OBSTÁCULOS Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA EUCLIDEANA, RELACIONADOS CON LA TRADUCCIÓN ENTRE CÓDIGOS DEL LENGUAJE MATEMÁTICO, EN EL NIVEL LICENCIATURA

Marisol Radillo Enríquez
Universidad de Guadalajara (México)
marisolradillo@yahoo.com.mx

Resumen. Se reportan los resultados parciales de una investigación exploratoria cuyo objetivo fue identificar las dificultades relacionadas con el uso del lenguaje matemático en la resolución de problemas de Geometría Euclideana, que enfrentan los estudiantes de ingeniería de la Universidad de Guadalajara, México. La metodología se centra en una descripción lingüística de las diferencias demostrables entre el tipo de texto que se requiere en la solución de diversos tipos de problema y las respuestas redactadas por los estudiantes, consideradas como registros objetivos de su actividad cognitiva. Los errores detectados se clasificaron en relación a los procesos de traducción entre los diferentes códigos del lenguaje matemático. Se comentan algunos errores y se expone el análisis utilizado para su clasificación.

Palabras clave: lenguaje matemático análisis de errores, resolución de problemas, geometría

Abstract. In this article partial results are reported from an exploratory research project aimed at identifying the difficulties faced by students of University of Guadalajara when solving problems of Euclidian Geometry, connected with the mathematic language. The methodology focuses in a linguistic description of the kind of text that corresponds to the solution of a specific problem, and the student's responses considered like objective registration of their cognitive activity. The student's errors were classified in the relation with translate processes between the codes of mathematic language. In this paper we include some errors and expose them to the linguistic analysis for its classification.

Key words: mathematics' language, error analysis, problem solving, geometry

Introducción

Aprender matemáticas es sinónimo de resolver problemas; aprender a resolver problemas implica adquirir el dominio de los distintos códigos del lenguaje matemático (verbal, simbólico, gráfico, numérico, etc.) que se requieren para operar con los objetos matemáticos y expresar las relaciones entre ellos. Si un problema matemático es expresado en forma verbal, el estudiante debe comprender la formulación que está expresada, no en el lenguaje cotidiano, sino en un *lenguaje especializado* de las matemáticas, ya que los significados de los términos empleados en este ámbito pueden diferir de sus acepciones en el lenguaje cotidiano (Pimm, 1999; Ortiz, Batanero & Serrano, 2001; Alcalá, 2002; Ardila, 2002; Palencia & Talavera, 2004).

El lenguaje utilizado en los textos y cursos de geometría euclideana suele ser poco familiar para los estudiantes, de manera que un error en la interpretación del planteamiento de un problema puede conducir a una solución equivocada o incompleta. De este tipo de situaciones surgió el interés de brindar mayor atención al lenguaje empleado en la formulación y resolución de todas las actividades didácticas, así como investigar hasta dónde influye el desconocimiento del lenguaje matemático en los errores que cometen los estudiantes geometría euclideana del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara, México (Radillo, 2009).

El término *obstáculo* se utiliza como sinónimo de *dificultad*, mientras que un *problema* es una cuestión por resolver. Los *errores* son considerados solamente como transgresiones a las normas establecidas. La *representación* de objetos y enunciados matemáticos se aborda desde un punto de vista lingüístico.

Soporte teórico-metodológico

El soporte teórico fue construido desde la lingüística, la lógica teórica y la axiomática como disciplinas normativas, por lo que la metodología se centra en una descripción sobria de las diferencias demostrables entre el tipo de texto que se requiere en la resolución de cada problema y las respuestas redactadas por los estudiantes, consideradas éstas como registros lingüísticos y objetivos de su actividad cognitiva al resolver el problema. Este enfoque difiere respecto a la manera tradicional de proceder en la Matemática Educativa, pero no se contrapone a ella, sino que solamente plantea otra clase de pregunta de investigación: ¿Cuáles son los errores relacionados con la traducción entre los códigos lingüísticos de la geometría euclideana que enfrentan los estudiantes del CUCEI?

