

UN ESTUDIO SOBRE LA DESARTICULACIÓN ENTRE LA SEMEJANZA Y LA TRIGONOMETRÍA EN EL BACHILLERATO

Patricia del Carmen Navarro, Martha Cristina Villalva Gutiérrez
Universidad de Sonora
pnavarro@astro.uson.mx, mcris@gauss.mat.uson.mx
Campo de investigación: Pensamiento Geométrico

México

Nivel: Medio Superior

Resumen. *Se reporta parte de una investigación que trata sobre el estudio local de la proporcionalidad geométrica y su articulación con el resto de los temas –particularmente la trigonometría– que conforman el curso de Matemáticas III del plan de estudios de escuelas preparatorias incorporadas a la Universidad de Sonora. En este extracto, se proponen algunos constructos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) que fundamentaron el estudio, y que en este documento tienen el propósito de darle sentido a la presentación del Marco Epistemológico de Referencia, el cual fue pieza clave en el estudio mencionado, tanto para determinar el nivel de articulación existente, como para contar con una base para proponer acciones específicas acordes a la articulación propuesta, de tal modo que mediante ellas fuera factible una construcción funcional de los conocimientos geométricos.*

Palabras clave: articulación, semejanza, trigonometría, teoría antropológica de lo didáctico

El problema

La institución educativa en la que se ubicó el análisis específico sobre la desarticulación existente entre los temas de semejanza y función trigonométrica, pertenece al sistema de escuelas preparatorias incorporadas a la Universidad de Sonora. En particular se centra en el área de “Geometría y Trigonometría” que corresponde al curso de Matemáticas III.

En el curso de Geometría y Trigonometría, la semejanza queda abandonada después de estudiarse brevemente. No parece ser el principio de una cadena de conocimiento que llega a la función trigonométrica, ésta parece surgir espontáneamente como organización auto-tecnológica. Pero formalmente la función trigonométrica está estrechamente vinculada con la semejanza.

Tal vez un motivo para esta desarticulación se debe a que históricamente la relación trigonométrica apareció posterior a la semejanza y en un contexto diferente. La semejanza está documentada como objeto de estudio en Los Elementos de Euclides. En cambio, la relación trigonométrica parece surgir como herramienta para cálculos astronómicos en los trabajos de Hiparco (190-120 a.C.), quien elaboró tablas mostrando la relación arco-cuerda, para realizar el cálculo de la posición de un planeta. Otros astrónomos griegos y navegantes islámicos utilizaron las cuerdas como herramientas, sin elaborar una teoría matemática que las contuviera. (Boyer,

1991). Posteriormente, Ptolomeo (100-170 d.C. aprox.) utilizó los elementos de Euclides para mejorar las tablas de Hiparco. Después trabajó en triángulos planos. En este proceso se gestó la idea de relaciones trigonométricas inversas. Así, introdujo las relaciones entre cuerdas y arcos como cuestiones de estudio matemático además de usarlas como auxiliares en sus trabajos de astronomía.

Lo cierto es que en la matemática sabia la geometría y la trigonometría están relacionadas indisolublemente, y el hecho de que se estudien en la institución escolar de manera desvinculada redundaría en perjuicio de la razón de existir de ambas en el currículo.

Se propone entonces, una organización matemática que tome en cuenta la articulación formal de la semejanza y la trigonometría, sin que esto signifique ofrecer una transposición más cercana a la matemática sabia y menos didáctica. El propósito es mantener la secuencia lógica de los temas para que la semejanza conserve su razón de existir en el currículo.

Desde la óptica de la transposición didáctica, como lo expresa Javier García (2005), un primer referente institucional para el análisis de la organización matemática existente, lo constituyen los Planes y Programas de Estudio. Un obstáculo importante en el análisis inicial de esta investigación, lo constituyó la ausencia de un currículo detallado para los estudios de matemáticas en este sistema de preparatorias, pues en los existentes, no se describen la posición institucional en torno a los mismos: los objetivos o competencias a desarrollar, las áreas, sectores y temas en los que se organiza el estudio de las matemáticas, la metodología sugerida o los criterios de evaluación.

Al carecer de un referente institucional vía los programas de estudio para analizar la organización matemática institucional, se propuso localizarlo vía el análisis de los textos sugeridos por las escuelas incorporadas a la Universidad de Sonora, considerándolos como una fuente de información alterna ya que son más que proveedores de recursos didácticos: son la institución que dicta las organizaciones a estudiar y determina las praxeologías que seguirán el profesor y los alumnos.

