PROPUESTA DE ENSEÑANZA DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN RACIONAL, MEDIANTE ACTIVIDADES DE VISUALIZACIÓN

Lucía González Rendón, Marisol Radillo Enríquez, Irma Yolanda Paredes Águila, Ana Rosa Sahagún Castellanos, Rosalba Espinoza Sánchez
Universidad de Guadalajara (México)
lgrendon2@yahoo.com.mx, marisolradillo@yahoo.com.mx

Resumen. En este trabajo se propone una secuencia didáctica de actividades para la enseñanza del límite de una función racional, en el caso 0/0, mediante la visualización y con el uso de las nuevas tecnologías, de manera que los estudiantes manejen diferentes representaciones semióticas relacionadas con el concepto de límite

Palabras clave: visualización, representación, concepto de límite

Abstract. In this article we propose a didactic sequence for teaching the concept of limit of a rational function, the 0/0 case, by using visualization and supported in computer technology. The purpose is to help students to coordinate different semiotic systems of representation of the limit concept.

Key words: visualization, representation, limit concept

Introducción

Una dificultad que se presenta en la comprensión de toda noción matemática, en particular en la noción de límite, es la de articular los diferentes registros semióticos. Por otra parte la enseñanza tradicional del concepto de límite de una función racional suele involucrar únicamente la representación algebraica. No obstante, en aquellos casos en los cuales se obtiene por sustitución directa una indeterminación del tipo 0/0 y posteriormente se utiliza un procedimiento algebraico para encontrar el límite de la función, el uso de una sola forma de representación resulta insuficiente, ya que se dejan de lado otros aspectos que enriquecen la formación del concepto de límite.

Contexto

La idea de este trabajo surgió de la experiencia docente en los cursos de Cálculo Diferencial e Integral que se ofrecen a las diversas licenciaturas del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara, México. En esta institución se tiene una estructura departamental de tal manera que cada grupo de matemáticas se integra con alumnos de hasta 13 diferentes licenciaturas; aproximadamente 2300 alumnos cursan cada semestre la materia de Cálculo Diferencial e Integral, en 62 grupos atendidos por más de 30 profesores. La formación de los grupos no es aleatoria, pues se permite a los alumnos elegir libremente las materias y horarios cada semestre, hasta completar los créditos previstos en el Plan de Estudios. El único prerrequisito para inscribirse en un grupo de Cálculo Diferencial e Integral es haber aprobado el curso de Precálculo.

La propuesta parte de algunas dificultades que hemos detectado en los estudiantes del CUCEI al resolver problemas de límite de funciones racionales, cuando éstas presentan un punto de discontinuidad y, al determinar el límite por sustitución directa, se obtiene la indeterminación 0/0. Si bien hay varios conceptos matemáticos involucrados en este caso, nos enfocamos en dos situaciones:

1. Al resolver el límite mediante la factorización y simplificación de la función, el estudiante cree que la función que "no existía" en cierto valor de x ($x = c$), ahora "ya existe". Es decir, que en las actividades tradicionales la manipulación algebraica de la función está desvinculada del contexto geométrico y no contribuye al aprendizaje de las nociones de límite y discontinuidad de funciones.
2. Con la mera manipulación algebraica, al estudiante le resulta más difícil comprender que el límite de una función cuando x tiende a c no es el valor que toma la función en $x = c$, sino que tiene que ver con el comportamiento de la función en las vecindades de c.

Por lo anterior, pretendemos mejorar el aprendizaje del concepto de límite, mediante actividades apoyadas en las nuevas tecnologías y diseñadas para que los estudiantes se familiaricen con las representaciones algebraica, numérica y gráfica de las funciones y construyan el concepto de límite a partir de sus propios hallazgos.

Soporte teórico

La base de la propuesta son los conceptos de visualización y la premisa de que para lograr la comprensión de toda noción matemática es necesario conocer sus principales representaciones, sus significados, así como articular sus diferentes formas de representación (Duval, 1998; Font, s/f). La visualización es abordada como el proceso de formar imágenes con el apoyo de la computadora y utilizar dichas imágenes para la comprensión del concepto de límite de funciones racionales (Zimmermann& Cunningham, 1991; Negrón, et. al, 2004).

