RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE IMPLICAN IDENTIFICAR DE MANERA CONSTANTE LA UNIDAD DE REFERENCIA: UN ESTUDIO DE CASO

Patricia Lamadrid González, Marta Elena Valdemoros Álvarez
CINVESTAV-IPN (México)
malishlama@yahoo.com.mx, mvaldemo@cinvestav.mx

Resumen. Un elemento importante para el diseño de secuencias didácticas es el conocimiento matemático que tienen los docentes acerca de las fracciones. En este artículo nos centramos en identificar el conocimiento que tiene el profesor en relación a las fracciones y la identificación de la unidad de referencia, así como el manejo del todo continuo y el todo discreto. El estudio se realizó a través de observaciones, cuestionarios, entrevistas de corte didáctico, y diseño de una planeación didáctica. La investigación es de corte cualitativo y está enfocada a realizar un estudio de caso. Mostramos en este documento el análisis de los resultados obtenidos en los cuestionarios que implicaban el planteamiento y la resolución de problemas correspondientes al caso del profesor José en quien identificamos el dominio adecuado de la partición, así como el uso de pictogramas como estrategia de resolución.

Palabras clave: profesores, problemas verbales,unidades divisibles

Abstract. An important element in the design of didactic sequences is the mathematical knowledge that teachers have of fractions. This article focuses on identifying the knowledge that the teacher has in relation to fractions and on the identification of the unit of reference, as well as the use of the continuous whole and the discrete whole. The study was carried out by means of observations, questionnaires, interviews of didactic type, and the design of a didactic planning. The research is of a qualitative type and is focused on carrying out a case study. We show in this document the analysis of the results obtained from the questionnaires which implied the setting out and the solution of the problems corresponding to the case of teacher José in whom we identified the adequate command of partition, as well as the use of pictograms as a strategy of solution.

Key words: teachers, verbal problems, divisible units

Introducción

Identificamos que los niños presentan dificultades en el aprendizaje de las fracciones. Sin embargo, nos centramos en el docente para identificar su conocimiento en relación a las fracciones. Analizamos la enseñanza de las fracciones desde distintos aspectos involucrados en este proceso. Tomamos en cuenta algunos elementos como la planeación didáctica, los recursos empleados, el diseño y la puesta en práctica de las estrategias didácticas y los conocimientos que tienen los docentes acerca de las fracciones. En este momento nos enfocamos en la resolución de problemas que impliquen identificar la unidad de referencia. Para ello empleamos un cuestionario en dos etapas que permitieran al docente, resolver y plantear problemas que implicaran el uso de los significados de la fracción. Presentamos el estudio de caso del Profesor José quien cuenta con cuatro años de servicio.

Marco teórico

La fracción se establece a partir de dos relaciones fundamentales, la relación parte-todo y la relación parte-parte. Lo anterior requiere la existencia de un todo divisible, compuesto por elementos separables. La acción reversible de separar las partes trae consigo la conservación del todo. Una fracción implica un número determinado de partes. El número de partes en que se divide un todo continuo establece una relación fija con el número de intersecciones. La división del todo es exhaustiva y equitativa. Una fracción es una parte del todo inicial al mismo tiempo que cada una de las partes, pueden ser partes en si mismas divisibles nuevamente. (Piaget, Inhelder, Szeminska, 1966).

La conservación del todo requiere su identificación como unidad arbitraria. Establecer la unidad arbitraria, es decir, el estado-unidad, fortalece, para el concepto de fracción, su naturaleza particularmente relativa. El estado-unidad nos refiere a la descripción de un estado de cosas inicial sobre el que puede realizarse una orden de ejecución de una operación que da como resultado un estado de cosas final o simplemente un estado de cosas. La fracción es considerada como un estado o un operador que actúa sobre una unidad arbitraria y a partir de ella se generan las cadenas estado-operador-estado (Dienes, 1967).