Componentes teóricos

A continuación se describen brevemente algunos de los principales componentes de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Yves Chevallard, la cual se enmarca en el Programa

Epistemológico de Investigación de la Escuela Francesa en la que contribuyen, desde la visión española, Josep Gascón y Marianna Bosch (Chevallard et al. 1997; Chevallard 1999). De esta manera, esperamos que el breve reporte que en este documento se expone adquiera cierta claridad.

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) parte de que toda actividad humana puede describirse con un modelo único: **la praxeología**. (Gascón et al, 2004).

Esto es, para realizar una labor hay que saber cómo hacerla, es decir, utilizar una técnica, *la praxis*. Si no se conoce la técnica es necesario crearla. La creación de la técnica o su uso continuo puede llevar –o no- a un conocimiento de por qué funciona, esto es, una tecnología. La tecnología es el *logos*, el saber sobre la praxis. *El saber hacer y el saber, forman la praxeología*.

El estudio es una de las actividades humanas y puede, por tanto, examinarse tomando como unidad de análisis la praxeología.

Tareas (t_i). La noción de praxeología se clarifica a partir de la agregación de tareas en tipos y géneros:

- A las labores específicas a realizar, en particular a las relacionadas con el estudio de las matemáticas les llamamos tareas. Una tarea es la acción sobre un objeto particular, como demostrar el teorema de Tales.
- Un tipo de tareas (T) es la acción que puede recaer sobre un diverso tipo de objetos: Demostrar teoremas de geometría.
- Los géneros de tareas son aquellas en las que se menciona la acción pero no se especifica el objeto sobre el que ésta recae. Ej.: Demostrar.

Técnica (\hat{o}_i). Asociada a un tipo de tareas existe una manera de realizarlas, una técnica. La técnica puede funcionar para una parte del tipo de tareas, esto es, tiene un alcance determinado. Cuando se agota una técnica es necesario crear otra más compleja, hacerla evolucionar.

Tecnología (\mathbb{T}). La tecnología permite explicar por qué una técnica es correcta y justificar su uso. Además, si se maneja adecuadamente, puede dar lugar a nuevas técnicas.

Teoría (Θ). La teoría explica las tecnologías como la tecnología explica la técnica. Es un nivel más profundo de explicación, más cerca del saber sabio.

Praxeologías. Como se dijo antes, la relación entre tipos de tareas, técnica, tecnología y teoría constituye una praxeología la cual tiene dos componentes: el saber y el saber hacer. El primero tiene relación con la tecnología y la teoría, el segundo con la práctica.

Podemos clasificar las praxeologías según el predominio del saber que se manifieste en ellas:

- Puntuales. La praxeología se llama puntual si se refiere a un solo tipo de tareas en la que rara vez se hace uso de la tecnología.
- Locales. La agregación de estas organizaciones puntuales alrededor de una tecnología da lugar a una praxeología local.
- Regionales. Cuando se refieren diversas tareas, técnicas y tecnologías que están centradas en una teoría, las praxeologías son regionales.
- Globales. La combinación de praxeologías regionales que integra varias teorías en una institución dada.

La construcción del MER

En una institución escolar dada, existe siempre una manera de trasladar el saber sabio a los estudiantes. A la concreción resultante de dicha acción, la Teoría Antropológica de lo Didáctico le da el nombre de *Modelo Epistemológico de Referencia* (MER), el cual podrá ser explícito o quedar sobrentendido. Pero para el investigador que encuentra un problema y quiere proponer una solución, es indispensable tener este modelo claramente formulado. De otra manera no tiene una base firme tanto para analizar las organizaciones didácticas que le interesan como para proponer una organización alternativa. Igualmente, el modelo es necesario para estudiar el saber matemático antes de transformarlo en saber a enseñar.

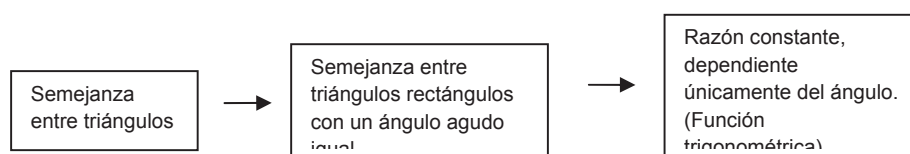
Este modelo es una actividad de estudio hipotética. En palabras de Bolea et al: "...es "hipotética" en el sentido de que no existe ni ha existido nunca como organización matemática escolar" (Bolea et al, 2001).

