Organizadores del currículo y Números naturales.
Luis Rico. Universidad de Granada

Organizadores, para buscar y organizar la información mediante la cual realizar el desarrollo curricular de cada tópico.

Los organizadores son:

1. Ubicación y tratamiento de los contenidos del tema en el Diseño Curricular del Ministerio y en los documentos de la Comunidad Autónoma .
2. Conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes.
3. Fenomenología de los conocimientos.
4. Modelos y representaciones.
5. Materiales y recursos.
6. Errores y dificultades.
7. Desarrollo histórico del tópico.
8. Bibliografía de Referencia.

El primer organizador, Ubicación y tratamiento en el Diseño Curricular del Ministerio y Comunidad Autónoma Andaluza situa cada uno de los Temas dentro de los documentos sobre Diseño Curricular editados por el Ministerio y la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía.

El segundo organizador: Conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes presenta los contenidos desde el punto de vista cognitivo de organización de los conocimientos matemáticos que ha adoptado el Diseño Curricular.

El tercero: Fenomenología de los conocimientos, proporciona un resumen de los fenómenos a cuya comprensión y dominio contribuyen los conocimientos matemáticos tratados en el Tema. Se destacan los contextos y las situaciones en las que se presentan y emplean los diferentes conceptos.

El cuarto organizador se refiere a Modelos y representaciones, Fischbein afirma que

"los modelos representan una herramiento esencial para dar forma a conocimientos intuitivamente más aceptables. A tales sustitutos se les llama comunmente modelos.

Hablando en general, un sistema B representa un modelo del sistema A si, sobre la base de cierto isomorfismo, una descripción o una solución producida en términos de A puede reflejarse consistentemente en términos de B, y viceversa."

El quinto organizador son los materiales y recursos.

Los materiales son concrecciones de modelos realizadas por casas comerciales o por el profesor.

Los recursos proporcionan situaciones, o ayudas para trabajar en una situación, en la que el concepto estudiado se emplea significativamente.

El sexto organizador, Errores y dificultades, tiene por finalidad poner en contacto con los resultados de las investigaciones realizadas en torno a la enseñanza y aprendizaje de los contenidos correspondientes. Uno de los datos que surgen en estos estudios son los errores cometidos por los alumnos, tanto en los aspectos conceptuales como en los procedimentales.

También se observa que hay determinados conocimientos que lleva más tiempo comprender o en los que hay un mayor número de alumnos que no comprenden correctamente; a estos conocimientos los consideramos difíciles o de mayor dificultad. Al realizar la programación de un tema el Profesor debe disponer de información sobre cuales son aquellos errores o conocimientos insuficientes en los que sus alumnos se pueden encontrar, así como aquellos puntos que van a tener una dificultad especial.

El séptimo organizador, Desarrollo histórico del tópico, tiene por finalidad señalar algunos momentos a lo largo de la historia de la matemática en los que el conocimiento matemático tuvo un desarrollo especial o desempeñó algún papel de interés.

Con la información obtenida, hay que organizar el Tema desde la perspectiva de su desarrollo currícular. Para preparar el desarrollo de cada tema se tendrá en cuenta el siguiente marco práctico, que es imperativo (y, opcionalmente, ampliable):

1. Objetivos, que harán referencia:
1.1. Dominio Conceptual.
1.2. Procesos.
1.3. Aplicaciones.
1.4. Actitudes.

2. Contenidos, en donde se presentará una selección razonada para cada tópico y se hará referencia a:
2.1. Organización.
2.2. Temporalización.
2.3. Preconceptos y errores previsibles.
2.4. Niveles convenientes de dominio.
3. Metodología prevista, con referencia a:
3.1. Situaciones.
3.2. Modo de trabajo.
3.3. Secuencia.
3.4. Materiales y recursos.
4. Evaluación, con referencia a:
4.1. Diagnóstico y corrección de errores.
4.2. Cuestiones que controlar.
4.3. Métodos en la valoración.
4.4. Datos y registro.

