

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA REGLA DE LOS SIGNOS PARA LA MULTIPLICACIÓN

José Benjamín Chan Domínguez, Rocío Uicab Ballote
 Universidad Autónoma de Yucatán
 benjac100@hotmail.com, uballote@uady.mx

(México)

Resumen. En nuestro trabajo de investigación nos centramos en la regla de los signos para la operación de multiplicación y nuestro interés se enfoca en generar una propuesta didáctica orientada a provocar un espacio de análisis y reflexión que permita a los escolares esclarecer las reglas de los signos para la multiplicación. Nuestro diseño contempla la naturaleza histórica y epistemológica de las reglas de los signos para multiplicación; y considera un enfoque centrado en el alumno; es decir, el escolar como agente activo; tomando en cuenta una estructura didáctica, epistemológica y cognitiva; enmarcada en la ingeniería didáctica como metodología.

Palabras clave: multiplicación, reglas de los signos

Abstract. The main issue in our research is the rule of signs for the multiplication operation and our interest is focused on generating a didactic proposal that is oriented to cause a space of analysis and reflection that allow students to clarify the rules of signs for multiplication. Our design contemplates historical and epistemological nature of the rules of signs for multiplication, and considers a student-centered approach, i.e., the student as an active agent, taking into account a didactic structure, epistemological and cognitive, framed in a didactic engineering as methodology.

Key words: multiplication, rules of signs

Introducción

Desde nuestra perspectiva, el tratamiento escolar presentado para abordar los números con signos y en especial la regla de los signos para la operación multiplicación, se convierten en una dificultad para el aprendizaje de nuevos contenidos, pues en el aula de clase, el saber está enfocado a que el estudiante conozca y memorice las reglas: *(menos) (más) = menos*, *(más) (más) = más* y *(menos) (menos) = más*, y posteriormente, éstas se apliquen en la resolución de ejercicios. Aunque esta temática corresponde al nivel educativo básico (segundo de secundaria), alumnos de niveles educativos posteriores, presentan confusiones para aplicar correctamente las reglas.

Al igual que otros conceptos matemáticos, consideramos que un buen aprendizaje de la regla de los signos, contribuirá al aprendizaje de otros contenidos propios de la matemática. Cuando hacemos referencia a un buen aprendizaje, contemplamos que el estudiante en la construcción de su aprendizaje vaya apropiándose adecuadamente de la matemática, de tal forma que las definiciones, propiedades, teoremas, objetos matemáticos, etc. tengan un sentido lógico, ordenado y correcto que le permitan hacer uso de esa información adquirida y convertirla en conocimiento. Bajo ese esquema, la intención de nuestro trabajo se centra en generar una

propuesta sistemática y estructurada que permita didácticamente que el estudiante construya la regla de los signos para la multiplicación.

Problema de investigación

¿Por qué $(\text{menos}) (\text{menos}) = \text{más}$ y $(\text{menos}) (\text{más}) = \text{menos}$? Como matemáticos, sabemos que hay dos teoremas que al demostrarse bajo los axiomas de campo de los números reales, justifican las reglas de los signos.

Teorema 1: El producto de un número positivo por un número negativo es un número negativo.

Teorema 2: El producto de dos números negativos es un número positivo.

Sin embargo, es claro para nosotros que un enfoque axiomático de la regla de los signos en un nivel básico no sería quizá el camino adecuado para que el estudiante adquiriera el aprendizaje de dichas reglas, entonces ¿cómo diseñar una propuesta didáctica que permita a los estudiantes construir dichas reglas de los signos?

Marco teórico

Nuestra propuesta se fundamenta bajo el marco de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau y empleamos a la ingeniería didáctica como metodología de investigación. La teoría de las situaciones didácticas sostiene que el estudiante aprende matemáticas mediante la conducción de actividades diseñadas en un medio en el que se propone resolver una situación problemática para la cual de inicio se tiene una estrategia de solución que generalmente falla y de preferencia se pretende que el mismo medio comunique al estudiante que es necesario cambiarla lo que genera en él una nueva estrategia que lo adapta al medio (Nieto, Viramontes y López, 2009).

La ingeniería didáctica tiene una vinculación con la teoría de las situaciones didácticas, apreciada especialmente en la concepción y el análisis a priori de la ingeniería. Las elecciones que presiden a la organización de situaciones (didácticas) que provoquen que se logre un cierto aprendizaje, son explicitadas haciendo aparecer las variables didácticas sobre las cuales se ha intervenido, los *milieux* que estas elecciones determinan, buscan anticipar las interacciones posibles de los alumnos con estos *milieux* y sus efectos posibles en términos de construcción de conocimientos, en un funcionamiento en principio supuesto a-didáctico. Se manifiestan también en una estructuración del conjunto de las situaciones, frecuente aunque no sistemático, en relación con las tres dialécticas distinguidas por Brousseau para analizar las relaciones del sujeto con el conocimiento matemático: las dialécticas de la acción, de la formulación y de la validación. Finalmente, el papel del docente también es previsto en el

análisis, en referencia a los dos procesos antagonistas que, en la teoría de las situaciones didácticas, gobiernan las relaciones entre saberes y conocimientos: el proceso de devolución y el proceso de institucionalización, en los cuales el docente es un actor central (Artigue, 1995).

