

EL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA EN EL ÁMBITO ESCOLAR. UN ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO EN INGENIERÍA

Gema Rubí Moreno Alejandri
Universidad Autónoma de Guerrero
alejandrigemath@gmail.com

México

Campo de investigación: Socioepistemología

Nivel: Superior

Resumen. Esta investigación es producto de una tesis de maestría (Moreno, 2008) y es referente a un análisis de tres libros de texto -principalmente usados- de Cálculo Vectorial en Ingeniería Electromecánica. Específicamente, se analiza el tratamiento que se le da al Teorema de la Divergencia (TD) en los libros de texto. El marco teórico referencial es la aproximación socioepistemológica. La metodología de análisis de los libros de texto es de tipo conceptual y estructural.

Palabras clave: teorema de la divergencia, análisis de libros de texto

Introducción

La experiencia ha mostrado que, los cursos tradicionales de Cálculo Vectorial, por lo general, han tenido un enfoque mayoritariamente teórico, centrado en procedimientos algorítmicos de derivación e integración en varias variables. Esto ha llevado a descontextualizar y despersonificar los conceptos y nociones en el cálculo vectorial, ocultándose de esta forma su primera significación. En especial el Teorema Fundamental del Cálculo -por ejemplo el Teorema de la Divergencia (TD)- posee poco o ningún significado natural en los alumnos que han cursado la materia. Esta desvinculación con las aplicaciones de los campos vectoriales ha resultado en que un estudiante apruebe, sin que pueda otorgarle a los desarrollos teóricos del curso una significación de naturaleza física, por ejemplo su vinculación con los conceptos relacionados al electromagnetismo o a la mecánica de fluidos.

En particular, estamos interesados en el Teorema de la Divergencia, por ser una generalización del Teorema Fundamental de Cálculo (en sus versiones bi y tri dimensional). Además, este resultado sustancial del Cálculo Vectorial, involucra una gran cantidad de conceptos y nociones del mismo. Su complejidad desde el punto de vista epistemológico y los hechos didácticos implicados en su aprendizaje, así como la fenomenología asociada, hacen fundamental el estudio del tratamiento del Teorema de la Divergencia.

Dado el papel protagónico de los libros de texto en el sistema de enseñanza, nos interesan las propuestas pedagógicas expuestas en ellos para contribuir al proceso de aprendizaje del TD. Por lo tanto, esta investigación es referente al proceso de **difusión del saber** mediante la figura de libro de texto -para lo cual hemos seleccionado tres libros de texto-específicamente se aborda el tratamiento del TD en Ingeniería. Este escrito presenta resultados de una investigación de tesis de maestría (Moreno, 2008).

Referencias teóricas

La aproximación *socioepistemológica*, busca explicar cómo se aprende, cómo se enseña y qué se enseña, para lograr desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes, vía el rediseño del discurso matemático escolar. En particular, nuestra investigación estará centrada en la cuestión *¿qué se enseña?*

Especialmente, nuestra investigación estudia las diferencias entre el objeto del saber (el TD como saber científico matemático) y el objeto de enseñanza (el TD como saber a enseñar). Concretamente nos limitaremos a analizar libros de texto.

Es oportuno destacar que aunque entre las actividades propuestas por los textos y las que se concretan en las aulas existe un puente que es el docente, en este trabajo no se indaga, por ejemplo, sobre los criterios que siguen los docentes al momento de seleccionar actividades. El único dato con el que se cuenta es que ellos, raramente usan diseños propios para las actividades o bien raramente realizan una selección crítica de los materiales, sino que los extraen de los textos.

Por lo tanto, los libros de texto son formas de presentación relativamente nuevas, producto de su natural evolución, del proceso de transposición didáctica, y que además han borrado las fuentes o motivos del origen de sus conceptos, así como también las transformaciones que se han dado en ella.