Tema: Números naturales y operaciones en Educación Secundaria Obligatoria.
1. Ubicación y tratamiento en el Diseño Curricular del Ministerio y Comunidad Autónoma Andaluza.
- Dentro de los contenidos marcados por el Ministerio (B.O.E. 13-Septiembre-91) el primer bloque de contenidos se denomina: Números y operaciones: significados, estrategias y símbolización.
- En el proyecto de decreto de la Junta de Andalucía el primer bloque de contenidos se denomina: Números y Medida.

2. Conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes.
Los conceptos, relativos a este tema, son:
1. Números naturales:Significados y usos de los números: contar, medir, ordenar, codificar, expresar cantidades o particiones.
2. Notaciones numéricas: Sistema de numeración decimal; notación científica; jerarquía de las operaciones; paréntesis.
3. Las operaciones: significados y usos de la suma, resta, multiplicación y división en distintos contextos y con distintas clases de números.
4. Relaciones entre los números: Orden y representación de los números en la recta.
5. Aproximación y estimación de cantidades: aproximación de un número por otro más sencillo, diversos métodos; margen de error en las estimaciones y aproximaciones.
6. Algoritmos básicos e instrumentos de cálculo: algoritmos para operar con números naturales; significado y uso de las propiedades de las operaciones para la elaboración de estrategias de cálculo mental y escrito; reglas de uso de la calculadora; otros instrumentos de cálculo disponibles.

Los procedimientos relativos a este tema se clasifican en dos apartados:
a) Utilización de distintos lenguajes.
1. Interpretación y utilización de los números y operaciones en diferentes contextos eligiendo la notación más adecuada en cada caso.
2. Interpretación de códigos y tablas numéricas y alfanuméricas para gestionar o transmitir informaciones.
3. Representación, sobre una recta o mediante diagramas y figuras, de números sencillos; representación de los datos y relación en problemas numéricos.

4. Formulación verbal de problemas numéricos, de los términos en los que se plantean y del proceso y cálculos utilizados para resolverlos, confrontándolos con otros posibles.

b) <u>Algorítmos y destrezas</u>:

5. Comparación de números mediante la ordenación, la representación gráfica y el cálculo de porcentajes.

6. Clasificación de conjuntos de números y construcción de series numéricas de acuerdo con una regla dada.

7. Sustitución de un número por otro más sencillo, de acuerdo con la precisión que requiera su uso.

8. Elaboración y utilización de estrategias personales de cálculo mental.

9. Utilización de los algoritmos convencionales de suma, resta, producto y división con números sencillos.

10. Utilización de diferentes transformaciones o conversiones numéricas para efectuar cálculos de manera más sencilla.

11. Utilización de la calculadora u otros instrumentos de cálculo para la realización de cálculos numéricos.

Estrategias:

1. Utilización de diversas estrategias para contar o estimar cantidades, teniendo en cuenta la precisión requerida.

2. Búsqueda y espresión de propiedades, relaciones y regularidades en conjuntos de números.

3. Identificación de problemas numéricos diferenciando los elementos conocidos de los que se pretende conocer y los relevantes de los irrelevantes.

4. Reducción de problemas numéricos complejos a otros más sencillos para facilitar su comprensión y resolución.

5. Decisión sobre qué operaciones son adecuadas en la resolución de problemas numéricos.

6. Formulación de conjeturas sobre situaciones y problemas numéricos y comprobación de las mismas mediante el uso de ejemplos y contraejemplos, método de ensayo y error.

7. Utilización del método de análisis-síntesis para resolver problemas numéricos.

Actitudes, clasificadas en dos apartados:

<u>Referentes a la apreciación de las matemáticas</u>:

1. Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje numérico para representar o resolver situaciones de la vida cotidiana.

2. Incorporación del lenguaje numérico, del cálculo y de la estimación de cantidades a la forma de proceder habitual.

3. Sensibilidad, interés y valoración crítica ante informaciones y mensajes de naturaleza numérica.

4. Reconocimiento y valoración crítica de la utilidad de la calculadora para la realización de cálculos e investigaciones numéricas.

5. Curiosidad e interés por enfrentarse a problemas numéricos e investigar las regularidades y relaciones que aparecen en conjuntos de números o códigos numéricos.

6. Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas, cálcular y estimar.

<u>Referentes a la organización y hábitos de trabajo</u>:

7. Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas numéricos.