Para contestar esta pregunta se parte del supuesto de que los *errores* en la solución de problemas de la geometría euclideana se clasifican en tres tipos, no excluyentes entre sí:

(a) de representación, ya sea verbal, gráfica y/o simbólica, así como los procesos de traducción entre éstas; (b) deductivos o de razonamiento, en cuanto a la lógica seguida para solucionar un problema dado; (c) axiomáticos o de aplicación de teoría, relativos a la disponibilidad funcional de los conocimientos previos necesarios para resolver el problema. El primer tipo de error corresponde al factor lingüístico y los dos últimos a las características esenciales de la materia. Cada tipo de error puede tener consecuencias en los otros dos.

La clasificación de los errores de representación requirió establecer los códigos que rigen las formas de representación más comunes de la geometría euclideana:

- *Verbal*. Descripción de un objeto o enunciado matemático expresado solo en palabras, ya sea de manera oral o escrita. En este caso se utiliza el Español Especializado de la geometría euclideana (EE).
- *Simbólica*. Descripción de uno o más objetos matemáticos, sus propiedades y/o relaciones, expresada únicamente con la notación matemática tradicional (SIM).

- *Gráfica*. Imagen de uno o más conceptos matemáticos y las relaciones entre ellos. Suele incluir letras que asignan nombres específicos a los componentes de la figura (GRAF).

Las tres formas de representación y los *procesos de traducción* entre ellas se muestran en la figura 1. La relación entre estas tres formas de representación se pone de manifiesto en la resolución de problemas de la geometría euclideana. Por ejemplo, el planteamiento de una demostración requiere un *proceso de traducción* de la representación verbal a sus correspondientes representaciones gráfica y simbólica.

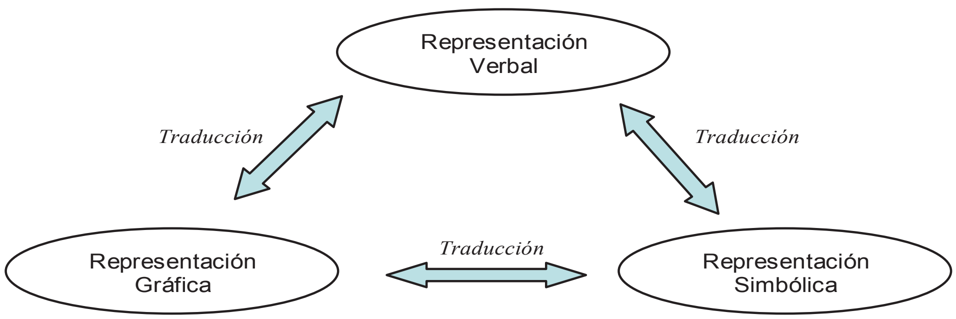


Figura 1. Formas de representación de los objetos y enunciados matemáticos y los procesos de traducción entre ellas.

Los códigos del lenguaje matemático

A cada forma de representación corresponde un *código* o conjunto de normas que la rigen. Algunas normas no son universales, pues difieren de acuerdo al grupo social que las utiliza, lo que en lingüística se denomina *variantes dialectales*. Por ejemplo:

- La notación simbólica para la magnitud de un segmento se puede encontrar como AB ó $|\overline{\mathrm{AB}}|$, mientras que un rayo o semirrecta puede simbolizarse como $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{A}}$, ó $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, en diferentes textos.

- En algunas instituciones se define el triángulo isósceles como aquel que tiene *solo* dos lados de igual longitud, mientras que en otras se considera que este tipo de triángulo contiene *al menos* dos lados iguales y por tanto el triángulo equilátero también es isósceles.

- El código gráfico es aún más laxo que los anteriores y prueba de ello son las diversas maneras de representar una recta, como se muestra en la figura 2.

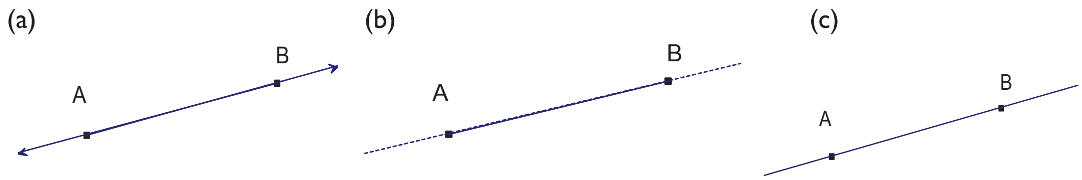


Figura 2. Tres formas equivalentes de representación gráfica de una recta.