El soporte teórico de la propuesta se complementa con la noción de representación semiótica y la conveniencia de implementar diferentes sistemas de representación del concepto de límite (Duval, 1998; Blázquez y Ortega, 2001). Consideramos de gran importancia que el estudiante de Cálculo haga la transferencia o traducción entre las representaciones gráficas, algebraicas y numéricas de una función racional para construir el concepto del límite, en particular en los casos que se presenta la indeterminación 0/0, ya que se involucran aspectos fundamentales tales como los significados de las expresiones "tiende a", "valores cercanos a", "x se acerca a c por la derecha", "x se acerca a c por la izquierda", entre otras.

Si bien existen diferentes programas para la enseñanza del cálculo que pueden ayudar a crear estas condiciones, en esta propuesta se utiliza Graphics Calculus ya que facilita las actividades de visualización de los puntos de discontinuidad de las funciones y la sintaxis que se emplea para generar y manipular las gráficas es más sencilla que en otros programas tales como Winplot, MatLab, Derive o Cabri-Geometre.

Metodología

Se pretende que el alumno trabaje con funciones tales como $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, y utilice el programa Graphics Calculus para realizar una secuencia de actividades en la computadora que implique:

(1) Tener un acercamiento visual que permita explorar el comportamiento de la "gráfica" en el punto de discontinuidad $x = c$.

(2) Manipular los tamaños de los intervalos alrededor del punto de acumulación y observar el comportamiento de la función.

(3) Agregar una función extra *g*(*x*), que resulta de la simplificación de *f*(*x*) y con ayuda del zoom observar ambas gráficas en $x = c$ y próximos a *c*.

(4) Contrastar sus propias observaciones y conjeturas con el concepto del límite.

Al ejecutar el programa, aparece el menú principal mostrado en la figura 1.

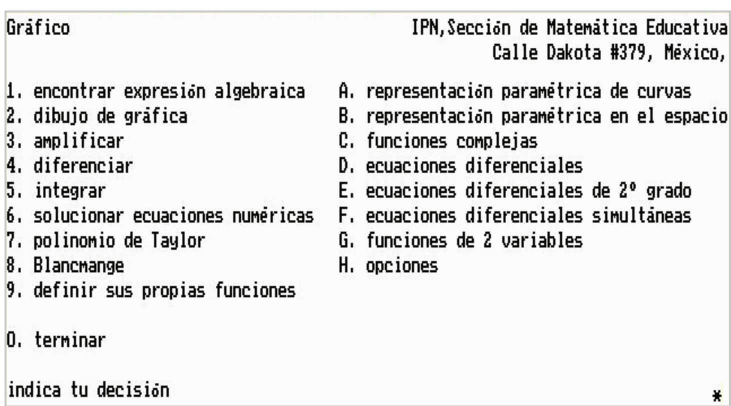

Figura 1. Menú principal del programa Graphics Calculus.

Se selecciona la opción 3: "amplificar", se escribe la función a investigar, en este caso, $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ obteniéndose la gráfica de la figura 2. En la parte inferior de esta pantalla, se tienen las leyendas de las acciones ejecutables, las cuales se realizan oprimiendo la tecla correspondiente (indicada en letra mayúscula). Con las "flechas del cursor", es posible mover éste a través de la gráfica, el tamaño del paso se define con las teclas **<** y **>**.

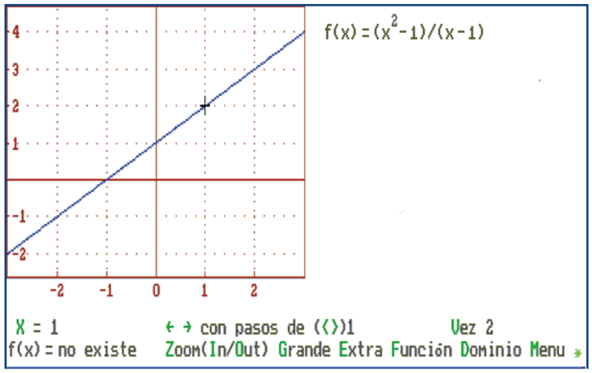

Figura 2. Gráfica de la función a investigar

Actividad I

Tener un acercamiento visual que permita explorar el comportamiento de la "gráfica" en el punto de discontinuidad.