Metodología de investigación

La estructura metodológica de esta investigación se desarrolló de la forma siguiente:

- ✿ Un examen de las diversas investigaciones, sobre la didáctica del análisis, referente al cálculo diferencial e integral en una o más dimensiones;
- ✿ Inspección del origen del Teorema de la Divergencia de acuerdo a los resultados de Gauss, de Ostrogradskii y de Green, así como su naturaleza mediante la fenomenología asociada a la mecánica de fluidos y el electromagnetismo;
- ✿ Un Análisis de tres Libros de Texto de Cálculo Vectorial más populares en la carrera de Ingeniería Electromecánica del Instituto Tecnológico de Acapulco (ITA). No obstante, debido a la particularidad del Teorema de la Divergencia, ha sido necesario rediseñar una metodología que cumpla nuestras expectativas que, por un lado, evidencie la estructura, y por otro, los distintos enfoques conceptuales de los autores. Por lo tanto, la metodología empleada –una adaptación de las metodologías de González y Sierra (2004) y de Castañeda (2003)- comprende dos tipos de análisis: uno *estructural* y el otro *conceptual*.
- ✿ Finalmente, abordamos conclusiones de los resultados del análisis de los libros de texto. Así como algunas consideraciones referentes a la enseñanza del Calculo Vectorial.

Resultados de la investigación

Observamos, en nuestra investigación, que los libros de texto abordados, tomando como referencia al Teorema de la Divergencia, acusan deficiencias tanto en los aspectos conceptuales como en aquellos relacionados con la debida contextualización de los saberes. En consecuencia, algunos de los cursos del ciclo básico se reducen a una repetición de procedimientos mecánicos, y olvidan la importancia de una reflexión teórica seria y de una motivación previa que señale el tipo de problemas aplicados hacia los cuales dichos procedimientos apuntan. Entre otros, algunos de los resultados son los siguientes:

- ✿ El uso de la tecnología es poco aprovechado para la comprensión de este tema. Por ejemplo, el Teorema de la Divergencia potencia una resignificación –del tipo geométrico y físico- del concepto de divergencia adquirido a partir de su definición. A este respecto, sólo uno de los libros rescata esta idea (Stewart, 2004).

- ☼ La visualización es una parte poco explorada en los tres libros de texto. Los gráficos que surgen como parte de la explicación del teorema y su demostración –en el caso de explicitarla- sólo hacen referencia a la región donde se integrará, haciendo caso omiso del proceso inmerso en la igualdad propuesta en el Teorema de la Divergencia.
- ☼ En los tres libros, la mayoría de los ejemplos y/o ejercicios imponen énfasis en la ventaja operativa de la conversión de una integral de superficie a una integral de volumen, o viceversa. Los ejercicios propuestos en los libros de texto raramente obligan a tomar decisiones sobre los procedimientos que se utilizan para hallar la solución. Tienen la intención de mecanizar ciertos procedimientos que luego pueden ser utilizados en la resolución de problemas. Además de que no hay ejercicios que pongan a prueba la *necesidad* de las hipótesis del teorema, reduciéndose así a la ejercitación del teorema como una simple *regla* cuya implementación convierte un tipo de integral a otro. Los problemas siempre tienen una sola respuesta correcta. Sólo se aprende una forma correcta de solucionar cada problema: la que el libro expone como ejemplos.
- ☼ En los libros analizados, los ejemplos y/o ejercicios de aplicaciones siempre aparecen al final del discurso intentando dotar de sentido al teorema, pareciendo esto un tanto artificial. La mayoría de los problemas están descontextualizados de la realidad porque plantean situaciones artificiosas y utilizan datos a temporales. Hace falta ejemplos y/o ejercicios, en la medida de lo posible, sacados de la realidad y contextualizados a la época tecnológica actual.
- ☼ Algo muy rescatable y loable de dos de los libros (Stewart, 2004; Thomas, 2006) es: a) su *proyecto de investigación histórica* al que incluiríamos, de igual forma, investigación sobre el origen del Teorema de la Divergencia y sus personajes involucrados; y de manera complementaria, los *proyectos aplicación tecnológica*, los cuáles se pueden enriquecer con un diseño de actividades que lleven al lector a explorar de forma sistemática la geometría y los variacional de los conceptos y teoremas implicados.
- ☼ Excepto en un libro de texto (Marsden y Tromba, 2004) es hasta el último capítulo que introducen todas la herramientas necesarias para establecer el teorema (campos vectoriales, divergencia de un campo, superficie parametrizadas e integral de superficie). En cambio, el otro libro introduce la divergencia desde el capítulo 4, convirtiéndose en un elemento no tan extraño para el lector al llegar al capítulo 8 (donde de enuncia el Teorema de la Divergencia).