Metodología. Ingeniería didáctica

El término ingeniería didáctica se utiliza en didáctica de las matemáticas con una doble función: como metodología de investigación y como producciones de situaciones de enseñanza y aprendizaje. De acuerdo con Douady:

El término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis *a priori*, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase (Douady, 1996, p.241).

Diseño de la propuesta didáctica

Artigue (1998) distingue varias dimensiones ligadas a los procesos de construcción de ingenierías didácticas:

- Dimensión epistemológica: asociada a las características del saber puesto en funcionamiento.
- Dimensión didáctica: asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.
- Dimensión cognitiva: asociada a las características cognitivas de los alumnos a los que se dirige la enseñanza.

Dichas dimensiones fueron consideradas en nuestro trabajo porque aportan elementos para el diseño de la propuesta. A continuación un resumen de dichas dimensiones.

Dimensión epistemológica

Revisando el contexto histórico, presentamos un acercamiento a las prácticas relacionadas con el surgimiento de la regla de los signos de multiplicación en los diferentes períodos del desarrollo del álgebra que propone Nesselmann (1842). Uno de los aspectos que merece

especial atención son los números con signo, pues el surgimiento y desarrollo de la regla de los signos para la multiplicación, depende del conocimiento tanto práctico como conceptual de dichos números. Presentamos brevemente cómo se dio el surgimiento y desarrollo de la regla de los signos a través de las etapas de desarrollo del álgebra.

- Etapa retórica. En este período notamos que el conocimiento sobre los números con signos era limitado, pues las culturas desarrollaron su matemática a partir de cantidades positivas, de esa manera en dicho periodo no se podía hablar de la regla de los signos para la operación de multiplicación.
- Etapa sincopada. En esta etapa observamos que las culturas recurren a los números negativos por la necesidad de representar deudas, aunque no todos los matemáticos otorgaban a los negativos el estatus de números, se comenzó a trabajar a menudo con los negativos, lo que trajo como consecuencia que algunos matemáticos propusieran alguna especie de regla de los signos para la multiplicación, pero, observamos que dichas reglas sólo se enunciaban, ya que en ese período la demostración no constituía un elemento fundamental de las matemáticas. De esa forma Diofanto (siglo III), haciendo alusión al producto de dos diferencias escribe una especie de regla de los signos: “lo que es lo que falta multiplicado por lo que es lo que falta da lo que es positivo; mientras que lo que es lo que falta multiplicado por lo que es positivo, da lo que es lo que falta” (Gómez, 2001, p.259).
- Etapa simbólica. En esta etapa observamos que varios matemáticos plantearon demostraciones diferentes para la regla de los signos y esto se debió al dominio que tenían de los números negativos y en un sentido amplio al propio desarrollo de las matemáticas, por ejemplo, Euler en sus Elementos de Álgebra (1770) argumenta a partir de la interpretación de los negativos como deudas, la multiplicación de cantidades con signo es conmutativa y razona por eliminación diciendo que $-a$ por $-b$ será ab ya que no puede ser $-ab$ que es lo que vale $-a$ por b (Gómez, 2001).

De este análisis consideramos que la regla de los signos, generó dificultades a los matemáticos a lo largo de la historia, algo similar sucede en las aulas de clase pues los alumnos no logran darle significado a esa regla, y tienen que recurrir a la memorización.

Dimensión didáctica

Llevamos a cabo un análisis acerca del tratamiento que se le da a la regla de los signos en los libros de texto. Se revisaron 7 libros que son lo que se contemplan como libros de texto o de apoyo en la enseñanza básica, los años de edición se encuentran entre 1993 y 2010. Consideramos como ejes del análisis los siguientes aspectos:

- *Temas antecedentes, es decir temas que aporten elementos para el estudio del tema en cuestión.*
- *Temas consecuentes, relacionado con temas donde se vea una aplicación de la regla de los signos.*
- *Estructura seguida para abordar el tema, es decir cuáles son las actividades para iniciar y concluir el tema.*
- *Enfoque de los ejemplos que presentan, es decir si son con enfoque algorítmico, demostrativo, o aplicativo.*
- *Institucionalización, es decir quién es el encargado del proceso de formalización del saber, el profesor o el alumno.*
- *Ejercicios o actividades para el alumno, consideramos los mismos aspectos de los ejemplos.*

Por ejemplo, en el libro de Martínez y Struck (2001), la estructura seguida para abordar el tema consiste en primera instancia en mostrar una gráfica de la cual es posible construir la “tabla de multiplicar de algún número positivo” (en particular el libro trabaja con la tabla de multiplicar del número 3) (Imagen 1).