Al colocar el cursor en $x=1$, se observa en pantalla (figura 3) que *f*(*x*) no existe. Se deja el cursor en esa posición y se procede a amplificar.

Al presionar *Z* (*Zoom*), aparece a la derecha de la pantalla la gráfica amplificada al doble (Vez 2) como se ve en la figura 3. Con la tecla C se cambia a la izquierda para reemplazar a la primera gráfica.

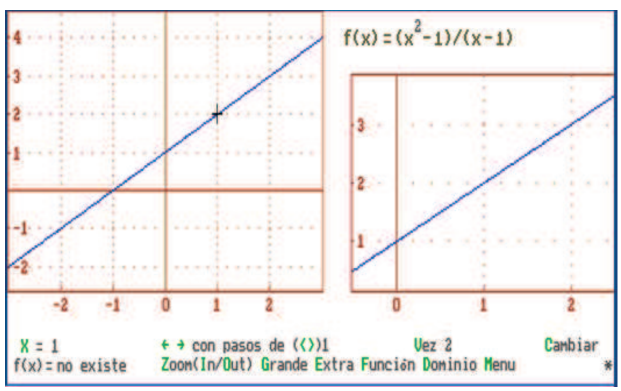

Figura 3. Primera amplificación de f.

Se repite este proceso de presionar alternadamente Z y C para obtener una secuencia de amplificaciones, hasta lograr la deseada, que puede ser como se ve en la figura 4, donde se observa la discontinuidad de la gráfica en $x=1$. En esta amplificación, los alumnos pueden hacer sus propias conjeturas sobre el comportamiento de la gráfica.

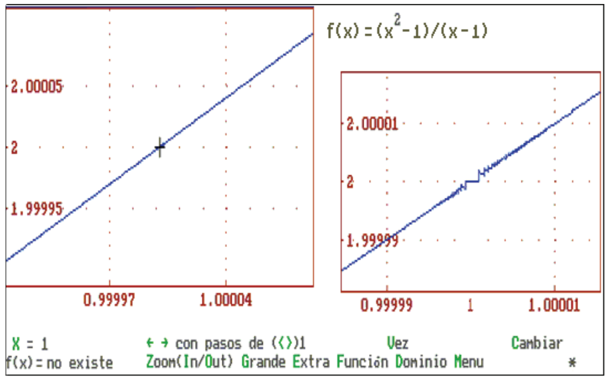

Figura 4. Amplificación que muestra la discontinuidad en $x=1$.

Actividad 2

Manipular los tamaños de los intervalos alrededor del punto de acumulación y observar el comportamiento de la función.

A pesar de que la función no está definida en $x=1$, el cursor puede acercarse a un punto de la gráfica a pasos o distancias deseadas. Si el paso es muy pequeño, el cursor dará "saltos" de este tamaño, mostrándose en la pantalla las coordenadas de su posición. Bajo amplificación es posible disminuir cada vez el tamaño del salto del cursor.

Al colocar el cursor tan cerca como se quiera de $x=1$, tanto por la izquierda como por la derecha, se pueden leer en pantalla los valores respectivos de *x* y *f*(*x*). El paso del cursor se puede disminuir tanto como se quiera, haciendo cada vez la amplificación adecuada para observar los saltos. En las figuras 5 y 6, el cursor se encuentra a una distancia de 0.0001 a la izquierda y la derecha de $x=1$, respectivamente.

