¿PROBLEMAS CON EL LÍMITE O EL LÍMITE DE LOS PROBLEMAS ENSEÑADOS?

Clarisa Noemí Berman, Ana María Narvaez, Marcela Rodríguez
Facultad Regional Mendoza, Universidad Tecnológica Nacional (Argentina)
bercla@gmail.com, ana.narvaez@frm.utn.edu.ar, iqborbollon@speedy.com.ar

Resumen. La enseñanza universitaria de la Matemática tiene como eje central el tema Límite Funcional. Es bien conocido el hecho de la dificultad de comprensión de este concepto. El objetivo del presente trabajo es entender la problemática que presentan los estudiantes de la Facultad Regional Mendoza en este tema, para diseñar un material didáctico que les permita superar obstáculos cognitivos. Para validar las hipótesis de partida, se realizó una evaluación cuanti-cualitativa que nos hace reflexionar sobre el material de la cátedra. La presente investigación se enmarca en la Teoría APOS, desarrollada inicialmente por Dubinsky (1996). Las principales conclusiones en esta etapa del proyecto son: la ausencia de concepciones cognitivas en los estudiantes para comprender el Límite al nivel de esquema; la necesidad de interiorización de los conceptos previos al Límite y el replanteo del tratamiento didáctico del mismo.

Palabras clave: límite funcional finito. teoría APOE

Abstract. Math's university teaching has as a main topic the "Functional Limit". It is well known the fact that this concept is difficult for the students to understand. The objective of this work is to understand the problems that students in Mendoza's local college of National Technological University face regarding that topic, to design didactic material that allows them overcome cognitive obstacles. To validate our starting hypothesis, a quantitative-qualitative evaluation has been made and this has made us think about the material that we are using in the area. The present investigation is framed in the APOS theory, developed initially by Dubinsky (1996). The main conclusions at this stage of the project are: the absence of cognitive concepts in the students to understand "Limit" as a scheme, the necessity of internalizing concepts previous to "Limit" and the rethinking of the didactic strategies used.

Key words: functional finite limit. APOS theory

Introducción y antecedentes

La enseñanza universitaria de Matemáticas en ingeniería tiene como eje central en Análisis Matemático I, el tema Límite Funcional. Es bien conocido el hecho de la dificultad de comprensión de este concepto en los estudiantes, tópico investigado por numerosos autores, entre los que destacamos a Sierpinska (1985,1987); Cornu (1983,1991); Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas, Vidakovic (1996); Asiala, Brown, De Vries, Dubinsky, Mathews y Thomas (1996), entre otros. Es relevante citar el artículo *Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas?* de Artigue (1996) en el que realiza un interesante resumen de las investigaciones sobre el tema obtenidas hasta la fecha citada. Reporta las dificultades de los estudiantes con el campo conceptual del Análisis, clasificándolas en tres categorías no independientes: las ligadas a la complejidad matemática de los objetos básicos (números reales, funciones y sucesiones), a la conceptualización de la noción de límite y a su dominio técnico y a la necesaria ruptura con los modos característicos de pensamiento algebraico.

Problema

Los estudiantes mostraron dificultad en dar una definición precisa de límite y una comprensión clara del mismo. Más aún, no se vio la coordinación entre el concepto y la aplicación propuesta que solicitaba determinar el valor δ que verifica la definición de límite para la función $f(x) = x^3 - 7$ en $x = 2$ con ε = 0,4 (en el otro tema, $f(x) = x^3 - 26$ en $x = 3$ con ε = 0,6).

Diagnóstico

El problema señalado ha sido detectado en el análisis de una muestra de exámenes correspondientes a 6 cursos (180 alumnos) de Análisis Matemático I de una población de aproximadamente 500 alumnos distribuidos en 17 cursos, en una evaluación que se denomina institucionalmente *primera evaluación global* en 2009.

