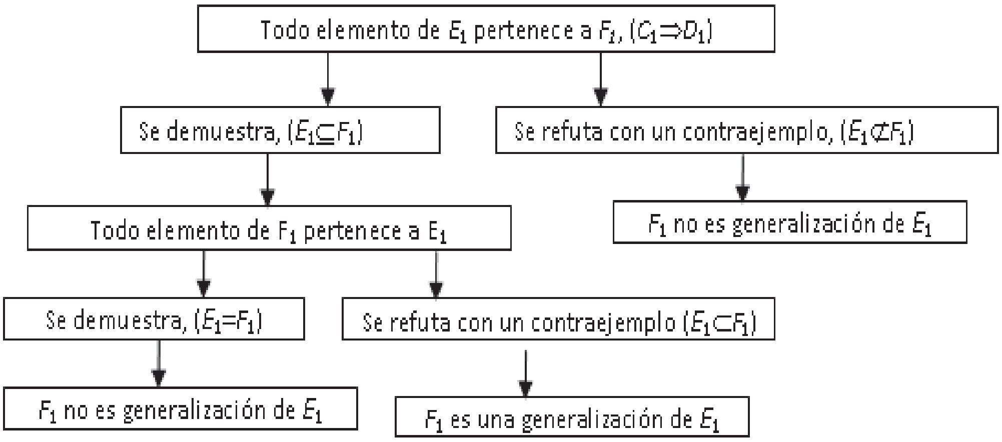

Fig. 1. Mapa de afirmaciones para determinar si F_1 corresponden a una generalización de E_1

La demostración de una afirmación universal sobre extensiones de dos conceptos se realiza trabajando con los contenidos correspondientes y utilizando métodos lógico-deductivos. Para refutar una afirmación tal es suficiente encontrar, o construir, un elemento de *A* que no pertenezca a *B*. Un elemento de A con esas características recibe el nombre de contraejemplo.

Para profundizar en esta dirección recomendamos el prefacio del libro: (Gelbaum y Olmsted, 1964). Una interesante investigación sobre producción de ejemplos y contraejemplos en análisis, por los estudiantes, fue desarrollada por: (Benbachir y Zaki, 2001)

Generalizaciones de la derivada puntual

Suponemos que se ha construido el concepto de derivada de una función f: $A \rightarrow \mathbf{R}$, $x \rightarrow f(x)$, $A \subseteq R$, en un punto c interior de A; en correspondencia con la idea siguiente: $f'(c)=\lim_{h\rightarrow 0}F_c(h)$, F_c:$A_c \rightarrow R$, $h \rightarrow F_c(h)=[f(c+h)-f(c)]/h$, (1), donde $A_c=\{h \in R\text{: } h \neq 0,\ c+h \in A\}$. Se supone, también, que se utilizan las notaciones F(A), C(c) y D(c) para las colecciones de las funciones definidas sobre A, continuas y derivables en c, respectivamente; y que se conoce la cadena de inclusiones $\varnothing \subset D(c) \subset C(c) \subset F(A)$ y los mapas de extensiones y de proposiciones correspondientes.

Se supone, además, que se conoce el concepto de derivada, *(D(c), C_1), D(c)={f∈F(A): f satisface C_1},* C_1={p_0, p_1}, donde p_0 indica la propiedad: límF_c(*h*) cuando *h* tiende a 0, existe y es finito, y p_1 denota la propiedad: *c* es un punto interior de *A*.

Caso en que 0 es un punto de discontinuidad no evitable de primera clase de Fc

En este caso existen, son finitos y desiguales, los límites $\lim_{h\to o-} F_c\,(h)= l_1$ y $\lim_{h\to o+} F_c\,(h)= l_2$, (2). Utilizando los límites (2) y mediante las tareas del tipo 1), 2) o 3) se pueden obtener las generalizaciones del concepto *(D(c), C_1)* siguientes:

1) *Derivada lateral izquierda. (F_1, D_1), F_1=D_-(c)={f∈F(A): f satisface D_1}, D_1={p_2, p_3},* p_2: *límF_c*(*h*) existe y es finito cuando $h\to 0^-$ y p_3: *c* es un elemento de *A* tal que (*c*-δ,*c*]⊂*A* para un número real positivo δ

2) *Derivada lateral derecha.* (F_2, D_2**)**, F_2= *D_+(c)={f∈F(A): f satisface D_2}, D_2={p_4, p_5},* p_4: *límF_c*(*h*) existe y es finito cuando $h\to 0^+$ y p_5: *c* es un elemento de *A* tal que [*c*,*c*+δ)⊂*A* .

3) *Derivada lateral izquierda y derecha.* (F_3, D_3), F_3= *$D_\pm$(c)={f ∈F(A): f satisface D_3}, D_3=*{p_2, p_3, p_4, p_5}.