El todo, como unidad arbitraria, puede ser discreto o continuo, definido o indefinido, estructurado o carente de estructura (Freudenthal, 1983). El todo continuo puede representarse con una figura geométrica, una parte de esta unidad es indicada por una fracción que relaciona la parte con el todo. En el todo discreto, expresado como un conjunto, donde un subconjunto contenido en él se indica con una fracción, ésta es empleada como un medio que establece la relación entre ambos (Hart, 1981).

La fracción es un recurso fenomenológico del número racional, en tanto que puede identificase y representarse concretamente de distintas maneras (Freudenthal, 1983). Kieren (1988) señala cinco "constructos intuitivos" (significados) de la fracción inmersos en el campo de cocientes del número racional: operador multiplicativo, cociente, medida, razón y relación parte-todo. Además, ubica a la partición, la equivalencia y la formación de unidades tan próximos a la realidad como a los constructos mentales humanos.

La relación parte-todo es definida como la división de un todo en partes equivalentes, señalando como resultado un número determinado de partes. Éste significado genera el lenguaje de la fracción ya que se relaciona con los demás significados a partir de identificar la unidad de referencia.

Identificar de manera constante la unidad de referencia es primordial en el trabajo con fracciones. La Reforma Integral de Educación Primaria enfatiza que el docente diseñe estrategias didácticas que propicien en el alumno el reconocimiento de la unidad divisible (Secretaría de Educación Pública, 2009). Monereo, Castelló, Clariana, Palma, Pérez, (2007) plantean que el diseño didáctico y la aplicación de estrategias didácticas deben promover en el alumno la identificación del objetivo de las actividades, reflexionar sobre sus posibilidades de llevarlas a cabo, identificar sus conocimientos previos y la información que necesitará, promover el análisis sobre cómo realiza el aprendizaje y no sólo sobre los resultados obtenidos así como justificar su elección de los procedimientos usados para resolver la tarea. Dichos autores reconocen al conocimiento disciplinar como un apoyo fundamental del docente para el diseño de estrategias didácticas.

La forma en que el profesor comprende las matemáticas determina el tipo de tarea que selecciona y las representaciones que utiliza en la enseñanza (Llinares y Sánchez, 1998). Shulman (1986) destaca la importancia y necesidad de que el docente adquiera conocimientos específicos para la enseñanza y sus fundamentos pedagógicos, refiriéndose a estos últimos como la forma de representar y formular la materia que la haga comprensible a otros.

Problema de investigación

Identificamos a la fracción como uno de los contenidos que presenta dificultades para su aprendizaje. Nos centramos en uno de los actores principales del proceso enseñanza-aprendizaje: el docente. Planteamos nuestro problema de investigación como: *"El desarrollo de la enseñanza de las fracciones por parte del maestro de primaria, en servicio."*

Nuestro objetivo es identificar en el docente la relación entre su conocimiento acerca de las fracciones, el diseño didáctico y la puesta en práctica de estrategias didácticas, para ello hemos formulado las siguientes preguntas de investigación:

- *¿Cuáles son las estrategias didácticas del docente en la enseñanza de las fracciones?*
- *¿Cuál es la relación entre el desarrollo de la clase, la planeación didáctica y los recursos empleados para la elaboración de ésta?*
- *¿Cuáles son los conocimientos que tiene el docente acerca de las fracciones?*

Método

Nuestra investigación de corte cualitativo fue desarrollada en escuelas primarias públicas del Distrito Federal, México, durante el turno vespertino, su horario escolar es de las catorce a las dieciocho treinta horas. Cabe mencionar que todas las asignaturas son abordadas por los profesores frente a grupo. En la educación básica de nuestro país, las fracciones, como contenido, son incorporadas de manera formal a la currícula en el tercer grado de educación primaria, Es por ello que nuestros sujetos de estudio son docentes de este nivel educativo.

