

## EL CAMBIO DE VARIABLE EN LA TRANSFORMADA DE LAPLACE: RESULTADO DE UNA INVESTIGACIÓN

Ramón Flores Hernández

Instituto Tecnológico de Saltillo y Universidad Autónoma de Coahuila  
 rnfloresh@hotmail.com

(México)

**Resumen.** En este documento se presenta la parte final de una investigación acerca del cambio de variable (cv) y el estado que guarda en la matemática escolar. Se presenta los resultados de varias puestas en escena de secuencias didácticas, donde se involucra la transformada de Laplace en el contexto de las Ecuaciones Diferenciales con el fin de utilizar el cv de manera protagónica, produciéndose el diseño de una situación de aprendizaje. Lo anterior se ubicó dentro de las fases de Experimentación y, Análisis a Posteriori y Validación de una Ingeniería Didáctica.

**Palabras clave:** cambio de variable, ecuación diferencial, transformada de Laplace

**Abstract.** In this document we present the final part of an investigation about the variable change (cv) and the state that keeps in the school mathematics. We are laying the results of several stages of didactic sequences, where the Laplace transformed becomes jumbled in the context of differential equations, in order to use the variable change playing a leading role, producing the design of a learning situation. All of this, was located within the phases of Experimentation and, Posteriori Analysis and Validation of a Didactic Engineering.

**Key words:** variable change, differential equations, Laplace transformed

### Introducción

El problema de investigación consistió en hacer explícito el cv, de tal manera que se pudiera descubrir estrategias y propiedades inherentes al cv que ayudaran a facilitar la enseñanza-aprendizaje de elementos del cálculo estudiado en la Ingeniería.

El planteamiento inicial permitió proponer algunas preguntas del problema, que llevaron a determinar si es o no posible tener un mecanismo que induzca a establecer un proceso explícito de enseñanza del cv. Debido a esto, dichas interrogantes fueron tomadas como guía para solventar la problemática planteada, que enseguida se enuncian:

1) ¿Cómo vive actualmente el cv en la enseñanza? 2) ¿Qué significados posee el cv dentro del sistema didáctico? 3) ¿Qué papel juega el cv en la comprensión del cálculo? 4) ¿Qué mecanismos cognitivos subyacen al surgimiento de una variable adicional que permita minimizar la dificultad de un proceso? 5) ¿Qué es lo que posibilita la epistemología del cv? 6) ¿Qué obstáculos están asociados al cv? 7) ¿Qué elementos de orden didáctico podemos obtener para la enseñanza del cálculo al reconocer el cv como un proceso explícito?

### Marco teórico y metodológico

Las primeras seis preguntas permitieron abordar la pregunta siete que fue tomada como el objetivo general. Además, estas interrogantes coadyuvaron a estructurar el marco teórico, ya

que sus dominios cubren las componentes del sistema didáctico: el profesor, el estudiante y el saber enseñado.

Así por ejemplo: las preguntas 1 y 2 caen en el ámbito de la Transposición Didáctica, ya que se observó en qué medida el cv ha sufrido ajustes didácticos y cuáles son, y cuales actualmente encontramos en el “saber enseñado” (Chevallard, 1991). Las preguntas 3 y 4 se ubican dentro de la cognición y fueron tratadas con base en la actividad cognitiva de conversión de las representaciones semióticas de un registro a otro bajo la noción de no-congruencia de las representaciones (Duval, 1995; 1998). Las preguntas 5 y 6 se ubican en la dimensión epistemológica, elemento primordial en las investigaciones en matemática educativa, ya que nos conduce a estudiar el conocimiento; de hecho, nuestro trabajo docente es indudablemente un problema epistemológico debido a que siempre tiene que ver con la construcción del conocimiento matemático. Así pues, la componente epistemológica implicó conocer el origen y desarrollo del conocimiento del cv, así como su funcionamiento y sus diversas formulaciones (Cauchy, 1981; Collette, 1986; Edwards, 1979; Newton, 2001; Ríbnikov, 1987).

Respecto al aspecto metodológico, se utilizó la metodología de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995; Douady, 1995). En esta metodología resalta la Teoría de las Situaciones Didácticas, la que debe conducir a los estudiantes a situaciones de acción, situaciones de formulación y a situaciones de validación. Mientras la actividad del profesor es primordial en la fase de institucionalización del nuevo saber adquirido (Brousseau, 1998).