Sin embargo, existe el riesgo de que la distancia –en términos de la aparición– entre las definiciones, los teoremas involucrados y el teorema mismo, dificulte una visión sistémica del Teorema de la Divergencia.

- ✿ Una constante en los tres libros de texto analizados es la complejidad implicada en el significado-interpretación de las expresiones simbólicas empleadas en el enunciado del Teorema de la Divergencia.
- ✿ En los tres casos, las definiciones siempre aparecen a priori, de ahí se articula la estructura lógica de enunciados que llevan a la enunciación del Teorema de la Divergencia. De ahí que nos surjan preguntas como: ¿Será posible hacer un libro de texto de cálculo dónde las definiciones y teoremas se establezcan a posteriori, es decir, como interpretación de fenómenos estudiados previamente (a manera de modelación matemática)? ¿Qué tan factible sería cambiar la *aplicación* por *modelación*? ¿Rescataría esta nueva visión los significados inmersos en el Teorema de la Divergencia ocultados por el proceso de Transposición Didáctica?

Conclusiones

Desde el análisis del libro de texto, tomando en cuenta el carácter protagónico de éste el diseño de clase, concluimos que el tratamiento del TD se presenta con carácter más bien teórico-algorítmico que vinculado a la fenomenología extra-matemática implicada en el mismo. Este tipo de tratamiento, en general, propicia que los contenidos del Cálculo Vectorial parezcan desvinculados del cuerpo de materias específicas de la carrera.

Podemos concluir que la matemática debe ser presentada a los alumnos como un conjunto de conocimientos que han evolucionado en el transcurso del tiempo y que continuarán evolucionando en el futuro. La elaboración de los conceptos y procedimientos es el resultado de un largo proceso. La historia de las matemáticas muestra cómo aparecen las teorías matemáticas, habitualmente en el contexto de resolución de un problema o grupo de problemas y su evolución; la presentación final en los libros de texto enmascara este proceso. No solamente sucede esto con los conceptos, sino también con los procedimientos: la historia manifiesta, por poner un ejemplo, cómo ha variado la exigencia de lo considerado como una demostración rigurosa, “lo que hoy

puede ser clasificado como un argumento no riguroso, fue aceptado hace doscientos años como tal; esto nos puede ayudar en nuestra enseñanza a comprender las dificultades de los estudiantes en orden a establecer lo que es una demostración” (Sierra, 2000, p.96).

Otra reflexión, es que la exploración **de la historia** le puede ayudar al profesor en la presentación del contenido, también a descubrir los obstáculos y dificultades que se han presentado en el desarrollo del conocimiento, así como “dar la visión de la actividad matemática como una actividad humana incardinada en el contexto socio-cultural de cada época”. Y por otro lado, para los alumnos, la historia de la matemática puede sentar las bases para un cambio de visión sobre las mismas, en la que “las matemáticas abandonen su condición de torre de marfil, de edificio acabado, restableciéndose su estatus de actividad cultural, de actividad humana, a la vez que les ayuda en su motivación para el aprendizaje” (Sierra, 2000, p.96).

En esta misma dirección, dada la importancia del Cálculo Vectorial en las asignaturas de la especialidad Electromecánica en Ingeniería, en alguna medida los atributos del *quehacer científico* deberían imponer su espíritu en las clases de matemáticas. Deberíamos encontrar relación entre las actividades resueltas en los libros de texto y los tópicos de las asignaturas de la especialidad. Los libros de texto proponen la realización de actividades en las que los rasgos del quehacer científico aparecen con baja frecuencia. Por otra parte, las estrategias de resolución aparecen muy pautadas mediante los ejemplos lo que permite concluir que, por un lado, no se da espacio a la iniciativa y a la creatividad del alumno y, por otro, se contribuye a distorsionar la imagen del científico, presentando su trabajo como algo muy estructurado y algorítmico. En palabras de Islas y Guridi (1999, p.283), “el rigor cuantitativo requiere imprescindiblemente del rigor cualitativo, conceptual, para llenar de significado una forma que, de otro modo, esta vacía de contenido fáctico”.