Instrumentos metodológicos

- **Cuestionario inicial** en el que recabamos información del profesor en relación a su experiencia laboral, su formación, capacitación y actualización docente.
- **Observación directa de la clase** en la que el profesor determinó el contenido específico a desarrollar enfocado a las fracciones.
- **Observación indirecta en las actividades cotidianas** plasmadas en los cuadernos y libros de los alumnos. Realizamos observación participante sin intervenir durante el desarrollo de la clase, la selección y el diseño de tareas y estrategias didácticas.
- **Cuestionario en dos etapas**: en la primera, el docente resolvió algunos problemas que implicaron utilizar operaciones básicas con fracciones en sus procesos de resolución, a partir de ello explicó, justificó y buscó diversas formas de solucionarlos al mismo tiempo que se le pidió identificar los significados de las fracciones implícitos en cada problema. En la segunda etapa, diseñó problemas en relación a los significados de las fracciones adecuándolos al grado que atiende y realizando el mismo proceso que en la primera etapa. Esto nos permitió identificar el uso que da al todo discreto y al todo continuo así como su conocimiento acerca de los constructos de las fracciones.
- **Entrevista en profundidad y de "corte didáctico"** (Valdemoros, 1998) en dos momentos, iniciamos con la construcción de una planeación didáctica por parte del docente, la cual se enfocó al desarrollo de la partición y la equivalencia. En otro momento resolvió dos problemas dados, planteó y resolvió dos más empleando los significados de las fracciones para los que presentaron mayor dificultad.
- **Observación final** en la que se llevó a cabo la aplicación de la planeación didáctica en el aula.

La validación de esta investigación se determinó a partir del empleo de controles cruzados entre el investigador y un observador entrenado, los dos permanecieron en las clases y el análisis de las actividades en los materiales del alumno. Se empleó la triangulación entre los instrumentos metodológicos, identificando semejanzas y diferencias entre el cuestionario, la entrevista y la planeación didáctica. Contrastamos estos elementos con la observación del desarrollo de la clase y la interacción del docente con sus alumnos.

Resultados: El caso de José

En este apartado presentamos el caso del profesor José, quien atiende un grupo de tercer grado de educación primaria. Él cuenta con treinta y dos años de edad y cuatro años de trabajo docente, además es egresado de la licenciatura en Educación Básica en la Escuela Normal Rural de Campeche. Cabe mencionar que también, en dicha institución, cursó hasta el segundo semestre de la licenciatura en español.

Uno de los problemas verbales que el profesor José resolvió en el cuestionario de la primera etapa es el siguiente:

> 3/8 de un afinca se venden, 2/5 del resto se siembran de caña y lo que sobra de tabaco. ¿Qué parte de toda la finca se siembra de tabaco? __3/5__

$$\frac{3}{8} - \frac{2}{5} = \frac{15 - 16}{40} =$$

La estructura de este problema es compleja y es posible que José al leer el texto "del resto" determinara que el proceso de resolución estaba a cargo de una sustracción, la cual se muestra a continuación:

El uso del algoritmo no le permitió hallar una solución, puesto que no concibió que el minuendo pueda ser mayor al sustraendo. Al no obtener una respuesta adecuada para él, decidió emplear el rectángulo dado en la tarea (Ver *Figura1),* el cual fue emplearlo como un pictograma (Valdemoros, 1993).

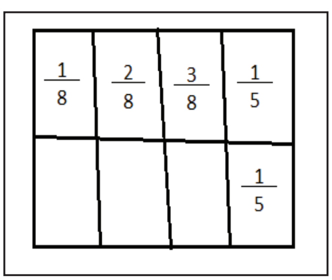


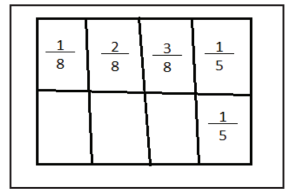
Figura 1. Solución de José.