A diferencia de los códigos verbal y simbólico, el código gráfico no contiene oraciones en sentido estricto, ya que los trazos no son signos ordenados (*n*-tuplos de signos), y por ende pueden ser leídos de diversas maneras. Mientras que las oraciones de los otros dos códigos son conjuntos ordenados de signos que no pueden agruparse de cualquier manera puesto que se altera su significado, en el código gráfico es más adecuado referirse a "combinaciones" de elementos tales como puntos, líneas rectas o partes de ellas, ángulos, polígonos, circunferencias, etc.

Para efectos de la investigación se construyeron los códigos de cada forma de representación de acuerdo a las normas institucionales del CUCEI y a las partes de la Lingüística aplicables al lenguaje matemático: sintaxis, léxico y morfología (Leal, 2000). Una vez que se hubo explicitado cada código fue posible analizar las respuestas de los estudiantes y determinar si se quebrantaba alguna regla determinada. Por ejemplo, en CUCEI se especifica claramente la diferencia entre las notaciones de una recta ($\overleftrightarrow{AB}$), un rayo ($\overrightarrow{\mathrm{AB}}$), un segmento ($\overline{AB}$) y/o la magnitud de un segmento (AB), de manera que si un alumno denota un rayo como $\overrightarrow{\mathrm{B}}$, se considera como un error de sintaxis ya que quebranta una norma institucional. Pero si el enunciado del problema involucra una recta y el estudiante la simboliza como $\overline{AB}$, el error es considerado de traducción entre el código verbal y el simbólico (VERB → SIM), ya que lo que se tradujo a símbolos es "segmento", en lugar de "recta".

Procesos de traducción entre códigos

En una primera fase de la investigación, a 4 semanas del inicio del curso, se aplicó un cuestionario con ejercicios de traducción entre códigos. En el análisis de las respuestas se detectaron algunos términos código verbal que condensan mucha información y cuya traducción a alguno de los otros dos códigos representa un *obstáculo* para los estudiantes.

Tal es el caso de la representación simbólica del término "mediatriz de un segmento", pues es necesario expresar que existe una recta (la mediatriz) perpendicular a un segmento ($\overleftrightarrow{MN} \perp \overline{AB}$) y que lo divide en dos partes iguales ($AM = MB$). También es importante simbolizar cuál es el punto de intersección, lo cual se puede hacer de diversas maneras: $\overleftrightarrow{MN} \cap \overline{AB} = M$, ó $\overleftrightarrow{MN} \perp \overline{AB}$ en M, o con dos enunciados de pertenencia: $M \in \overleftrightarrow{MN},\ \ M \in \overline{AB}$. Solamente de esta manera, las traducciones EE → SIM y SIM → EE darán el mismo resultado de traducción en ambas direcciones (figura 3).

$$\boxed{\overleftrightarrow{MN} \perp \overline{AB},\ \ AM = MB,\ \ \overleftrightarrow{MN} \cap \overline{AB} = M}$$

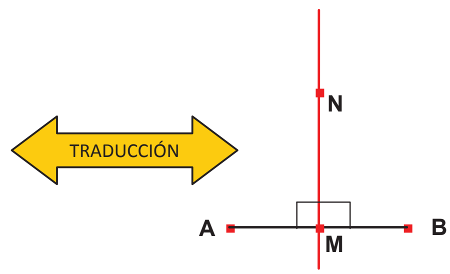
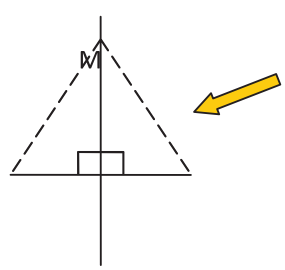