Esta investigación apela a la conexión entre teoría y realidad que debería promoverse en los estudiantes. Un puente muy prometedor a este respecto es *la visualización*. Tocante a este aspecto, la computadora permite establecer imágenes visuales de los fundamentos del Cálculo que enriquecen el repertorio de imágenes mentales dando al mismo tiempo una imagen de la Matemática como una actividad científica constructiva.

Las construcciones por parte del estudiante pueden ser inducidas por computadoras mediante el uso de software que permita manipular visualmente ideas matemáticas y reflexionar sobre ellas.

También, ofrecen la posibilidad de dar una existencia menos abstracta a ciertas ideas matemáticas para las que no se disponen de soportes físicos adecuados y que así se pueden manipular y tratar como objetos, o más allá del contexto visual, mediante la programación de construcciones matemáticas en un lenguaje computacional que actúe paralelamente a la construcción de los procesos matemáticos subyacentes.

Por lo anterior, sugerimos la explotación de los recursos tecnológicos para incitar el desarrollo de la visualización en el aprendizaje del Cálculo Vectorial, en particular del Teorema de la Divergencia. Por ejemplo, mediante las herramientas de simulación y modelación– ANSYS por mencionar alguna– que proveen un ambiente virtual para el aprendizaje ayudando en el entendimiento de los fenómenos físicos presentes en la mecánica de fluidos y su interacción con la medición de flujo (Moncada-Benavides y Morales-Montes, 2003; Vargas et al, 2005).

Así, la investigación planteada enfatiza la reconstrucción de una didáctica del Teorema de la Divergencia que permita al alumno hallar sentido y motivación para el estudio y comprensión de éste teorema. Apelamos a la creación de una *génesis ficticia* de los conceptos involucrados en el Teorema de la Divergencia con el propósito de facilitar su enseñanza. En otras palabras, es al docente que le corresponde realizar “una recontextualización y repersonificación del saber científico, [... buscando] situaciones que den sentido a los conocimientos por enseñar” (Brousseau, 1997).

Esto remarca la tendencia hacia la reconstrucción de una didáctica del Teorema de la Divergencia basada más en las intuiciones y en la vivencias cotidianas de los alumnos, mediante acercamientos fenomenológicos, por lo que se atiende más al fenómeno en su relación con el concepto matemático que al concepto en sí (Cantoral, 1991).

Referencias Bibliográficas

Brousseau, G. (1997). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra y I. Saiz (Eds.), *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones*. (pp. 64-94). Buenos Aires: Paidós.

Cantoral, R. (1991) Proyecto de investigación: Formación de la noción de función analítica. *Mathesis* 7(2), 223-239.

Castañeda, A. (2003) *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*. Tesis doctoral no publicada. Cinvestav, México.

González, M. y Sierra, M., (2004) Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias* 22 (3), 389-408.

Islas, S. y Guridi, V. (1999) El quehacer científico versus el quehacer áulico. Buscando rasgos del quehacer científico en libros de texto. *Enseñanza de las ciencias*, 17 (2), 281-290.

Marsden, J. y Tromba, A., (2004) *Cálculo Vectorial*. México: Pearson Addison Wesley.

Moncada-Benavides, D., y Morales-Montes, H., (2003) Aplicación práctica de la dinámica de fluidos computacional (DFC) en la medición de flujo de fluidos. *Tecnología, Ciencia y Educación* 18(2), 57-66.

Moreno, G. (2008) *El Teorema de la Divergencia en el Ámbito Escolar. Un Análisis de Libro de Texto en Ingeniería*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Sierra, M., (2000) El papel de la historia de las matemáticas en la enseñanza. En: A. Martínón (Ed.), *Las matemáticas del Siglo XX. Una mirada en 101 artículos*. (pp. 93-96). España: Nivela

Stewart, J., (2004) *Cálculo Multivariable*. México: Thomson Learning.

Thomas, G., (2006) *Cálculo Varias Variables*. México: Pearson.

Vargas, W., Riaño, C., y Pineda, L. (2005) Ambientes Virtuales Para la enseñanza de la Mecánica de Fluidos: Algunos ejemplos simplificados aplicando ANSYS. *Ciencia e Ingeniería Neogranadina*. (15), 94-115.