En consecuencia, con el fin de analizar las organizaciones matemáticas de semejanza de triángulos y de la función trigonométrica, se propuso un modelo epistemológico de referencia (MER en adelante). El MER constituyó también una propuesta alternativa a las praxeologías vigentes, así como un referente para el diseño de una actividad de estudio con la que se ejemplificó la aplicación de las aportaciones de la Teoría Antropológica en el trabajo docente:

Se propuso diseñar una secuencia de tareas que se realizaran con técnicas que fueran desde la semejanza entre triángulos hasta la función trigonométrica. Esta conexión se pudo conseguir manteniendo la igualdad entre los ángulos como el centro de la atención.

Esta secuencia diseñada tiene la característica de que las técnicas utilizadas van creciendo en complejidad y respondiendo siempre a la teoría de la semejanza. Además, pudo ser ampliada hasta cubrir un número de tareas lo suficientemente grande como para llegar a generalizar la constancia de la razón entre los lados de un triángulo rectángulo cuando el ángulo agudo se mantiene sin variación.

Lo anterior resultó en un campo de problemas que requieren más de una técnica pero respaldadas por la misma tecnología. Es decir, en una praxeología local. La intención fué que se estableciera una conexión permanente entre la semejanza y la razón trigonométrica de manera que el estudiante fuera capaz de distinguir las situaciones en las que el uso de esta función sea la herramienta adecuada aunque sean problemas que enfrente por primera vez.



El esquema propuesto es muy sencillo:

- Tareas que se resuelvan con técnicas de semejanza.
- Tareas que se puedan resolver con técnicas de semejanza pero en las que éstas resulten muy costosas.

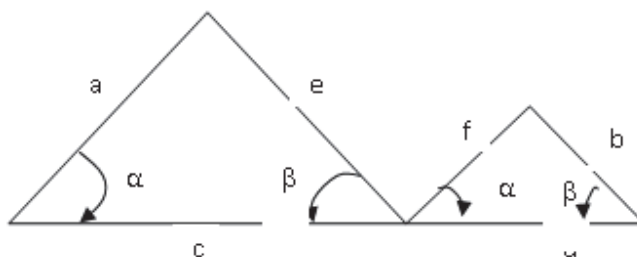
- Tareas en las que se identifique la constancia de la razón entre triángulos rectángulos con un ángulo agudo igual.
- Tareas que se resuelvan con uso de la razón trigonométrica.

La modelización de las tareas no se diferencia mucho de las clásicas. La aportación que intenta esta propuesta estriba más bien en el orden de la secuencia, que tiene la característica de vincular semejanza y trigonometría. Esto da una razón de ser al estudio de estas organizaciones matemáticas y la posibilidad de reconocer situaciones en las que éstas faciliten la técnica adecuada para resolverlas.

Es necesario partir de tareas que llamen a las técnicas que proporciona la tecnología de la semejanza. El siguiente desarrollo esquematiza la propuesta:

1. Si se tienen dos triángulos semejantes y si de uno de ellos se desconoce un lado, se puede utilizar la proporción entre sus lados correspondientes para calcular su medida.

t_1 Utilizar la proporcionalidad de los lados de dos triángulos semejantes para encontrar la medida de un lado desconocido



o_1 La técnica para resolver esta tarea es plantear las ecuaciones derivadas de la proporcionalidad entre los lados de los triángulos semejantes.

$$\frac{a}{e} = \frac{d}{f}, \quad \frac{c}{e} = \frac{d}{f}, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$a = \frac{ed}{f}, \quad c = \frac{ed}{f}, \quad a = \frac{cb}{d}$$

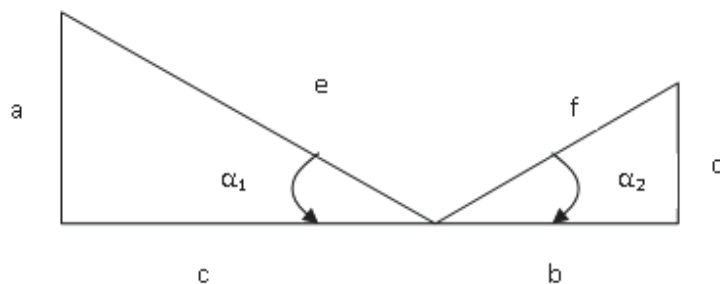
La técnica anterior es respaldada por la tecnología de los casos de semejanza entre triángulos. Dos triángulos son semejantes si tienen:

- a) dos ángulos iguales.
- b) dos lados proporcionales e igual el ángulo entre ellos.
- c) tres lados proporcionales.

En esta organización didáctica, el paso siguiente es una actividad (tarea t_2) que utilice la técnica anterior pero aplicada al caso particular de triángulos rectángulos. De esta manera, la tecnología sigue siendo

t_2 Calcular la medida del lado de un triángulo rectángulo dado uno de sus ángulos agudos.