### **Antecedentes**

Con base en los resultados obtenidos de las dos primeras fases de la Ingeniería Didáctica: Análisis Preliminar, presentado en Flores (2007), referido a la planeación y; Concepción y Análisis a Priori, presentado en Flores (2009), referida al diseño; se llegó a las fases de Experimentación, que es la puesta en escena de la situación didáctica y; al Análisis a Posteriori y Validación, refiriéndose a la validación de las hipótesis al confrontar los análisis a priori y a posteriori.

Todo lo anterior condujo al diseño de una primera secuencia didáctica exploratoria compuesta por cuatro actividades, utilizando principalmente el tema de la Transformada de Laplace bajo el contexto de las Ecuaciones Diferenciales. La actividad 1 pretende abrir camino al cv, al mostrar y hacer que el estudiante trabaje con el cv como acción principal, en el contexto de la integral. En cuanto a la Actividad 2, contiene aspectos iniciales sobre las ecuaciones diferenciales y el cv. Además, contiene la Transformada de Laplace en las Ecuaciones Diferenciales y el cv. La Actividad 3 contiene la Transformada Inversa de Laplace en las Ecuaciones Diferenciales y el

cv, y el concepto de solución de una ecuación diferencial. La Actividad 4 permite reafirmar y sintetizar lo aprendido en las actividades anteriores.

Bajo esta secuencia didáctica se pretende que el estudiante logre los siguientes objetivos (conjunto de hipótesis):

1). Construir el método que se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes a través de un medio que involucra un cv como lo es, la Transformada de Laplace. 2). Construir la noción de solución de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, utilizando como medio al cv. 3). Que sea capaz de localizar y manipular el cv en las diferentes actividades. 4). Que logre ver la importancia del cv en la resolución de las actividades planteadas. 5). Se espera que en la fase de institucionalización se refuercen las nociones generadas por los estudiantes. 6). Se espera que el último problema lo resuelvan satisfactoriamente al aplicar los elementos construidos en los anteriores problemas.

### La fase de experimentación

Esta secuencia se fue modificando a través de las diferentes puestas en escena, debido a las observaciones hechas en las situaciones a-didácticas de acción, formulación y validación, además en la fase de institucionalización. Las modificaciones fueron en cuanto a redacción, en cuanto a modificar elementos matemáticos y en cuanto al número de actividades. Se conservó la estructura básica de la secuencia; es decir, la resolución de una ecuación diferencial (no se cambió la ecuación utilizada), resaltando el cv.

### La implementación

La secuencia se aplicó en 5 ocasiones en un periodo de 2 años. Utilizando una videgrabadora en la fase de institucionalización y grabadora de audio en el resto de las fases, apoyos aplicados para analizar de manera más adecuada los procesos cognitivos de los estudiantes en situación escolar.

Se formaron equipos de 3 o 4 estudiantes de ingeniería de la materia de matemáticas V. La duración de aplicación varió: de 1:30 a 2:00 horas, incluyendo la fase de institucionalización.

La secuencia que sigue muestra el resultado final de cuatro aplicaciones modificadas en cada puesta en escena. A continuación se explica brevemente dichos cambios: en la segunda aplicación se modificó la Actividad 4, cambiándose la ecuación diferencial  $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$  y condiciones iniciales  $y(0) = m$ ,  $y'(0) = n$  por la que aparece en esta secuencia. En las aplicaciones tercera y cuarta las modificaciones fueron de redacción, además, en la cuarta puesta en escena se omitió la Actividad I sólo para economizar el tiempo de aplicación, pero en general, es necesario incluirla para mayor comprensión del cv.

**Actividad 1**

Si en la integral  $\int (1/e^x + e^{-x}) dx$  se hace el cambio de variable  $e^x = t$  para poder integrarla,

- ¿Podrías calcularla? ¡Inténtalo!
- ¿Qué cambio de variable puedes inventar para integrar  $\int (1/1 + \sqrt{x}) dx$ ? ¡Resuélvela!

**Actividad 2**

Cuando se tiene una ecuación diferencial donde las variables han sido separadas, por ejemplo  $(3x^2 + x)dx = e^y dy$ , el siguiente paso es aplicar la integral en ambos miembros de la igualdad, quedando  $\int (3x^2 + x)dx = \int e^y dy$ .

- Si nos ubicamos en la ecuación diferencial  $y'' + 4y' + 4y = t^2 e^{-2t}$  sujeta a  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$  y le aplicamos en ambos miembros de la ecuación la Transformada de Laplace, ¿cómo quedaría planteada?