Figura 3. Al planteamiento simbólico dado corresponde la representación gráfica de la mediatriz de un segmento, y viceversa. SIM → GRAF, GRAF → SIM

Si faltase alguna de estas tres expresiones simbólicas, su traducción a gráfica o a enunciado verbal podría ser diferente; esto significa que las funciones de mapeo entre los códigos del lenguaje matemático no siempre son unívocas, como se expone a continuación. En la notación simbólica que aparece en la figura 4 se omite que M es el punto de intersección entre la mediatriz y el segmento; por tanto hay más de un esquema que le corresponde a la traducción, puesto que en ambos casos se cumple la condición AM = MB.



$$\boxed{\overleftrightarrow{MN} \perp \overline{AB}\text{, AM = MB}}$$

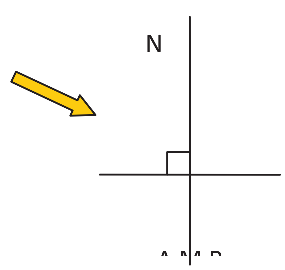


Figura 4. Dos representaciones gráficas que corresponden a un mismo planteamiento simbólico. SIM → GRAF

Errores en solución de problemas

En otra fase de la investigación, a 3 meses de iniciado el curso, se pidió a 37 estudiantes que demostraran el teorema del ángulo semi-inscrito a una circunferencia.

En la figura 5 se aprecia la respuesta de un estudiante que contiene errores de representación sin consecuencias en los otros dos tipos de error, ya que el resto de la demostración es correcta. El primer error de representación está en la hipótesis (1), pues el texto del problema se refiere a una circunferencia (□) pero el estudiante utiliza el símbolo de círculo (□) lo cual se cataloga como un error de representación en la traducción EE →SIM, de acuerdo a las normas institucionales del CUCEI-U. de G.

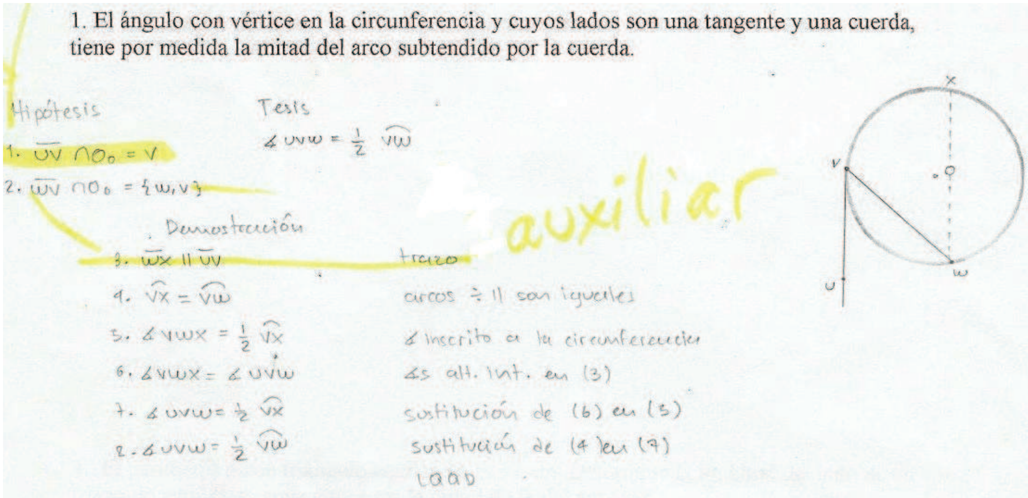


Figura 5. Errores de representación en una demostración (alumno #45).

Otro error de representación en el mismo enunciado consiste en simbolizar la tangente a la circunferencia utilizando un segmento en vez de una recta, lo cual tiene otras interpretaciones. Si se parte de la expresión simbólica utilizada por el estudiante, $\overline{UV} \cap \square_O = V$ para la traducción SIM → GRAF, se obtendrían las siguientes representaciones gráficas que no corresponden a una tangente (figura 6).