Los resultados cuantitativos obtenidos en la muestra se observan en el siguiente diagrama:

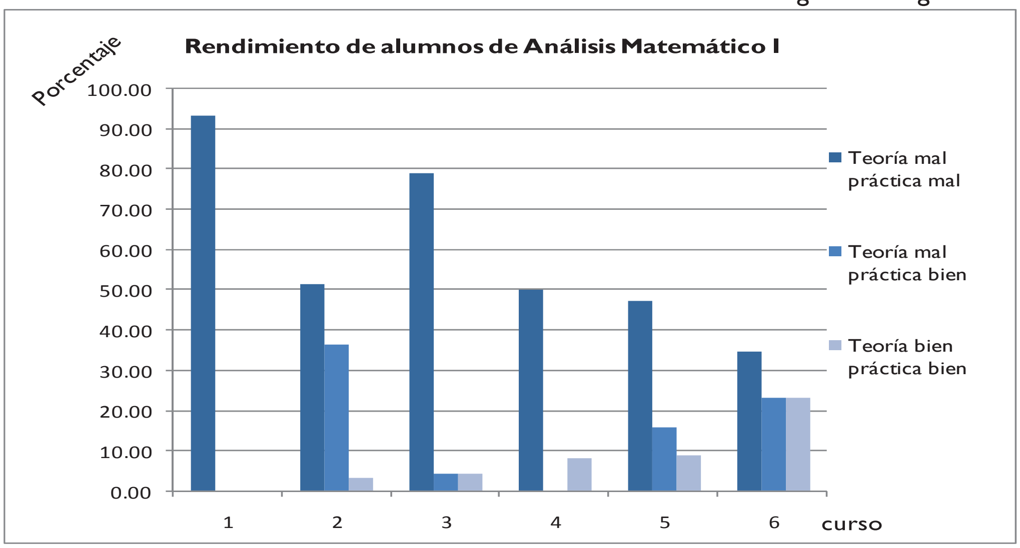

Gráfico Nº 1: Rendimiento de alumnos

Análisis de los resultados y posibles explicaciones

Se observan definiciones incorrectas o no contestadas y ejemplos bien hechos, lo que estaría indicando la memorización del algoritmo de cálculo o equivalentemente la tarea rutinaria, puesto que este trabajo había sido realizado por los docentes.

Los errores más comunes en la definición de límite son: ausencia del signo $\Rightarrow$; en lugar del signo $\Rightarrow$, escriben el signo $\Leftrightarrow$; no escriben los cuantificadores, solamente se observa la siguiente expresión $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$; además no pueden escribir en lenguaje semántico la definición de límite.

Los errores más frecuentes en el ejercicio consisten en no aplicar correctamente propiedades de valor absoluto, en consecuencia no resuelven la inecuación correspondiente y, si llegan a obtener los dos valores δ_1 y δ_2 correctamente no expresan las conclusiones solicitadas en la consigna.

A continuación se presentan dos producciones de estudiantes que son revisadas a la luz de la Teoría APOE, corresponden a Juan y Pedro, respectivamente.