8. Disposición favorable a la revisión y mejora del resultado de un cálculo o problema numérico.

9. Interés y respeto las estrategias y soluciones a problemas numéricos distintas de las propias.

10. Sensibilidad y gusto por la presentación ordenada y clara del proceso seguido y resultados obtenidos en problemas y cálculos numéricos.

3. Fenomenología de los conocimientos.

Hay tres tres modos básicos de considerar el sistema de los números naturales como herramienta intelectual: la práctica profesional, los contextos numéricos y los hábitos y prácticas cotidianos en el empleo de los números.

Conviene conocer y utilizar la gran variedad de acciones, términos, símbolos, técnicas, y recursos empleado por la humanidad para construir y utilizar los números, y los modos de su empleo para comunicar conocimientos y organizar grandes parcelas de la actividad científica, económica, cultural y social a lo largo de la historia.

En primer lugar, los números están presentes en la práctica social cotidiana. El mundo del trabajo incluye el conocimiento de horarios, retribuciones, manejo de cuentas corrientes, pagos y adquisiciones. La admistración del tiempo, del dinero y la gestión de cantidades de determinados materiales forma parte de la práctica usual de la población adulta, en toda la gama de niveles laborales y sociales. Determinar el campo de las aplicaciones y usos de cada una de las profesiones de nuestra sociedad actual es objeto de reflexión.

Es sorprendente comprobar la ubicuidad y relevancia del sistema decimal de numeración. Para abordar los problemas que surgen en distintos campos profesionales el número natural es imprescindible; la competencia numérica es una de las competencias básicas que debe cubrir cualquier ciudadano, con carácter general, y cualquier trabajador, con carácter profesional. La capacidad para afrontar confiadamente las exigencias numéricas de la vida cotidiana y del campo profesional correspondiente incluye la familiaridad con los números y las destrezas que permiten su uso y la comprensión de información presentada en términos numéricos.

En segundo lugar es importante considerar los contextos en que se utilizan los números para un propósito específico.

Un contexto numérico es un marco estructural en el que el número satisface una determinada función como instrumento de conocimiento. Son varios los contextos numéricos del sistema de los números naturales.

El contexto más sencillo es el de <u>contar</u>; en este caso hay que asignar los términos de la secuencia numérica a los objetos de una coleccion, bien señalando cada objeto o marcando pautas y realizando espaciamientos temporales. El aprendizaje de los números en nuestra cultura se inicia mediante el dominio de la secuencia numérica, al igual que ha ocurrido en la historia de la humanidad.

El segundo contexto se denomina <u>cardinal</u>; encontramos un contexto de cardinación cuando queremos dar respuesta a la cuestión ¿cuántos hay? ante una colección discreta de objetos distintos.

Los contextos de <u>medida</u> permiten conocer la cantidad de unidades de alguna magnitud continua; en este caso los números proporcionan respuesta a la pregunta ¿cuánto mide?

Un cuarto tipo lo constituyen los contextos <u>ordinales</u> en los que se quiere conocer la posición relativa de un elemento en un conjunto discreto y ordenado; proporcionan respuesta a la pregunta ¿qué lugar ocupa?

Los contextos <u>operacionales</u> son los más fecundos, en ellos hay que dar respuesta a la cuestión ¿cuál es el resultado? El sistema de los números naturales tiene un amplio campo de aplicaciones operatorias, ofreciendo un modelo para determinadas acciones reales sobre objetos y cantidades.

Las acciones de agregar, separar, reiterar y repartir expresan multitud de transformaciones con los objetos; también se pueden establecer relaciones de comparación e igualación. Todas estas acciones tienen su expresión en el sistema de los números naturales mediante las operaciones aritméticas básicas que, a su vez, satisfacen las cuestiones cuantitativas que se plantean con las acciones mencionadas.

Son las operaciones númericas las que dotan al sistema de su gran poder modelizador, las que permiten considerarlo como algo dinámico.

Finalmente, un sexto tipo de contextos, menos convencional, lo constituyen los denominados contextos <u>simbólicos</u> en los que los números se utilizan para distinguir y denominar clases de fenómenos o elementos, confundidos a veces con etiquetas.