- La Propiedad de Linealidad para la Transformada de Laplace indica que:

Si la Transformada de Laplace de  $f(t)$  y  $g(t)$  existe; y  $a, b$  son constantes, entonces

$$L\{af(t) + bg(t)\} = aL\{f(t)\} + bL\{g(t)\}$$

Sabiendo que  $f(t) = y(t)$  o simplemente

$$Y(s) = Y$$

aplica la Propiedad de Linealidad en  $L\{2y'' - 3y'\}$

- Encuentra las dos Transformadas de Laplace que surgen en el inciso **b**, aplicando la transformada de la derivada y simplificando totalmente el resultado, sabiendo que  $y(0) = 1$  y  $y'(0) = 0$ , de tal manera que solo se tenga un solo término que contenga la Transformada de Laplace. Recuerda que la transformada de la derivada es  $L\{y'(t)\} = sL\{y(t)\} - y(0)$  y  $L\{y''(t)\} = L\{y''\} = s^2L\{y(t)\} - sy(0) - y'(0)$
- Si  $L\{2y' - 1\} = 1$ ; basándote en los incisos **b** y **c** resuelve la parte izquierda de esta ecuación y encuentra el valor de  $L\{y\}$ , sabiendo que  $y(0) = 0$
- Aplica los procesos realizados en los incisos **b** y **c** a la ecuación diferencial planteada en el inciso **a**. Además, encuentra el valor de  $L\{y\}$  tal como ocurrió en el inciso **d**.
- ¿En que parte del inciso **e** detectas que hay un cambio de variable?
- ¿Influye el cambio de variable para encontrar  $L\{y\}$ ? ¿Por qué? ¡Discútelos con tus compañeros de equipo!

### Actividad 3

Consideremos ahora la pregunta: Dada  $F(s)$  ¿qué función  $f(t)$  hace que  $L\{f(t)\} = F(s)$ ?

Por ejemplo, si  $L\{y(t)\} = \frac{1}{s^2}$  ¿Cuál es el valor de  $y(t)$ ? En el lenguaje matemático esto cae

en la categoría de un inverso, donde se dice que  $y(t)$  es la Transformada Inversa de Laplace de

$\frac{1}{s^2}$  y se escribe  $y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}$ , por lo que el valor de la función buscada  $y(t)$  es:  $y(t) = t$ ,

donde se tiene de nuevo la variable original  $t$ .

- Bajo esta idea, encuentra la Transformada Inversa de Laplace de la Actividad 2, inciso e; es decir, encuentra el valor de  $y(t)$ .
- Si sustituyes la solución de la Transformada Inversa de Laplace en la Ecuación Diferencial dada, ¿estas haciendo un cambio de variable? Por otra parte, ¿qué relación tiene esta solución con la Ecuación Diferencial?

### Actividad 4

Sea la ecuación diferencial lineal homogénea de orden dos:  $y'' + 6y' + 34y = 0$  y condiciones iniciales  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = 1$ .

- Resuelve esta ecuación siguiendo los procesos de la Actividad 2, incisos a y e; y de la Actividad 3, inciso h.
- Indica en qué partes de la resolución de la ecuación diferencial lineal se está haciendo un cambio de variable.

### Aplicación de una última secuencia

Finalmente se aplicó una quinta secuencia, modificada solo en cuanto a la redacción. Esta secuencia ya es estable; es decir, en su exploración arrojó resultados favorables.

### Actividad general

Sea la ecuación diferencial  $y'' + 4y' + 4y = t^2 e^{-2t}$  sujeta a las condiciones iniciales  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ :

### Actividad 1

Aplica la Transformada de Laplace en ambos miembros de la Ecuación Diferencial y encuentra cada transformada de Laplace planteada.

- a. Observa bien los resultados e indica qué variable cambió y por cuál

### Actividad 2

Al aplicar las condiciones iniciales en el proceso realizado en la Actividad 1 y despejar la  $L(y)$ :

- b. La nueva variable que surgió en dicha Actividad 1 y que ahora se encuentra en el despeje de esta Actividad 2, ¿corresponde a la variable dependiente o a la variable independiente?

### Actividad 3

Aplica la Transformada Inversa de Laplace en el resultado obtenido en la Actividad 2 y además resuélvela:

- c. Bajo este proceso, ¿qué le ocurrió a la nueva variable obtenida en la Actividad 1?
- d. Si sustituyes la solución de la Transformada Inversa de Laplace en la Ecuación Diferencial dada, ¿estas haciendo un cambio de variable? Por otra parte, ¿qué relación tiene esta solución con la Ecuación Diferencial?