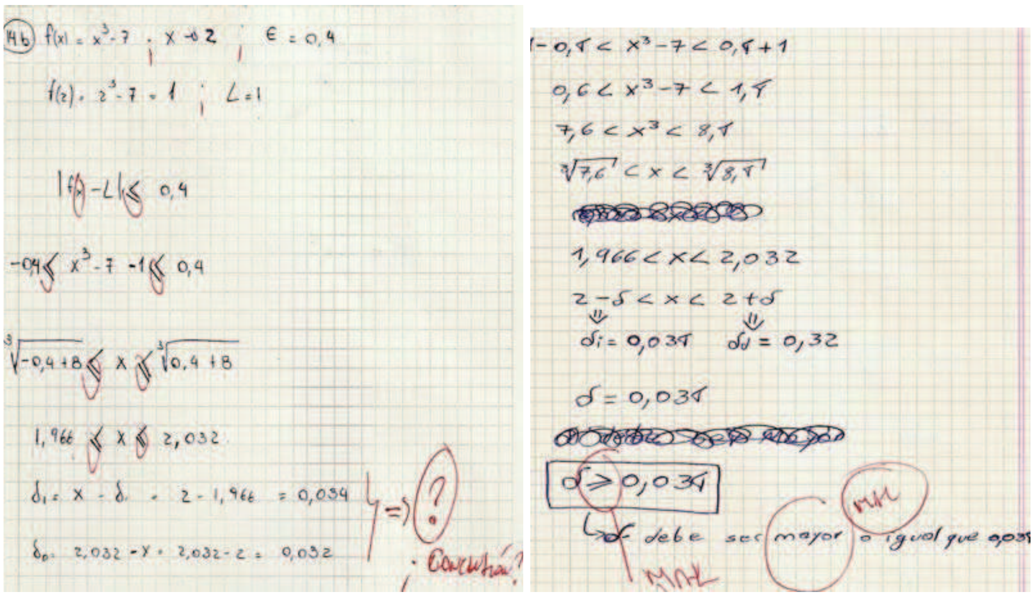

Imagen Nº 2: Fotos de la producción de Juan (izquierda) y Pedro (derecha)

El examen de Juan no contiene la definición de límite finito en ningún registro de representación, no aparece ninguna expresión en símbolos conteniendo el límite *l*. Se observa que está en la etapa de *acción* pues a pesar de escribir una inecuación incorrecta, trabaja bien en forma algebraica, no pudiendo concluir respecto del valor adecuado δ. Parecería que, como dicen Contreras de la Fuente y Font Moll (2002), este estudiante ha enfrentado el conflicto semiótico "considerar que el entorno es siempre simétrico".

En el escrito de Pedro se observa que no aparece la definición de límite, si bien propone una inecuación correcta y resuelve adecuadamente, se observa que no reflexiona sobre la *acción*, no logra interiorizar en *proceso* pues da como resultado un valor δ carente de sentido (recuadra la expresión que considera δ mayor o igual que 0,034); no se observan gráficos ni verificaciones.

Hipótesis de trabajo

A partir del diagnóstico realizado y habiéndose revisado, a partir de la Teoria APOE, los trabajos prácticos de Funciones y Límites de Análisis Matemático I correspondientes al año 2009, la bibliografía de la asignatura y el cuadernillo del Seminario Universitario, se elaboraron las siguientes hipótesis de trabajo.

H1) En el material de estudio correspondiente al curso de ingreso sólo aparecen ejercicios rutinarios y no se observa una red de problemas que le otorguen significación a los conceptos matemáticos básicos para lograr la internalización de los mismos.

H2) En el material de estudio de la cátedra referido a los temas que son prerrequisitos para el estudio del Límite Funcional (conjuntos numéricos, distancia, inecuaciones, entornos y funciones) aparecen ejercicios que son utilizados, en general, sólo en las fases de acción y proceso (estadíos cognitivos de menor profundidad desde la teoría APOE).

Objetivo de investigación

Diseñar un material didáctico que permita superar a los estudiantes la insuficiente comprensión del concepto de límite funcional finito.

Ahora bien ¿cómo se realiza el diseño?

Marco teórico

Para lograr el objetivo, el marco privilegiado en esta investigación-acción es la Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) o APOS (Action-Process-Objet-Schema) que permite modelar la construcción mental matemática, se debe a Ed Dubinsky quien a partir del constructivismo de Piaget explica la forma en la que se construyen o se aprenden conceptos matemáticos. El principio de aprendizaje en esta teoría es que un individuo no aprende los conceptos matemáticos directamente; si tiene las estructuras apropiadas, aprender es fácil, casi automático; si no las tiene, es casi imposible. Por lo tanto, la meta de la enseñanza debe ser ayudar a los estudiantes a construir las estructuras de mejor manera, y a conectar los conceptos matemáticos. Esta teoría está en continuo desarrollo.