En el pictograma realizó el conteo de uno a tres para cada una de las partes que corresponden a lo que se vende de la finca y lo indica. Señalando como fracciones unitarias los dos quintos correspondientes a lo que se siembra de tabaco. Además recurrió al conteo de las partes sobrantes, expresando y escribiendo como resultado tres quintos. Menciona que pueden ser también tres octavos ya que tres octavos y tres quintos son equivalentes porque son del mismo tamaño

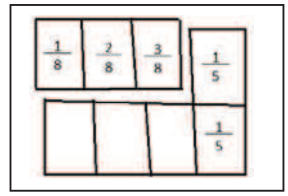
Como ya hemos señalado, el problema es complejo, implica identificar la unidad de referencia en dos momentos distintos. El primer momento se presenta cuando se requiere vender una parte de la finca (tres octavos), el todo es la finca. El segundo momento, requiere redefinir el todo que ahora está constituido por lo que se siembra de caña y lo que se siembra de tabaco. La pregunta del problema implica el paso por los dos momentos y regresar al primero.

Ahora detallaremos paso a paso el proceso de solución del profesor José.

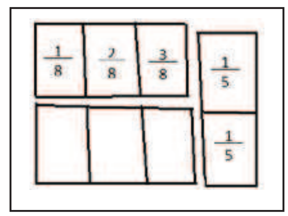
Primero identificó el todo y realizó las particiones necesarias para llegar a octavos y reconoció la parte correspondiente de venta y la de siembra de tabaco.



Posteriormente, separó mentalmente lo que se vende y el resto le permitió redefinir el todo. “El resto” se convirtió en el nuevo todo, ya dividido en cinco partes facilitó la “toma” de dos de ellas para la siembra de tabaco, y el restante lo identificó para la siembra de caña.



Después observó las tres partes restantes, que de acuerdo con el nuevo todo, son tres quintos que al compararlos con los tres octavos del primer todo, lo encuentra congruentes, señalándolos como equivalentes porque son del mismo tamaño. En este punto es donde el docente no consigue cambiar del segundo todo al todo original, al que se refería la pregunta.



Reunir las partes, redefinir la unidad de referencia y realizar el conteo de las que no están marcadas eran componentes importantes de una estrategia de resolución.

$$1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8} \quad \text{......(1)}$$

$$\frac{2}{5} \text{ de } \frac{5}{8} \quad \text{......(2)}$$

$$\frac{2}{5} \times \frac{5}{8}=\frac{2}{8} \quad \text{......(3)}$$

$$\frac{5}{8}-\frac{2}{8}=\frac{3}{8} \quad \text{......(4)}$$

Retomando el uso de algoritmos presentamos el siguiente proceso de resolución. Identificando el todo, la sustracción habría sido como se expresa en (1), donde cinco octavos corresponden al resto de los cuales dos quintas partes se siembran de caña (2), este momento emerge una relación parte-parte que es el soporte de lo multiplicativo (3). Finalmente, al restar a la parte de la finca que no fue vendida lo que se siembra de caña, se obtiene lo que de la finca se siembra de tabaco (4). Este proceso no requiere la redefinición del todo, sin embargo, es necesario hacer uso de la relación parte-todo, parte-parte y nuevamente parte-todo.

En el segundo momento de la entrevista en profundidad se pidió a José resolviera dos problemas y plantearan otros dos. Una de las tareas a resolver, donde se hace uso del todo discreto, fue:

> De una caja de fresas, 3/8 se pudrieron, 4/5 de las que no se pudrieron las preparamos con crema y con las que sobran hicimos licuado.
>
> ¿Qué parte de toda la caja de fresas utilizamos para el licuado? ___1/8___

En primera instancia, José buscó un común denominador como consecuencia de recordar el primer procedimiento que empleo en el problema del cuestionario de la primera etapa (mostrado anteriormente) con las mismas características. En esta nueva tarea no desarrolla la estrategia de sustracción porque el enunciado no incluye la expresión "el resto".

Cabe mencionar, que el problema tuvo apoyo de dibujos al presentársele un conjunto de fresas, las cuales son utilizadas para la resolución del problema (Ver *Figura 2*).