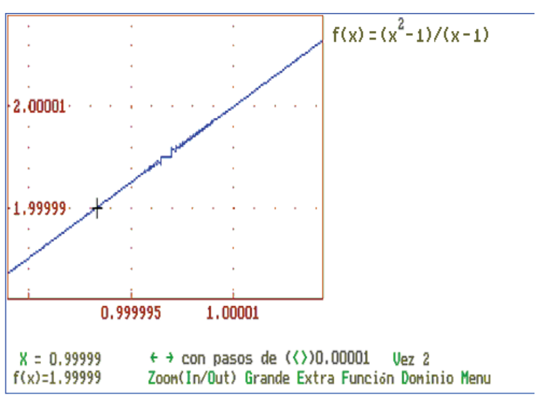

Figura 5. Paso de 0.00001 a la izquierda de 1

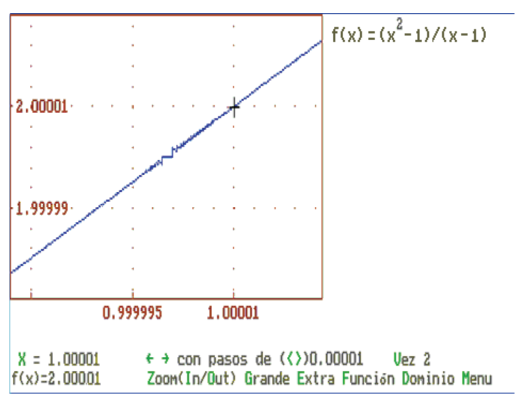

Figura 6. Paso de 0.00001 a la derecha de 1

Vemos que conforme *x* está más próxima a uno, tanto por la izquierda como por la derecha, *f*(*x*) se acerca cada vez más a dos. La visualización en estos procesos de aproximación, pueden ayudar al alumno, a comprender la noción intuitiva de límite, y que éste, no es el valor que toma la función en el punto que se está considerando (a menos que sea continua en ese punto), sino que tiene que ver con el comportamiento de la función en vecindades que contengan el punto.

Actividad 3

Agregar una función extra *g*(*x*), que resulta de la simplificación de *f*(*x*) y con ayuda del zoom observar ambas gráficas en $x=1$ y próximos a 1.

Si $g(x)=x+1$ es la simplificación de *f*(*x*), entonces $f(x)=g(x)$, en todo su dominio excepto en $x=1$. A la función *g*(*x*) se le llama "función extra".

Al presionar la tecla *E*, el programa permite agregar la función extra. En pantalla aparecerán escritas tanto *f*(*x*) como *g*(*x*). Al situar el cursor en $x=1$, se puede leer que *f*(*x*) no existe y $g(x)=2$. Con el cursor en esa posición se amplifica lo suficiente para observar la discontinuidad de *f*(*x*) y la continuidad de *g*(*x*), como se muestra en la figura 7.

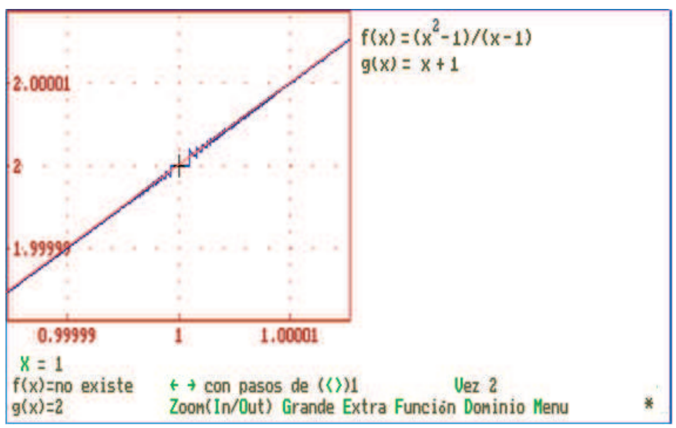

Figura 7. La gráfica de g(x) es continua en $x=1$, mientras que f(x) no existe.

Repitiendo el proceso de acercamiento a $x=1$, tanto por la izquierda como por la derecha, se pueden leer los valores que van tomando ambas funciones, observando que $f(x)=g(x)$, excepto en $x=1$. En las figuras 8 y 9, el cursor se encuentra a una distancia de 0.00001 a la izquierda y a la derecha de $x=1$, respectivamente.