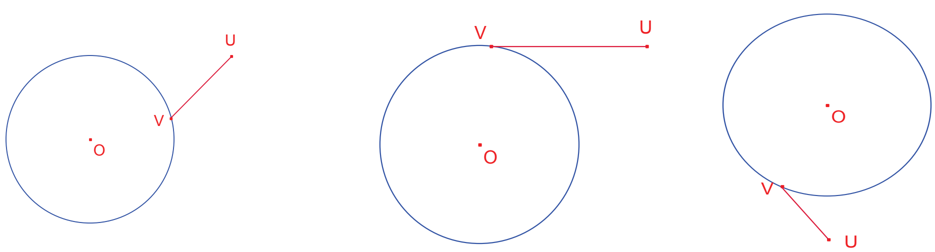


Figura 6. Representaciones gráficas correspondientes a la expresión $\overline{UV} \cap \square_O = V$

En otro problema planteado a los mismos estudiantes se pide demostrar que "si del vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo se traza una perpendicular a la hipotenusa, la perpendicular es media proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa". A continuación se muestran algunas respuestas de los estudiantes, su análisis lingüístico y los errores detectados.

La respuesta que se muestra en la figura 7 contiene varios tipos de error:

- Las hipótesis están incompletas, pues no se estipuló que ABC es un triángulo rectángulo; puesto que esta información es indispensable para establecer la semejanza de los triángulos formados, este error cataloga tanto de representación (traducción incompleta EE→ SIM), como de tipo deductivo.
- La tesis está mal planteada, lo cual se considera tanto un error de representación como axiomático. En cuanto a la representación, hay un error de traducción VERB → SIM, pues no se ha simbolizado una media proporcional como se especifica en el teorema; también es un error axiomático (aplicación de teoría) ya que dicha tesis no es una proporción válida entre los triángulos que se forman en la figura, de los cuales tampoco se puede demostrar que sean semejantes porque falta una hipótesis.
- Otro error está en la justificación de la semejanza de triángulo (paso 4), por el criterio "*la*", que no existe. Este último error es de tipo axiomático y está ligado al anterior, de representación y deductivo, ya que forma parte de la cadena de proposiciones que parten de las hipótesis para demostrar la validez de la tesis.

Es de llamar la atención que el estudiante concluye la demostración con la "tesis" que planteó.

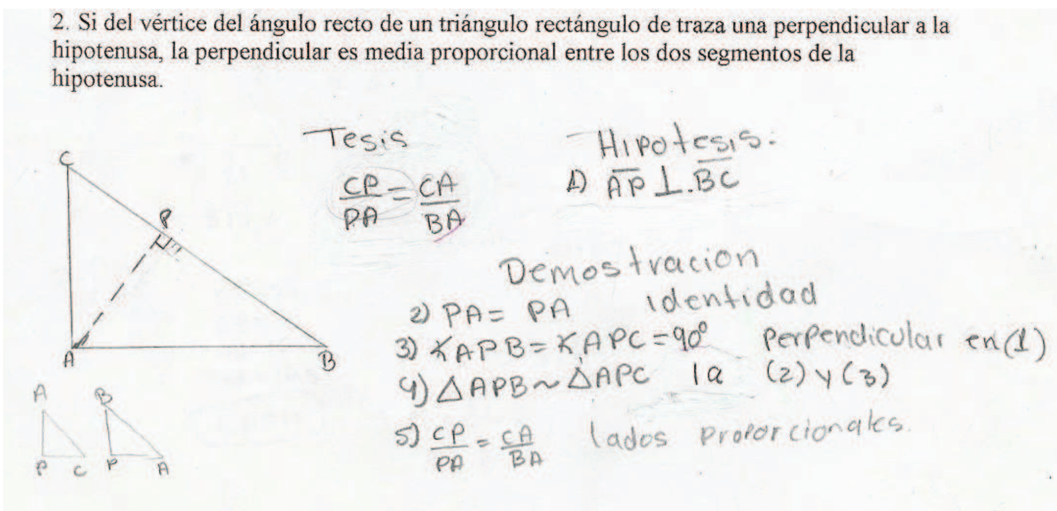


Figura 7. Errores axiomáticos y de aplicación de teoría en la demostración de un teorema (alumno #15).