La siguiente proposición muestra la base de la Teoría APOE "El conocimiento matemático es una tendencia individual a la respuesta, en un contexto social y construyendo y reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones" (Dubinsky, 1996, p. 32-33). Se observan tres tipos especiales o estructuras básicas para la construcción del conocimiento matemático: *acción*, *proceso* y *objeto* que están organizados en estructuras que se denominan esquemas. Los mecanismos mentales para construir dichas estructuras son las reflexiones abstractas tales como *interiorización*, *encapsulación* y *coordinación*.

El manejo de un concepto ante distintas situaciones problemáticas es diferente cuando un individuo responde desde una *concepción acción*, desde una *concepción proceso* o desde una *concepción objeto.* En esta teoría, comprender un concepto matemático, comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales previamente construídos para formar *acciones*; acciones que son *interiorizadas* para formar *procesos*; procesos que son *encapsulados* para formar *objetos*; los objetos pueden ser *desencapsulados* de nuevo a los procesos a partir de los cuales fueron formados; acciones, procesos y objetos pueden ser organizados es *esquemas*.

Esta teoría es un soporte adecuado para la Didáctica de la Matemática universitaria, en el tema en cuestión, pues es un marco en el que es posible buscar soluciones o estrategias pedagógicas.

Metodología

La metodología de investigación es la Ingeniería Didáctica ya que la misma se caracteriza por un esquema experimental basado en "realizaciones didácticas" en clase, esto es sobre la concepción, observación y análisis de secuencias de enseñanza. El problema planteado en la presente investigación es la renovación de la enseñanza del concepto de límite funcional con un nuevo material didáctico. Las investigadoras se encuentran frente a un objeto de enseñanza instalado y se hacen los siguientes interrogantes:¿porqué modificarlo?¿qué dificultades son esperables?¿cómo superarlas?¿cómo determinar el mejor conjunto de actividades para lograr la aprehensión del tema?. Con esta metodología se tratará de dar respuesta a estos interrogantes siguiendo las fases que la caracterizan, esto es: la fase 1 de análisis preliminar, la fase 2 de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, la fase 3 de experimentación y la fase 4 de análisis a posteriori y evaluación (Artigue, 1995).

Diseño del material didáctico

Para el diseño, se tienen en cuenta: la teoría APOE, la Teoría de Registros y Representación Semiótica (Duval, 1999), el estudio histórico epistemológico del concepto (Valdive y Garbin, 2008), (Boyer, 1968),-cuyos principales propósitos son el de permitirnos determinar obstáculos epistemológicos, obtener los campos de la ciencia que hacen uso del mismo y generar situaciones de enseñanza que permitan al estudiante "hacer matemática" (Narvaez, 2006)-y nuestra práctica docente.

A modo de ejemplo de la concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, se presenta la siguiente actividad que permite observar las respuestas de los estudiantes y construir una descomposición genética (considerada preliminar), cuyo aporte es enriquecedor en la confección del material didáctico deseado.

Un fabricante diseña una pelota que tiene un volumen de 268 cm3.

a) ¿Cuál es el radio de la pelota?

b) Si el volumen puede variar entre 266 y 270 cm3 ¿cuánto puede variar su radio?

Utilice la definición e - d de límite para describir esta situación. Identifique e y d. Interprete gráficamente.

Nota: Cabe destacar que el enunciado se encuentra en libros de textos usuales y es utilizado en la enseñanza tradicional. Se entiende por enseñanza 'tradicional' *a un sistema pedagógico que no se fundamenta en una investigación científica en educación matemática y que, en general, no ha logrado avances en el aprendizaje de los conceptos matemáticos* (Alvarenga, 2003, p.199).

La actividad fue realizada en clase, con alumnos de dos cursos durante el primer semestre de 2010. Se planteó el problema y se analizaron los distintos niveles de conocimiento alcanzado por los mismos, los que fueron comparados con la descomposición genética realizada por Cotrill y colaboradores. Posteriormente, se indujo a los estudiantes a que avanzaran hasta alcanzar una concepción *objeto* del concepto definición de límite finito.

Los alumnos comenzaron a resolver el ejercicio utilizando distintas estrategias.