### Actividad 4

Aplica todo el proceso anterior a la Ecuación Diferencial  $y'' + 5y' + 6y = 0$  sujeta a las condiciones iniciales  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -3$ . Incluye las preguntas planteadas en cada inciso, ubicadas en las Actividades 1, 2 y 3.

### El proceso de validación interna

Aquí se muestra la última fase de la Ingeniería Didáctica: el análisis a posteriori y validación. Con base en la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori se fundamentará la validación interna de las hipótesis formuladas en el análisis a priori.

### A partir del análisis a posteriori se concluye que:

- I. Los resultados de la primera secuencia evolucionada tocante a la construcción del método de la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales, no fueron los esperados según el análisis a priori. Solo una minoría logró resolver el problema planteado. En la fase de institucionalización si se logró, con rapidez, construir el método.

2. Tampoco se logró construir la noción de solución de una ecuación diferencial, como se esperaba en el análisis a priori. Nadie logro hacerlo (hasta la fase de institucionalización).
3. La localización de un cv y ver la importancia de utilizar un cv, si se logró construir.
4. El último problema, en su mayoría, no lograron resolverlo, contrario a lo previsto en el análisis a priori. Éste problema se logró resolver en la fase de institucionalización y aquí es cuando se logra construir el método de la transformada de Laplace con la ayuda del maestro.
5. La fase de institucionalización no cumplió lo previsto según el análisis a priori. Ya que se pretendía que en esta fase se reforzaran las nociones construidas.

### **Sobre la última secuencia didáctica:**

Al examinar la última secuencia aplicada y modificada en su texto (quinta aplicación), los resultados fueron los siguientes a partir del análisis a posteriori:

6. Lograron en su mayoría, construir el método de la transformada de Laplace según lo previsto en el análisis a priori.
7. Lograron localizar y ver la importancia del cv en el contexto estudiado, como se esperaba en el análisis a priori.
8. Se logró por mayoría, resolver el último problema al utilizar los elementos construidos en las actividades anteriores. Esto se esperaba en el análisis a priori.
9. No se logró construir la noción de solución. Esta se logra construir, de manera rápida, en la fase de institucionalización bajo el apoyo del profesor.
10. A partir del análisis a posteriori se observa que la fase de institucionalización si cumplió con lo previsto según el análisis a priori, de reforzar las nociones generadas por los estudiantes; excepto con la noción de solución.

### **Primeras conclusiones**

Después de analizar los datos arrojados por cada secuencia y de compararlos con el análisis a priori, se puede decir que:

Básicamente se trabajó con dos secuencias: la primera de texto denso y una segunda secuencia de texto cómodo.

Se observa que bajo la primera secuencia no funcionó en su totalidad, pero es aceptable. Un elemento que contribuyó a tal resultado es la comprensión de textos, donde necesariamente entra un cambio de registro y esto se logra a través de la actividad de conversión de

representaciones (Duval, 1995). Entonces la causa de que el estudiante no lograra en las situaciones de texto denso (en algunos casos), llegar a una situación a-didáctica de formulación o de validación es por la falta de la actividad de conversión de representaciones bajo una no-congruencia de las representaciones. En un futuro se modificará esta secuencia en cuanto a la estructura del texto.

Para la segunda secuencia, que posee un texto más accesible, llama la atención el hecho de que el estudiante no logró construir la noción de solución bajo la situación a-didáctica; sin embargo en la fase de institucionalización, mediante la interacción con el profesor y bajo la influencia del cv, si la construyeron. Tal tardanza en construirse se debe a que el estudiante no logró evocar un registro de ecuación algebraica y cambiarlo a un registro de ecuación diferencial; estos son dos registros diferentes de la representación de “ecuación”. Claro que la significación operatoria del significante en el álgebra (la ecuación algebraica) es diferente de la significación operatoria del significante en el cálculo (la ecuación diferencial), puesto que los procedimientos de tratamiento son diferentes en cada caso. Uno emplea solo operaciones algebraicas y el otro, además, emplea la derivada. Hay que recordar que la actividad solicitaba sustituir la solución de la transformada inversa de Laplace en la ecuación diferencial dada (o sea la solución de la ecuación diferencial) e indicar qué relación tiene esta solución con la ecuación diferencial dada.

Finalmente, creo que lo que evitó relacionar un registro de ecuación algebraica con un registro de ecuación diferencial fue la significación operatoria del significante, por ser diferente para cada caso.