En tercer lugar, conviene considerar los hábitos de comportamiento numérico en el ámbito de las relaciones humanas. El conocimiento numérico que las personas concretas ponen en funcionamiento en su práctica diaria es distinto del uso formal que puede hacer el especialista. Obviamente, tiene que haber unas competencias numéricas básicas para que pueda hablarse de conocimiento numérico, pero estas competencias tienen niveles muy distintos de concreción y los sistemas de prácticas en que se sustentan varían entre sectores sociales distintos, de unos habitats a otros, y de unas sociedades a otras. Un ejemplo sencillo clarifica la importancia de la práctica cotidiana en el dominio del sistema de numeración. Cada país tiene un sistema de precios, basado en la propia potencia económica y en una moneda que establece el valor tipo; el papel moneda y las monedas toman valores numéricos, de orden muy distinto entre unos países y otros. Para el ciudadano medio de nuestra sociedad el sistema de los números naturales está incardinado en una serie de prácticas, de las que sólo algunas coinciden con aspectos convencionales del sistema. En la mayoría de los casos da prioridad a sólo una parte de las reglas y representaciones del sistema, hace un uso amplio de la aproximación, utiliza destrezas no estandarizadas para sus cálculos, trata de solucionar la mayoría de los problemas aditivamente, evitando la multiplicación excepto cuando se ve forzado explícitamente a ello.

4. Representaciones y Modelos

Sistema decimal de numeración

El Sistema Decimal de Numeración se utiliza como sistema de representación casi exclusivo.

De este modo se identifica cada uno de los números con su notación decimal y el conjunto de los naturales con la secuencia de los numerales arábigos. Tal identificación, aunque culturalmente útil, práctica y económica, es una limitación en el conocimiento de los números naturales.

Análisis aritmeticos

Los números se determinan por sus relaciones mútuas. Sobre la base de la notación decimal, hay otros sistemas de representación para los números naturales. Uno de ellos es el *análisis aritmético de los números*, considerando cada número como suma o como producto de números más sencillos.

Notación factorial

El teorema fundamental de la Aritmética permite la escritura de cada número natural como producto de factores primos.

La recta númerica

es la representación gráfica estándar. Sobre una recta cualquiera elegimos dos puntos arbitrarios a los que asignamos los valores 0 y 1; por convenio, el punto que corresponde a 0 está situado a la izquierda del punto que corresponde a 1:

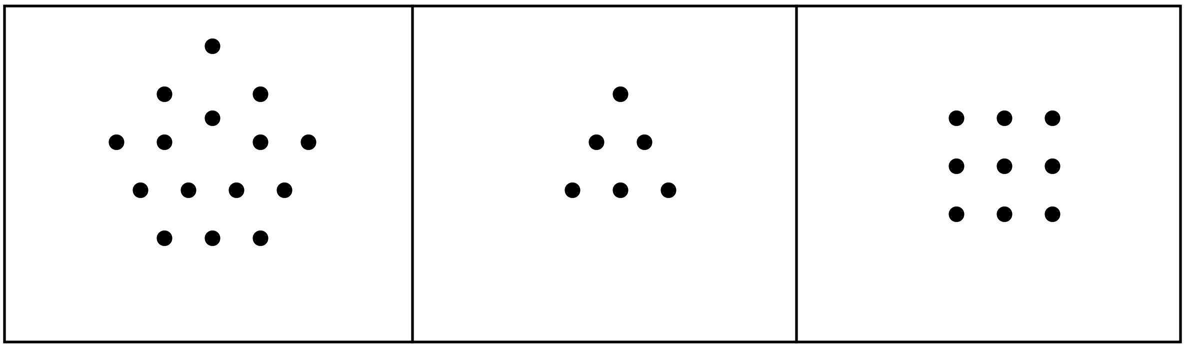
A partir de 1 y hacia la derecha, se van marcando puntos que guarden entre sí la misma distancia que los dos puntos iniciales sobre los que se van señalando, consecutivamente, los números naturales.

Configuraciones puntuales

Nos referimos a los números figurados, que tuvieron su origen y desarrollo en el concepto de número de la escuela pitagórica. Para los pitagóricos el número era algo que tenía consistencia en sí mismo; los números eran como una suerte de átomos que, en sus diversas composiciones y relaciones, daban la esencia de lo que es el mundo existente.