Con estas tres generalizaciones se da cumplimiento a una tarea de tipo 4. Los estudiantes, recurriendo a mapas de afirmaciones como el de la figura 1, establecieron las relaciones *D(c)⊂$D_\pm$(c)=D_+(c)∩D_-(c), D-(c)∪D_+(c)⊂F(A), D_+(c)\$D_-$(c)≠∅ y D_-(c)\$D_+$(c)≠∅.* El profesor realizó las primeras demostraciones, que eran triviales, y presentó funciones particulares con las que los estudiantes refutaron afirmaciones. De esta forma se probó que los conceptos *D_-(c), D_+(c) y $D_\pm$(c)* son generalizaciones del concepto *D(c),* y que *$D_\pm$(c)* es una restricción de *D_-(c) y D_+(c).*

Por ejemplo, para probar que el concepto de función con derivada lateral izquierda y derecha en *c* es una generalización del concepto de derivada en *c*, *$D_\pm$(c),* se demostró la afirmación: *toda función derivable en un punto c interior a su dominio es derivable a la izquierda y a la derecha en c*; y para que los estudiantes participaran en la refutación de la afirmación recíproca, el profesor presentó la función definida sobre *R* por *f*(*x*) = $x/(1+e^{1/x})$, si *x*≠0 y *f*(0)=0 y pidió a los estudiantes que determinaran las derivadas laterales. Más del 50% de los estudiantes determinó que $f'_-(0)=1$ y $f'_+(0)=0,$ pero no todos comprendieron que esto era suficiente para refutar la proposición recíproca.

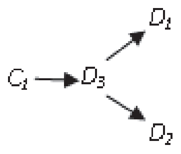

Figura 1

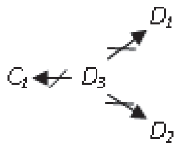

Figura 2

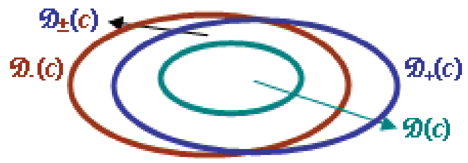

Figura 3

Con ayuda del profesor se construyeron una mapa de las implicaciones correspondientes a proposiciones que se demostraron, figura 2, un mapa de las implicaciones que no se cumplen correspondientes a las refutaciones, figura 3, y un mapa de las extensiones del concepto de derivada en *c* y de sus tres generalizaciones, figura 5. Las flechas en la figura 2 indican implicaciones y las flechas de la figura 3 implicaciones que no se cumplen. De esta forma se logró que los estudiantes participaran en tareas del tipo 5 y 6.

Caso en que el límite o, al menos uno de los límites laterales de Fc(h) en 0 es infinito

Las generalizaciones del concepto de derivada $(E_1,C_1)=(D(c),C_1)$ que no exceden la extensión de $(E,C)=(F(A),C)$ y que pueden realizarse aceptando que $límF_c(h)$ pueda ser $+\infty$, o $-\infty$, tienen como resultado los conceptos (F_4,D_4), donde $D_4=\{p_0,p_6\}$ y $F_4=D_{\infty}(c)= \{f \in F(A): f$ *satisface* p_1 *y* $p_6\}$; (F_5,D_5), donde $D_5=\{p_2,p_7\}$ y $F_5=D_{\infty-}(c)=\{f \in F(A): f$ *satisface* p_3 *y* $p_7\}$ y (F_6, D_6), donde $D_6=\{p_5, p_8\}$ y $F_6= D_{\infty+}(c)= \{f \in F(A): f$ *satisface* p_5 *y* $p_8\}$, donde p_j) $limF_c(h)$ existe (finito o infinito), cuando $h \to 0$ para $j= 6$, $h \to 0-$ para $j=7$ y $h \to 0+$ para $j=8$; (F_8,D_8), $F_8= D_{\infty\pm}(c)= \{f \in F(A): f$ *satisface* p_3, p_5, p_7 *y* $p_8\}$.

En la tabla de la figura 5 se presenta un resumen de los contenidos obtenidos por los estudiantes, con la mediación del profesor, al realizar los siete procesos de generalización. Para la comprensión de la tabla se debe tener en cuenta que: $f:A \to R$, $x \to f(x)$, $A \subseteq R$, $c \in A$, $F_c:A_c \to R$, $h \to F_c(h)=[f(c+h)-f(c)]/h$, $A_c=\{h \in R: h \neq 0, c+h \in A\}$. $(D(c), C_1)$, $C_1=\{p_0, p_1\}$, donde p_0 indica la propiedad: $límF_c(h)$ cuando h tiende a 0, existe y es finito, y p_1 denota la propiedad: existe un δ, $\delta>0$, tal que $(c-\delta, c+\delta) \subseteq A$, $f'(c)=lim_{h\to 0}F_c(h)$ y $D(c)=\{f \in F(A): f$ *satisface* $C_1\}$. Los números 2 y 4 de la primera fila de la tabla indican, respectivamente, notación y debilitamiento de la propiedad:

Se generalizaron los mapas de las figuras 2, 3 y 4 incluyendo en los dos primeros los contenidos D_i, $i=4,7$, y en el mapa de la figura 4 las extensiones $D_{\infty}(c)$, $D_{\infty-}(c)$, $D_{\infty+}(c)$ y $D_{\infty\pm}(c)$.