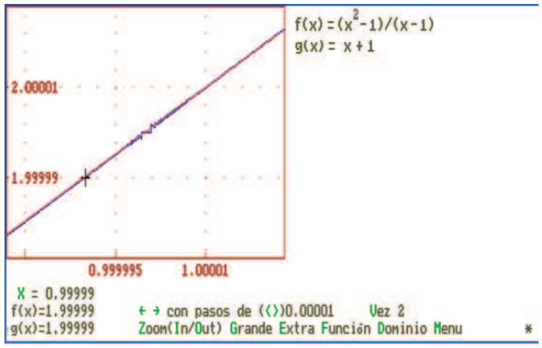

Figura 8. Paso de 0.00001 a la izquierda de 1

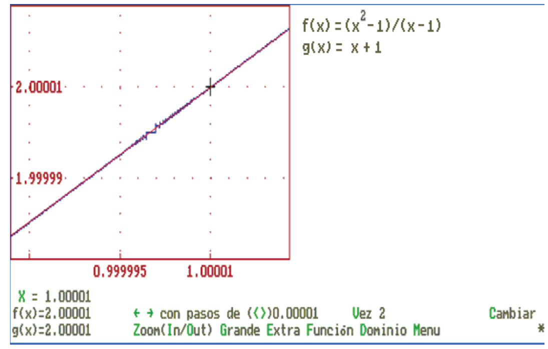

Figura 9. Paso de 0.00001 a la derecha de 1

Cuando x está más próxima a uno, $f(x)$ y $g(x)$ se acercan cada vez más a dos, es decir, ambas funciones tienen el mismo límite, por tanto, cuando se hagan los procesos algebraicos para calcular el límite de $f(x)$, existe la alternativa de calcularlo con la función extra $g(x)$, con un simple proceso de sustitución. Es decir, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

Comentarios finales

Con estas actividades, se pretende generar las condiciones que ayuden a establecer conexiones entre las diferentes representaciones del concepto de límite de una función racional: algebraica, numérica y gráfica. De esta manera se propicia una comprensión más amplia de la noción intuitiva del límite de una función al manipular el tamaño de los intervalos y se aprecia que el límite de una función se relaciona con el comportamiento de ésta en los alrededores de $x = c$. Por otra parte los estudiantes desarrollan los procesos de visualización centrados en los conceptos matemáticos involucrados en el problema, tales como el punto de discontinuidad de una función y el significado geométrico de las operaciones algebraicas que se ejecutan sobre la función.

Si bien se pueden utilizar diversos programas computacionales para generar estas actividades, el Graphic Calculus tiene la ventaja de la simplicidad en los comandos y un excelente apoyo gráfico para apreciar los puntos de discontinuidad.

Si no es posible usar la tecnología, se debe buscar la forma de generar actividades de visualización con los elementos que se tengan para no limitarse únicamente a la ciega manipulación algebraica. El propósito es ayudar al estudiante a una mejor comprensión de conceptos matemáticos que le provean de una estructura cognitiva sobre la cual pueda construir conceptos más abstractos.

Referencias bibliográficas

Blázquez, S., Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, (4) 3,* 219-236

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemática Educativa II*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Font, V. (s/f). *Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas.* Consultado el 27 de Agosto de 2009 en http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome14/font.pdf

Hitt, F. (1995). Intuición Primera versus Pensamiento Analítico: Dificultades en el Paso de una Representación Gráfica a un Contexto Real y Viceversa. *Revista Educación Matemática*, (*7) 1*, 63-75.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En L. Guerrero, R. García R, A. Sepúlveda & C. Cortés (Ed.). *Memorias de las conferencias plenarias del XI Encuentro de Profesores de Matemáticas*. Morelia, México, 1-26.

Negrón S, C., Estrada D, M., Hernández B, J., Sánchez S, J. L., Campano P, A. (2004). *El uso del programa cabri geometre en la enseñanza del análisis matemático*. Consultado en noviembre de 2005 en: http://www.mfc.uclv.edu.cu/scmc/Boletin/N2/cap11.htm

Torregrosa, G., Quesada, H. (2007). *Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. Relime, (10) 2,* 275-300. Consultado el 5 de abril de 2010 en: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362007000200005&lng=es&nrm=iso>

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics.* USA: Mathematical Association of America.