Consideraciones finales

La solución de los problemas matemáticos implica que el estudiante produzca un texto determinado, el cual es susceptible de un análisis objetivo según los principios explícitos de la sintaxis y la morfología generales. Por ello es que se asume que el análisis lingüístico es la base de un estudio cognitivo completo, mismo que podrá llevarse a cabo en etapas posteriores de la investigación.

Si bien fue posible identificar algunas causas y consecuencias de los errores relacionados con el lenguaje matemático, no es posible hacer generalizaciones debido a la limitada población de estudio. Aún así, se estableció de manera tentativa una tipología de errores en la solución de problemas de la geometría euclideana, la cual consta de tres grupos de acuerdo a las características esenciales de esta materia y al factor lingüístico:

- Deductivos
- Axiomáticos o de aplicación de teoría
- De representación:
    - En un solo código (SIM, GRAF ó VERB), en referencia a las normas institucionales.
    - De traducción: VERB → SIM, VERB → GRAF, SIM →VERB
- SIM → GRAF
- GRAF →SIM
- GRAF →VERB

Otro hallazgo importante fue identificad los términos complejos cuya traducción a alguno de los otros dos códigos representa un obstáculo para los estudiantes. Tal es el caso de términos como "bisectriz", "mediatriz", "equidistar", "circunscrito", "inscrito", "semi-inscrito", y los sintagmas que se forman con ellos en la representación verbal ("punto equidistante de dos rectas", "cuadrilátero circunscrito a una circunferencia", etc.). Se recomienda que los profesores aborden con detenimiento los conceptos matemáticos relacionados con éstos términos y que los alumnos se ejerciten en las diversas formas de representación de cada uno de ellos y los procesos de traducción entre ellas.

En resumen, estos hallazgos aportan herramientas para llevar a cabo el análisis puntual de los ejercicios de los estudiantes en todas las tareas que se utilizan en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, así como una exploración más profunda de los aspectos léxico-sintácticos del lenguaje matemático escolar. Se espera que los resultados mostrados constituyan la base para plantear hipótesis y métodos de intervención destinados a mejorar el aprendizaje de los estudiantes de matemáticas.

Si se ha logrado al menos intrigar al lector y despertar su curiosidad sobre el gran potencial de estas nuevas herramientas, la investigación que se reporta habrá cumplido con creces su principal objetivo.

Referencias bibliográficas

Alcalá, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona: Grao

Ardila, A. (2002). El lenguaje matemático y el usual, como mediador de la comunicación. *Acta Latinoamericana de Matemática*, Vol. 15, pp. 1169-1173

Leal C., F. (2000). Diez preguntas sobre el lenguaje, y un intento por responderlas desde una perspectiva principalmente sintáctica. En: *Una mirada múltiple sobre el lenguaje,* pp. 33-92, coord. Víctor Alcaraz. Guadalajara: Editorial de la Universidad de Guadalajara.

Palencia, A., Talavera, R. (2004). Estrategias innovadoras para la comprensión del lenguaje matemático. *Revista Ciencias de la Educación*, 4 (1) 7-60

Pimm, D. (1999). *El lenguaje matemático en el aula.* 2ª Edición. Madrid: Ed. Morata.

Ortiz, J. J., Batanero, C., Serrano, L. (2001). *El lenguaje probabilístico en los libros de texto*. Consultado el 20 de octubre de 2004 en: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/SUMALENGUAJE2001.pdf

Radillo, M., Varela, S. (2007). Obstáculos en el aprendizaje de la geometría euclideana, relacionados con la traducción entre códigos del lenguaje matemático, en R. Abrate, & Pochulu, M. (Ed.), *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de matemática* (pp. 263-280). Argentina: Universidad Nacional de Villa María.

Radillo, M. (2009). *Obstáculos relacionados con las deficiencias en la traducción entre códigos en la solución de problemas de la Geometría Euclideana en el nivel de licenciatura*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Guadalajara, México.

Rico, L. (2000). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática*. Consultado el 8 de noviembre de 2006 en: http://www.ugr.es/~seiem/Actas/Huelva/LRico.htm