No	Generalización	2	Existencia de $\lim F_c(h)$	Existe δ, $\delta>0$:	4
1	$(D_-(c),D_1)$ $D_1=\{p_2,p_3\}$	$f'_-(c)$	p_2: existe y es finito cdo. $h\to 0^-$		p_0
				p_3: $(c-\delta,c]\subset A$	p_1
2	$(D_+(c),D_2)$ $D_2=\{p_4,p_5\}$	$f'_+(c)$	p_4: existe y es finito cdo. $h\to 0^+$		p_0
				p_5: $[c,c+\delta)\subset A$	p_1
3	$(D_\pm(c),D_3)$ $D_3=\{p_2,p_3,p_4,p_5\}$		p_2 y p_4	p_3 y p_5	
4	$(D_\infty(c),D_4)$ $D_4=\{p_1,p_6\}$	$f'_\infty(c)$	p_6: existe (finito o infinito) cdo. $h\to 0$	p_1	p_0
5	$(D_{\infty-}(c),D_5)$ $D_5=\{p_3,p_7\}$	$f'_{\infty-}(c)$	p_7: existe (finito o infinito) cdo. $h\to 0^-$.	p_3	p_2
6	$(D_{\infty+}(c),D_6)$ $D_6=\{p_5,p_8\}$	$f'_{\infty+}(c)$	p_8: existe (finito o infinito) cdo. $h\to 0^+$.	p_5	p_4
7	$(D_{\infty\pm}(c),D_7)$ $D_7=\{p_3,p_5,p_7,p_8\}$		p_7 y p_8	p_3 y p_5	

Fig. 6. Las siete generalizaciones de la derivada puntual hasta ahora obtenidas.

Características de los estudiantes y de la asignatura

La asignatura "Matemática Educativa" de la carrera de Matemática aplicada de la UAdeC se desarrolla en el séptimo semestre. Los alumnos que la cursan han aprobado varios cursos de cálculo y de análisis matemático. Para alumnos con estas características es posible diseñar las actividades para que participen en los procesos de generalización del concepto de derivada puntual.

En la primera versión de la asignatura hubo una matrícula de 7 alumnos y en la segunda de 4. Se diseñaron actividades para el trabajo individual y para trabajo grupal, que permitieron al profesor arribar a las conclusiones que se presentan en las conclusiones generales. Los alumnos conocían los conceptos de derivadas laterales finitas puntuales, pero no podían explicar adecuadamente por qué eran generalizaciones del concepto de derivada puntual. No todos los alumnos conocían los conceptos de derivada infinita.

La única experiencia que tenían los alumnos en la construcción de mapas de extensiones y de contenido de colecciones de conceptos, era con los conceptos de continuidad y continuidad lateral puntual. No conocían la diferencia entre un ejemplo y un contraejemplo, y no tenían experiencia en la solución de problemas en los que se necesitara la construcción de un contraejemplo, o su determinación mediante la realización de una búsqueda bibliográfica orientada.

Conclusiones generales

En esta investigación se escogieron siete procesos de generalización del concepto de derivada puntual de funciones reales de variable real como campo de trabajo. Como resultado de la primera aplicación al grupo de 7 estudiantes se determinaron siete tareas que facilitaron y guiaron la participación de los estudiantes de los dos grupos en estos procesos. Los estudiantes confrontaron dificultades al tener que demostrar proposiciones.

Como resultados de la aplicación de las tareas se concluyó que los estudiantes de los dos grupos: 1) comprendieron el significado de un proceso de generalización y aprendieron a utilizar herramientas para realizarlos, 2) construyeron mapas de contenidos y extensiones de los conceptos generalizados, que constituyen estructuras de organización y elaboración importantes, 3) aprendieron a plantear proposiciones que tenían que demostrar o refutar; cosa esta última, que pocas veces habían hecho en su carrera, 4) aprendieron a utilizar contraejemplos como herramientas para refutar proposiciones y ejemplos para probar que extensiones conceptuales no eran vacías.

Referencias bibliográficas

Benbachir, A y Zaki, M. (2001). Production d´examples et de countre-examples en analyse: etude de cas en première d´université. *Educacional Studies in Mathematics 47*, 273-295.

Gelbaum, B. y Olmsted, J. (1964). *Counterexamples in Analysis.* San Francisco: Holden-Day, INC.

Martínez, A. (2003). *Procedimiento metodológico para la generalización de conceptos de los temas Dominio Numérico y Series en la Educación Superior.* Tesis doctoral. Departamento de Matemáticas. Facultad de Matemática, Física y Computación. Universidad Central “Marta Abreu”, Santa Clara, Cuba

Mederos, O. y Ruiz, A. (2007). Aplicación de la operación clasificación de conceptos al estudio de los cuadriláteros convexos. *Revista "NÚMEROS"*, 67, 42-51.