A continuación, se describe el orden del razonamiento utilizado por la mayoría de los estudiantes. Comienzan utilizando la fórmula de volumen de una esfera y hallan el valor del radio correspondiente a 268, 266 y 270 cm^3, respectivamente, resolviendo algebraicamente la ecuación. Sin embargo, no pudieron interpretar gráficamente la función volumen, lo que implica que estaban en la fase *acción* del concepto función, ya que obtenían algebraicamente valores en algunos puntos aislados pero sin interpretar, como se mencionó anteriormente, el concepto de función gráficamente.

Cuando la mayoría de los estudiantes logró interpretar gráficamente la función volumen, se pasó a la segunda etapa, es decir, utilizar los objetos matemáticos: inecuaciones y entornos, expresados mediante la notación de valor absoluto. Cabe destacar que si bien varios alumnos pudieron escribir la notación simbólica de límite funcional, otros tantos tenían dificultades en utilizarla, más aún en realizar los tratamientos en los distintos registros semióticos involucrados y en la conversión entre ellos. Fue general la dificultad detectada en el pasaje del lenguaje semántico al sintáctico, es decir, en interpretar que el volumen varía entre 266 y 270 cm^3 se corresponde con la inecuación $/v(r) - 268\ / < 2$, donde $v(r)$ indica el volumen de la pelota en función del radio. Frente a esta dificultad, el docente intervino induciendo a la escritura de una primera expresión simbólica, la correspondiente a la inecuación $266 < v(r) < 270$. Posteriormente el docente expresó en lenguaje natural "la distancia de $v(r)$ a 268 debe ser menor de 2 unidades" para que los estudiantes escribieran simbólicamente la inecuación deseada, lo que en efecto pudieron realizar.

No tuvieron dificultades en la resolución algebraica de la inecuación, pero persistía la problemática de la interpretación gráfica de la solución de la inecuación como un subconjunto del dominio en la variable radio *r*. Estaban en la etapa *acción* del objeto matemático inecuación en sus dos concepciones: interpretación y resolución (Alvarenga, 2003).

Una vez alcanzada una concepción *objeto* de los conceptos inecuación y función se pasó a la tercera etapa, esto es, la de elegir el valor δ que verifica la definición de límite. Aplicaron los pasos algebraicos en forma correcta y lograron interpretar la definición de límite, gráficamente, ya que habían realizado varios cambios entre los registros de representación semiótica y tratamientos en cada uno de ellos.

Una descomposición genética

Parte de la teoría APOE consiste en analizar cada unidad de enseñanza para producir lo que se conoce como "descomposición genética del concepto", esta es una descripción de las *acciones*, *procesos*, *objetos* y *esquemas* involucrados en la enseñanza del concepto y de la manera en que se interrelacionan. La descomposición propuesta es la siguiente:

(1) la acción de evaluar la función *f* en puntos *x* próximos y no tan próximos al valor *a;*

(2) la acción de evaluar la variable *x* para valores próximos de *f* a un cierto valor de la función (este paso se denomina "inversión" en la teoría APOE);

(3) interiorización del paso (1) y (2) para construir un proceso – rango con radios variables en entornos con centro en el límite *l*;

(4) construcción de un proceso-dominio en el cual se observe la dependencia del entorno de *x* a partir del entorno en la variable dependiente *y*. Observar la posibilidad de la asimetría del entorno con centro en *a*;

(5) construcción del objeto matemático "para todo ε existe por lo menos un valor δ";

(6) coordinación de (3) y (4) a través de *f*. Es decir, la función *f* se aplica al proceso '*x*

aproximándose a *a* ' para obtener el proceso '*f(x)* aproximándose a *l*';

(7) reconstruir el proceso (6) en términos de desigualdades e intervalos;

(8) aplicar el esquema de cuantificación para vincular (5) y (7) y obtener una definición formal de límite;

(9) encapsular (8) para obtener el objeto "definición de límite finito".