Esta noción de número encontró su sistema de representación en las configuraciones puntuales.

Este sistema de representación considera cada número como un agregado de puntos o unidades distribuidos sobre una trama rectangular o isométrica, según una figura geométrica plana o espacial. De este modo hay números triangulares, cuadrados, pentagonales y cúbicos, que facilitan pensar en cada número como un todo organizado según una estructura determinada.



Las *configuraciones puntuales* son un sistema de representación de números, basado en:

un único símbolo: el punto;

un espacio estructurado de representación, usualmente la trama cuadrada o la trama isométrica cuando trabajamos en el plano;

un modo de organización de la cantidad de puntos que satisface criterios de simetría o regularidad convenidos y que se pueden explicitar de manera sencilla.

Modelos

a) Modelos lineales: el metro; reglas graduadas. tablas numéricas; etc.

b) Modelos cardinales: los números se representan mediante cantidades desordenadas o bien como configuraciones puntuales que se ajustan a algún patrón geométrico, son usuales para números naturales.

c) Modelos métricos: todos los conceptos numéricos emplean modelos de esta clase.

d) Modelos funcionales: los modelos funcionales se utilizan para las operaciones con números naturales.

e) Hay otros modelos, como son los combinatorios en forma de cuadros de doble entrada o de diagrama en árbol, que permiten modelizar las operaciones producto y división.

Quinto:<u>Materiales y recursos:</u>

Regletas multibase
Abacos
Cubo articulado
Máquinas de calcular

Prensa
Publicidad
Ambito familiar
Ambito escolar
Ambito profesional
etc.

Séptimo: Evolución histórica.

<u>Datos en la evolución del sistema de los números naturales.</u>

La destreza más sencilla en relacion con el sistema de los naturales es la de contar, es decir, asignar a cada uno de los términos de un conjunto bien definido un vocablo o símbolo, que lo designa de manera abstracta. Mediante este procedimiento ponemos en correspondencia biunívoca cada elemento del conjunto con un símbolo o término numérico y es la condición previa que permite conocer la cantidad de objetos que tiene el conjunto. Estos vocablos y símbolos constituyen la primera expresión de la numeración.

Hay evidencias que sitúan en el Paleolítico superior (20000- 10000 a.C.) las primeras muestras de algún modo de conteo, que se reconoce en marcas y señales en huesos o piedras que significan cantidades y que han sido interpretadas como calendarios lunares. El hombre en el Paleolítico representaba números en relación con algunos contextos, establecía una correlación entre algo externo y marcas secuenciadas; estas marcas se consideran intencionales, secuenciales y cuidadosamente estructuradas.

Los yacimientos arqueológicos donde se han encontrado los restos más antiguos de un sistema de numeración se localizan en el Irak actual, antigua Mesopotamia. Los especialistas establecen que desde el milenio noveno hasta el milenio cuarto a. C., una gran variedad de fichas de arcilla sirvieron para designar números, medidas y categorías de objetos; los restos conocidos de notación numérica son anteriores en varios milenios a las primeras formas conocidas de escritura.

Característica común de estos textos es el uso de un sistema de numeración en el que aparece por vez primera la noción de base. Esta noción establece un principio de agrupamiento de cantidades, que indica que cada n unidades de un orden constituyen una unidad de orden superior. Los sistemas de numeración mesopotámicos utilizaban muy pocos signos distintos y un principio posicional de escritura de los distintos órdenes de cifras que componen un número.

El sistema babilónico más conocido emplea sólo dos signos cuneiformes en su sistema numérico. El principio posicional se aplica con el mismo esquema que utilizamos actualmente, con una importante limitación: que los babilonios carecían de un signo para 0 y tenían que expresar la ausencia de cantidad para un determinado orden con un espaciamiento.

En el amplio período de las grandes civilizaciones fluviales o culturas del neolítico, cuya etapa culminante se sitúa alrededor del 4000 a.C., encontramos de modo permanente un sistema de numeración desarrollado. La característica principal de todos ellos consiste en haber sistematizado el principio de agrupamiento mediante el recurso técnico que denominamos elección de una base, y haber elaborado un sistema de símbolos y reglas sencillos mediante los que conseguir la representación de cualquier número. Sin embargo, estos sistemas venían limitados por su escasez de cifras o signos básicos, la inexistencia de una noción de 0 y las restricciones que esto impone a la escritura posicional. Ofrecían una posibilidad de control sobre un campo muy amplio de números, pero este campo en cualquier caso es limitado.