### **Conclusiones generales**

El cv es una herramienta que es utilizada en los libros y por los profesores de manera implícita y no es un saber enseñable. Se observó que los libros generan un consenso para el trabajo del profesor, resultados reportados en Flores (2007).

La importancia del cv radica en que permite aplicar métodos, hacer demostraciones y resolver problemas. Esta es su epistemología de origen. Pero por otro lado, para el estudiante es un tema difícil, que en algunos casos no le da mucha importancia, ya que cuando lo aplica no lo ve como un cv; es decir, no es consciente cuando aplica esta herramienta, de que está haciendo un cv. Esto, causado por el discurso matemático escolar vigente.

Un aspecto importante por mencionar fue la aplicación de la teoría de las situaciones didácticas, donde las situaciones-problema presentadas a los estudiantes fueron elementos importantes para hacer evolucionar sus representaciones y sus procedimientos.

También, otro elemento que influyó para la no construcción satisfactoria, en algunos casos, del método para resolver ecuaciones diferenciales utilizando la transformada de Laplace; fue la localización de un obstáculo epistemológico, localizado en la relación funcional entre variables, más específicamente: la relación entre la variable dada y la nueva variable es una función, pero este hecho de ser una función, donde hay una variable independiente y una variable dependiente, fijas, por la propia naturaleza del concepto de función, evita que en la concepción de función que se usa en el cv, se intercambien los papeles de las variables, por el aspecto operacional que ya han interiorizado de una función. Por lo que un obstáculo localizado es el aspecto operacional de una función. Las preguntas de las actividades planteadas estaban encaminadas a solventar este obstáculo.

Finalmente, se puede hablar de la pregunta de investigación: ¿Qué elementos de orden didáctico podemos obtener para la enseñanza del cálculo al reconocer el cv como un proceso explícito? Este trabajo de investigación, por el simple hecho de haberlo llevado a cabo, ya se está mirando el cv como un proceso explícito. Indudablemente que los elementos de orden didáctico que se obtuvieron y que se pueden seguir generando, son las secuencias didácticas de las ecuaciones diferenciales aplicando el método de la transformada de Laplace. También, de acuerdo al análisis preliminar y éste centrado en la componente didáctica, se obtuvo una clasificación extensa de la ubicación y aplicación del cv en los diferentes temas de la matemática de ingeniería. Aunado a esto, el análisis preliminar arrojó una clasificación exhaustiva de los usos que conlleva el cv.

Estos aspectos ayudarán en un futuro a diseñar secuencias didácticas de los diferentes temas matemáticos de la ingeniería bajo la influencia del cv, y bajo las variables didácticas localizadas en Flores (2009), lo cual cerrará el círculo acerca de este proceso según la transposición didáctica: actualmente ha pasado de ser un saber científico a un conocimiento a enseñar (la forma en que aparece un contenido en los programas escolares, libros de texto o en tradiciones de enseñanza), pero falta la última etapa, pasar a ser un objeto de enseñanza (la forma de existencia del conocimiento en el aula) (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Esta es la pretensión futura.

### Referencias bibliográficas

- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En Gómez, P. (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. (pp. 33-59). Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1979-1990*. Grenoble: La Pensée Sauvage, Éditions.

- Cauchy, A.L. (1981). *Équations Différentielles Ordinaries*. Paris: Éditions Études Vivantes.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editorial SA.
- Collette, J.-P. (1986). *Historia de las matemáticas*. Vol. II. México: Siglo vintiuno editores.
- Chevallard, Y.; Bosch, M. y Gascón, J. (1997). Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. (pp.213-226). *Cuadernos de Educación* N° 22. Institut de Ciències de L' Educació (Universitat de Barcelona) y Editorial Horsori. Barcelona, España.
- Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*. (pp. 61-96). Colombia: Una empresa docente, Grupo Editorial Iberoamérica.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Paris: Peter Lang S.A. Editions scientifiques européennes.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II*. (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Edwards, C.H. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. USA: Springer-Verlag.
- Flores, R. (2007). El cambio de variable: ¿un proceso matemático o un artificio de la matemática? En C.R. Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 20, 145-150. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Flores, R. (2009). Una primera secuencia didáctica exploratoria: El cambio de variable en la transformada de Laplace. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 844-853. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Newton, I. (2001). *Tratado de Métodos de Series y Fluxiones*. México: UNAM [I. Newton. Tractatus De Methodis Serierum Et Fluxionum. 1671]
- Ríbnikov, K. (1978). *Historia de las Matemáticas*. URSS: Mir Moscú.
- Stewart, J. (1995). *Calculus*. USA: Brooks/Cole Publishing Company