Para el caso de los triángulos rectángulos, la semejanza queda establecida si tienen un ángulo agudo igual. Entonces, para cada ángulo agudo y para cada par de lados, existe una razón fija.



La técnica es similar y la tecnología es la misma de t_1 , pero para cada

$$\frac{a}{e} = \frac{d}{f} = \text{constante}, \quad \frac{c}{e} = \frac{b}{f} = \text{constante} \quad \frac{a}{c} = \frac{d}{b} = \text{constante}$$

Lo cual permite que la técnica evolucione a una menos costosa que \hat{o}_1 ya que elimina la necesidad de tener dos triángulos semejantes.

$$\hat{o}_2: \begin{array}{l} \frac{a}{e} = k_1 \\ \frac{c}{e} = k_2 \\ \frac{a}{c} = k_3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{e}{a} = k_1 \\ \frac{e}{c} = k_2 \\ \frac{a}{c} = k_3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{a}{c} = k_3 \\ \frac{e}{c} = k_2 \\ \frac{a}{e} = k_1 \end{array}$$

Una vez establecido que la razones entre los lados de un triángulo rectángulo permanece constante para un ángulo dado, tiene sentido darle un nombre a cada una de estas razones y se puede manejar una técnica que las utilice:

Sean $k_1 = \text{sen } \alpha$, $k_2 = \text{cos } \alpha$ y $k_3 = \text{tan } \alpha$

$$\hat{o}_3: a = e \text{ sen } \alpha, c = e \text{ cos } \alpha, a = c \text{ tan } \alpha$$

En este proceso de evolución de técnicas para las tareas del mismo tipo (T_2), se puede apreciar que la praxeología tiene siempre como teoría la semejanza entre triángulos (22), su tecnología es el conocimiento de los casos de semejanza (22). El uso de las funciones trigonométricas aparece como una economía de procedimiento, dado que se ha reconocido como un caso particular de los casos de semejanza. Además, alcanza una gran variedad de cuestiones problemáticas. En otras palabras, se ha construido una praxeología local, [$T_2/\hat{o}_2/\hat{o}_3$].

Esta praxeología local puede evolucionar hacia una regional, que dejará de lado su origen geométrico una vez que haya sido puesta en funcionamiento en un espectro amplio de problemas.

Resultados del análisis de textos

Además de la separación de los temas de semejanza y trigonometría en diferentes capítulos, en el desarrollo de cada tema, los libros que se analizaron, Fuenlabrada (2004) y Guzmán (2005), exhiben primero la tecnología, después exponen y ejemplifican la técnica ya construida y finalmente aparecen las tareas. Se identifican algunas praxeologías puntuales, sin embargo, los problemas o tareas siempre se pueden resolver con la técnica dada, no hay lugar para la exploración y es poco probable que ocurra el momento de la evaluación. En otras palabras, este

orden detiene el tiempo didáctico ya que entorpece la concatenación de los diferentes momentos de estudio.

Es posible que la desarticulación de semejanza y trigonometría en los libros esté relacionada con la necesidad de utilizar la primera en la demostración de teoremas que tratan las propiedades de los polígonos y que aparecen inmediatamente después del tema de triángulos. Esta puede ser una razón válida para separar los temas. Pero la semejanza de triángulos tendría que ser retomada para darle un sustento tecnológico a la función trigonométrica. No se requiere mucho tiempo para abordar por segunda vez la semejanza y enfatizar los teoremas que justifican el carácter funcional de la razón trigonométrica. De esta manera se resolvería el problema operativo del curso y se salvaría la articulación.

Referencias bibliográficas

Bolea, M., Bosch, M. y Gascón, J. (2001) *Recherches en didactique des mathématiques* 21 (3), 247-304.

Bosch, M. y Gascón, J. (2004). *La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos*, Universitat Ramon Llull, Universitat Autònoma de Barcelona. En prensa

Boyer, C. (1991). *A History of Mathematics*. Recuperado el 2 de noviembre de 2008 en www.fractus.uson.mx/papers.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Madrid: Horsori.

Chevallard, Y. (1999), El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19 (2), 221-266

Fuenlabrada, S. (2004) *Geometría y trigonometría*. México: McGraw Hill.

García, J. (2005), *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Jaén.

Gascón, J. (2002). *El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas*. Universitat Autònoma de Barcelona. En prensa

Gascón, J. (2003) Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. *Revista SUMA 45*, 25-34.

Gascón, J. 2004. *Matemáticas en Secundaria y Universidad: razones y sinrazones de un desencuentro*, Comunicación invitada en las Jornadas sobre Educación Matemática (Santiago de Compostela, 16-18/09/2004).

Guzmán, A. (2005) *Geometría y trigonometría*. México: Publicaciones Cultural.