Alrededor del año 1000 a.C., en los primeros siglos de le Edad del Hierro, se produce una de las revoluciones culturales más importantes en la historia de la humanidad: la consolidación de la escritura alfabética en los pueblos semíticos que habitaban el Oriente próximo y su transmisión antes del 800 a.C. a los pueblos griegos. Fueron los griegos quienes, al incorporar símbolos para las vocales, produjeron la escritura fonémica en la que cualquier sonido distinto del lenguaje griego estaba representado por un solo signo. Esta innovación tuvo consecuencias culturales, políticas, sociales y económicas considerables. El término alfabetización, que ha llegado a ser sinónimo de dominio cultural básico, describe el cambio cultural que se produjo en esta época y que afectó a todos los campos del conocimiento.

También los sistemas numéricos se vieron afectados por estos cambios, dando origen a los sistemas numéricos alfabéticos. Numeraciones alfabéticas son la romana y la etrusca, la griega, la hebrea, la fenicia y la árabe, entre otras muchas que se extienden en esta época a lo largo del Oriente próximo y medio y por la cuenca del Mediterráneo. El sistema griego alfabético de numeración utiliza los 24 signos del alfabeto, más 3 signos complementarios para representar las nueve unidades, las nueve decenas y las nueve centenas, respectivamente. Este sistema mantenía la base 10 e incorporaba dos innovaciones interesantes: la simbolización de los números del 1 al 9 con cifras distintas y la consideración de un cierto principio posicional en la escritura de las cifras de los distintos órdenes que forman un número. Sin embargo, venía lastrado por dos limitaciones: el uso de cifras diferentes para expresar un mismo valor en los diferentes órdenes, por ejemplo un signo distinto para 5, otro para 50, otro para 500, etc, lo cual introducía una complejidad artificial y no sacaba partido de la escritura posicional; la segunda limitación es la ausencia de un signo para 0, más aún, la imposibilidad de concebir una noción de 0.

Se considera comúnmente que fue en el norte de la India, alrededor del siglo V d.C., donde surgió un sistema de numeración posicional, con un signo específico para 0. El signo primitivo de los hindúes para el cero fue un punto, que se empleó inicialmente en manuscritos e inscripciones para indicar un hueco. Alrededor del siglo III d.C. aparecen en los textos matemáticos hindúes símbolos numéricos que expresaban un sistema de numeración evolucionado, variando considerablemente de unas épocas y regiones a otras, relativamente próximas. A comienzos del siglo VII el uso de la numeración decimal escrita y del signo cero están bien establecidos en la India.

La contribución árabe comienza en Bagdad, en la corte del califa Almansur, con el empleo de tablas astronómicas traidas por astrónomos hindúes. Fue de este modo como se introdujeron el principio posicional y el 0 entre los árabes. La rápida expansión de la cultura islámica, el gran desarrollo ecónomico que la acompañó, junto con la diversidad de los intereses científicos y administrativos, contribuyeron a la consolidación y difusión de un sistema decimal de numeración, cuya única diferencia importante con nuestro sistema actual es la forma de sus cifras.

Es usual admitir que la difusión del sistema decimal de numeración árabe en Europa se realizó durante la baja Edad Media, a partir de las traducciones realizadas en la escuela de traductores e intérpretes de Toledo. Juan de Sevilla hizo la primera traducción al latín de un texto de Aritmética y Algebra.

Leonardo de Pisa fue el primer europeo que empleó el nuevo sistema en una obra de matemáticas original, el *Liber Abaci*.

La invención de la imprenta modifica la comunicación del conocimiento numérico. La publicación de numerosas Aritméticas comerciales desde 1478, fecha en que se imprime en Treviso la primera de ellas, contribuye notablemente a la difusión del sistema decimal de numeración, que es empleado extensamente y de modo prioritario desde el siglo XVI.