Conclusiones

Las conclusiones en esta etapa de la investigación son: -la ausencia de concepciones cognitivas en los estudiantes para comprender el Límite funcional al nivel de *esquema*; -la necesidad de la *interiorizació*n de los conceptos previos al Límite funcional; -las dificultades detectadas para relacionar los diferentes registros semióticos y elaborar traducciones adecuadas entre ellos; -las dificultades presentes para trascender los modos de pensamiento numérico y algebraico; -la insuficiencia del material de enseñanza y aprendizaje en cuanto a la calidad de las situaciones didácticas planteadas para promover la aprehensión del concepto; -la sugerencia didáctica de concentrarse en la construcción de los procesos dominio y rango y en la aplicación de la función para lograr el vínculo entre ambos, de acuerdo con Cottrill, Dubinsky et al. (1996); de igual modo respecto de los cuantificadores; -la riqueza implícita de cierta clase de problemas presentes en libros de textos usuales cuando son tratados desde la teoría APOE.

Es importante conocer el esquema de interpretación o el pensamiento del alumno (descomposición genética del concepto) para generar situaciones didácticas adecuadas, esto es, diseñar una gama de actividades que permita, a la mayoría de los estudiantes, la comprensión del concepto.

Por lo expuesto, las reflexiones finales se refieren al replanteo del tratamiento didáctico que como docentes le estamos imprimiendo al objeto de estudio, la necesidad de realizar estos análisis didácticos de forma permanente y la necesidad de investigar en Didáctica de la Matemática pues esta actividad elevará el nivel de los aprendizajes.

Referencias bibliográficas

Alvarenga, K. (2003) La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 6(3), 119-199

Artigue, M., (1995). Ingeniería Didáctica. En P. Gomez (Ed.), *Ingeniería Didáctica en Educación matemática. Un esquema para la investigación, la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). Méjico: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1996). Learning and Teaching Elementary Analysis. En C. Alsina, M. Alvarez, M.Niss, A´erez, L.Rico, A.Sfard (Eds.), 8th International Congress on Mathematics Education – Selected Lectures, pp. 15-30. Sevilla: S.A.E.M. Thales.

Asiala, M., Brown, N., De Vries, D., Dubinsky, E., Mathews D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education II. CBMS Issues in Mathematics Education* 6, 1-32.

Bergé, A. y Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6(3), 163-197.*

Boyer, C. B. (1968). *Historia de la Matemática*. New York: Ed. John Wiley & sons.

Contreras de la Fuente, A.y Font Moll, V. (2002). ¿Se aprende por medio de los cambios entre sistemas de representación semiótica? XVIII Jornadas del SI- IDM, (pp.1-23), Castellón.

Cornu, B. (1983). Quelques obstacles á l'apprentissage des notion des limite. *Recherches en Didactiqué des Mathématiques 4*, 236-268.

Cornu, B. (1991). Limits. En David Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking 1*, 153-166. Boston/London: Kluwer Academic Pres Dordrecht.

Cottrill, J.; Dubinsky, E.; Nichols D.; Schwingendorf K.; Thomas K. y Vidakovic D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Schema. *The Journal for Mathematical Behavior 15*, 167-192.

Dubinsky, E. (1991). The Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics. En L. P. Steffe (Ed.), *Epistemological Foundation of Mathematical Experience.* Nueva York: Springer-Verlag.

Dubinsky, E. (1996). Una aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática postsecundaria. *Educación Matemática 8*(3), 24-45.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Narvaez, Ana María (2006). *Una reflexión sobre los que fueron considerados inútiles, inservibles, imposibles, y ocultos números complejos.* Tesis de Maestría, Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Sierpinka, A. (1985). La notion d'obstacle épistémologique dans l'enseignement des mathématiques. *Actes de la 37e Rencontre CIEAEM*, 73-95. Leiden.

Sierpinka, A. (1987). Obstacles épistémologique relatifs á la notion de limite. *Recherches en Didactiqué des Mathématiques, 6*(1), 5 -67.

Valdivé, C., Garbin, S. (2008). Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11*(3), 413 - 450.