Figura 2. Resolución de José empleando todo discreto

Contó las fresas y dividió el total entre ocho, dividió el todo agrupando de tres en tres. Señaló tres de los subconjuntos con la palabra "pudrió". Contabilizó los agrupamientos que le quedan, redefinió el todo y reservó cuatro grupos de tres indicando que eran las fresas que se preparan con crema. Observó que le queda un subconjunto, de tres fresas y corresponde a un octavo del total del grupo que había en la canasta, describió que son las que se licuan. Contestando la pregunta, expresa que un octavo de fresas es lo que se utiliza para licuar.

Al pedirle que resuelva de manera distinta el problema anterior transformó el todo discreto en continuo para solucionarlo de manera similar al problema del terreno, descrito con anterioridad.

José utilizó el mismo pictograma, señalando con color tres partes y en una de ellas escribió la fracción un octavo, además comentó que estas son las que se pudren. Posteriormente, dibujó una marca a cuatro partes de las restantes representado las que se preparan con crema. Finalmente marcó la última expresando nuevamente que un octavo es lo que se emplea para licuar (Ver *Figura 3*).

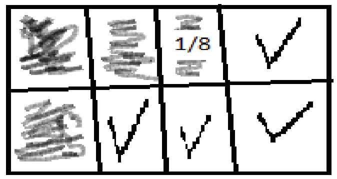


Figura 3. Pictograma realizado por José.

Al término de la resolución con el todo continuo, el profesor José, regresa al todo discreto y a cada elemento de los subconjuntos les pone un numeral, uno para cada una de las que integran el primer subconjunto y así consecutivamente hasta el marcar tres elementos con el número ocho. Dándole mucha importancia a los números naturales para poder dar una respuesta en fracción.

Conclusiones

La fracción se establece a partir de dos relaciones fundamentales, la relación parte-todo y la relación parte-parte, en el caso de José no se observa una adecuada conceptualización del segundo tipo debido a que no concibe a cada una de las partes como partes en sí mismas divisibles.

Además muestra mayor seguridad en relación al uso del modelo discreto, porque utiliza los números naturales y el conteo como apoyo a su resolución.

Asimismo, justifica sus pensamientos y establece códigos en la solución y plantea diversas estrategias para obtener una respuesta satisfactoria.

Referencias bibliográficas

Dienes, Z. (1967). *Fracciones*. Editorial Varazén. México.

Freudenthal, H. (1983). D*idactical Phenomenology of Matematical Structures*. Dordrecht, Holanda: D. Reidel.

Hart, K. (1981). *Fractions, en Children's Understandings of Mathematics, (11-16), London: Murray.*

Kieren, T. (1988). Personal Knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In J. Hiebert y M. Ber (Ed), *Number concepts and operations in the middle grades 2*, Reston, E. E. U.:National Council of Theachers Matematics. P. p. 162-181.

Llinares, S. y Sánchez, V. (1998). Aprender a enseñar, modos de representación y número racional. En L. Rico y M. Sierra (Eds) *Actas I Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. SEIEM: Granada, P. p. 15 – 26.

Monereo, C., Castelló, M., Clariana, M., Palma, M., Pérez, L. (2007). *Estrategias de enseñanza y aprendizaje.* Ed. Graó, México, D. F.

Piaget, J., Inhelder, B. & Szeminska, A. (1966). *The child´s conception of geometry*, London, England: Routledge and Keagan Paul.

Secretaría de Educación Pública. (2009). Programa de estudio 2009. Sexto grado. Educación Básica. Primaria. México.

Shulman, L. S. (1986): "Those who Understand: Knowledge Growth in Teaching". *Educational Researcher*, febrero, P. p. 4-14.

Valdemoros, M. (1993). La construcción del lenguaje de las fracciones y de los conceptos involucrados en él. Tesis Doctoral. México: Cinvestav-Matemática Educativa.

Valemoros, M. (1998). La construcción de la unidad en la suma de fracciones: Estudio de caso. (465-481). En F. Hitt (Ed) *Investigaciones en Matemática Educativa II*. México: Editorial Iberoamericana.