La conceptualización del número

En relación con el concepto de número, científicos y filósofos han planteado reiteradamente dos tipos de cuestiones de las que conservamos documentación abundante. El primer tipo lo constituyen las cuestiones ontológicas, que plantean la pregunta sobre la naturaleza de los números, ¿qué clase de entes son esos símbolos a los que denominamos números?

Las cuestiones epistemológicas determinan el segundo tipo, preguntan por la formación del concepto de número, ¿cuál es el origen del número? e interrogan sobre la relación entre los números y el mundo empírico así como por la aplicabilidad de los conceptos numéricos. Estas dos familias de cuestiones están en la base del conocimiento matemático, y llegan hasta nuestros días con los problemas de la fundamentación lógica del sistema de los naturales.

La filosofía de la matemática surge con los pitagóricos, quienes proponen un programa científico que cuenta con la noción de número como uno de los fundamentos del conocimiento. Filolao, pitagórico tardío, expresa uno de los supuestos generales del pitagorismo cuando dice: "*Y en verdad todas las cosas que se conocen poseen número, pues ninguna cosa podría ser percibida ni conocida sin éste*"; hay, sin embargo, un pitagorismo más radical que afirma que las cosas no sólo poseen número sino que todas las cosas son números. Este programa fuerte se puso en práctica, en realidad, concibiendo los números como cosas. La aritmética pitagórica es una teoría de números que considera a éstos como realidades naturales, que estudia cada uno de ellos por separado a fin de establecer sus propiedades intrínsecas.

Al implicar en la concepción del número las configuraciones geométricas y la representación física, conciben el estudio de los números como estudio de la realidad y convierten el descubrimiento de relaciones aritméticas en descubrimiento de relaciones naturales. La relación numérica es una ley en el sentido objetivo del término: se desprende de la observación y reviste progresivamente la forma general que comporta.

La escuela pitagórica establece la igualdad entre realidad numérica y realidad física, alcanzando su crisis con el descubrimiento de la inconmensurabilidad entre el lado y la diagonal del cuadrado, derivada del teorema atribuido a Pitágoras y que lleva su nombre; a partir de este descubrimiento el paralelismo entre el concepto numérico y la representación geométrica no pudo mantenerse. Platón profundiza en la noción de número y trata de superar las contradiciones del programa pitagórico.

Para Platón los números son ideas; están no sólo más allá del número sensible sino más allá, incluso, del número aritmético; la ciencia de los números alcanza a los caracteres de las cosas que logra comprender en sus determinaciones; constituye el paradigma del que las cosas sensibles son imitaciones. Sin embargo, hay cosas que están más allá del número, como las longitudes irracionales, que no por eso dejan de ser inteligibles, si bien encuentran su solución en la geometría.

Los *Elementos* de Euclides establecen la conceptualización del número que va a permanecer durante cerca de casi veinte siglos. El tratamiento euclídeo del concepto de número se presenta en las 23 definiciones con las que comienza el libro VII de los *Elementos* y se desarrolla a lo largo de 102 proposiciones que abarcan los libros VII, VIII y IX. Los dos conceptos básicos de los *Elementos* son el de unidad y el de número: "*Una unidad es aquello en virtud de lo cual cada una de la cosas que hay es llamada una*", "*Un número es una pluralidad compuesta de unidades".*

Esta noción la encontramos de modo invariante a lo largo de varios siglos*: "Número, según la experiencia lo demuestra, y Euclides lo escribe, no es otra cosa que una agregación y ajuntamiento de unidades*", nos dice Gerónimo Cortés en 1604.

En la segunda mitad del siglo XVIII Kant vuelve a considerar el conocimiento matemático centrado en las disciplinas básicas: Aritmética y Geometría, y basa su reflexión filosófica sobre las matemáticas en estas disciplinas; Kant hace nacer la realidad matemática de una "función pura de la imaginación productora", que subordina bajo los conceptos de cantidad, las formas del espacio y del tiempo. La Aritmética para Kant es la ciencia de las cosas numeradas, y es la naturaleza de las relaciones entre las cosas mismas la que decide en las relaciones entre los números.

Para Kant la noción de número no es un concepto, es un "monograma de la imaginación pura a priori", un esquema. Pero no se trata de un simple ejemplo de esquema; es, en el orden de la cantidad, el esquema único mediante el que se constituyen las nociones cuantitativas; es decir, el número es la condición de nuestro conocimiento sobre cantidades. "*El esquema puro de la cantidad, en tanto que ella es un concepto del entendimiento, es el número, que es una representación que comprende la adición sucesiva de la unidad a una unidad (homogénea). Así, el número no es otra cosa que la unidad de la síntesis de lo diverso con una intuición homogénea, en general*" (Kant, citado por Brunschvigg).

A mediados del siglo XIX el programa de investigación lógica se propone descargar de la noción de número todo lo que ha permitido ver en él un objeto de intuición, una realidad natural, para no conservar más que los caracteres necesarios del sistema. Hay que disociar las leyes del proceso numerante de la existencia de las cosas numeradas. En la introducción de *Los Fundamentos de la Aritmética*, Frege señala que "*No hay que tomar por definición la descripción de cómo surge una imagen, ni hay que considerar que la indicación de las condiciones mentales y corporales, para hecernos conscientes de un enunciado, constituyen su demostración, ni tampoco confundir el acto de pensar un enunciado con su verdad*". Por ello se trata de determinar el mínimo de condiciones requeridas para fijar las reglas del simbolismo operatorio.

Con el desarrollo de la lógica de clases, que despega con Boole en 1847, así como de la lógica de las proposiciones y de las relaciones, los matemáticos disponen del aparato técnico para llevar adelante el programa logicista. Peano trata de obtener con el menor número de convenciones todas las proposiciones matemáticas; en particular, deriva la noción de número natural de 5 axiomas.

Frege se propone establecer que los teoremas aritméticos son enunciados analíticos. Utilizando la noción de equipotencia de conjuntos establece que "*el número de una clase es la clase de todas las clases similares a la misma*". Pero el programa logicista no resulta de fácil ejecución, como pudieron comprobar Russell y Whitehead. Hay que recordar que el enunciado "1+1 = 2" se presentaba en el volumen II de los *Principia Mathematica* como un teorema, precedido por casi 800 páginas.

La inevitable artificiosidad junto con las contradicciones y limitaciones del programa logicista van acompañadas, casi desde sus comienzos, por una fuerte crítica intuicionista. Uno de los críticos mas lúcidos y radicales es Poincaré, quien pone de manifiesto que la lógica formal es incapaz de llegar a la afirmación de una verdad categórica.

Otro programa alternativo es el constructivista, para el que los objetos matemáticos sólo existen si pueden construirse; presenta dos corrientes bien diferenciadas: el formalismo y el intuicionismo. El programa formalista está ligado a David Hilbert, quien establece cuatro grupos de axiomas: axiomas de enlace, de cálculo, de disposición y los axiomas de la constancia, para su fundamentación de los sistemas numéricos. Desde esta perspectiva el sistema de los números naturales es un conjunto específico de signos que se unen de acuerdo con las reglas de las expresiones bien formadas, dando lugar a fórmulas bien definidas, a partir de las cuales se pueden señalar ciertas expresiones como teoremas.

El intuicionismo se basa en un retorno al concepto de construcción en Kant; establece que toda afirmación de existencia que aparezca en matemáticas debe apoyarse en un procedimiento que permita encontrar o construir la entidad afirmada. Según Brouwer el término intuicionismo proviene de que los números naturales brotan en el sentido interno por una especie de intuición originaria del acto de contar. Los intuicionistas rechazan el infinito actual y dan una importancia destacada al infinito potencial, como ya hizo Aristóteles; también rechazan el principio del tercio excluso y de la doble negación; sin embargo dejan sin fundamentación partes considerables de la matemática que necesitan de principios no admitidos por el intuicionismo.

Es posible adoptar una postura formalista, logicista o intuicionista respecto al concepto de número natural dentro de la filosofia de la matemática. En cada caso se tiene una interpretación diferente del concepto de número, que lleva a modificaciones en la presentación de los restantes sistemas numéricos y sólo ofrecen una respuesta parcialmente satisfactoria. El aparentemente simple concepto de número natural muestra una complejidad que no se ha dejado controlar hasta el momento.