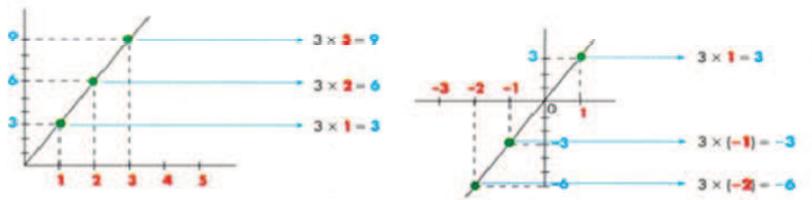


Imagen 1. Gráfica de la cual es posible construir la “tabla de multiplicar de algún número positivo”.

Con dicha referencia, posteriormente se pide construir la tabla de multiplicar de un número positivo y un número negativo, y a partir de ahí, se plantea la pregunta (retórica) acerca de la representación gráfica de dos números negativos. Seguidamente dan respuesta a dicha pregunta presentado el procedimiento a seguir para obtener la representación gráfica del producto de dos números negativos (Imagen 2).

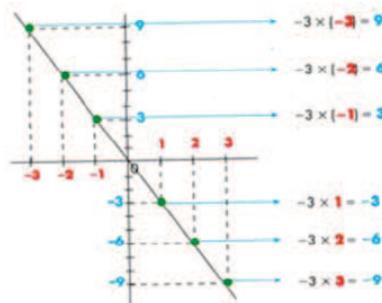


Imagen 2. Gráfica de la “tabla de multiplicar de un número negativo por algún otro número negativo”.

Observamos que este libro relaciona lo gráfico con lo aritmético, de tal forma que el alumno puede transitar entre estas dos representaciones en ambos sentidos. Al término de dicha actividad, se lleva a cabo la formalización de la regla de los signos, la cual se realiza de dos formas, primero en forma de enunciados y después en una tabla donde se sintetizan los enunciados.

Si se multiplica un número positivo por uno negativo, el resultado es negativo.

Si se multiplican dos números con signos iguales, el resultado tiene signo positivo.

\times	+	-
+	+	-
-	-	+

Una vez realizado el proceso de formalización, el tema de la regla de los signos finaliza con un bloque de ejercicios, los cuales pertenecen a un enfoque algorítmico, pues la tarea del alumno se reduce a la aplicación operatoria de la regla de los signos.

Consideramos que aunque algunas de las actividades presentan situaciones de interés, existe una ruptura entre el desarrollo y la institucionalización del saber, porque al final los autores se centran en proporcionar las reglas, en vez de provocar que sea el estudiante quien las conjeture.

Dimensión cognitiva

Con la intención de recabar información relacionada al conocimiento de los alumnos sobre la regla de los signos, aplicamos un instrumento conformado de tres secciones y dos categorías de reactivos. En las secciones 1 y 2, conformado por 12 reactivos, se solicitó al alumno que coloque el signo que resulta del producto de dos o más factores. La sección 3 constó de un reactivo en la cual el estudiante debía plantear un situación (problema) cuya solución involucre necesariamente alguna de las regla de los signos.

Se aplicó el instrumento a 23 estudiantes de tercer grado de secundaria de seis diferentes escuelas. La intención era averiguar los errores y dificultades más frecuentes que tienen los estudiantes al realizar el producto de números con signo y la relación de dichas reglas en situaciones de contexto. Se observó que los estudiantes (86%) aplican correctamente las reglas para productos con dos factores, pero cuando se involucran más factores tienden a errar, y tampoco pueden plantear problemas que involucren la regla de los signos, es decir no tienen un vínculo fuerte de la regla en situaciones que la involucren; las conexiones cognitivas son débiles.

Diseño de las actividades que conforman la propuesta didáctica

En el diseño de las actividades consideramos los tres elementos fundamentales del triángulo didáctico: estudiante, profesor y medio didáctico. El estudiante es el actor principal y tiene la tarea de experimentar, analizar, conjeturar, discutir y concluir acerca de las actividades de la propuesta. El medio didáctico es importante en nuestro diseño ya que deseamos que el conocimiento sea adquirido por el alumno. Finalmente, el profesor tiene como tarea, guiar al alumno (cuando éste lo requiera) durante el desarrollo de las actividades e institucionalizar el conocimiento.

Las actividades son desarrolladas en el software de geometría dinámica Cabri Geometry II Plus, a través de 8 escenas en las cuales pueden apreciarse los siguientes momentos.

- *Introducción.* En este momento se presenta tanto el contexto de la actividad (una historia ficticia a manera de videojuego con niveles de reto) y se proporcionan las instrucciones de la misma.
- *Desarrollo.* En este momento se aborda la problemática de la regla de los signos, por medio de dos actividades. En el relato de la historia, un caballero debe rescatar a una princesa quien ha sido secuestrada, para ello debe ir seleccionando caminos que lo conducirán hasta donde se encuentra la princesa. La selección de los caminos se realiza por medio de un movimiento horizontal y uno vertical sin importar el orden. Así cuando el caballero selecciona caminos adecuados (del mismo color) se sombrean áreas de color amarillo, haciendo alusión a la regla (menos) (menos) = más o (más) (más) = más y cuando selecciona caminos inadecuados (de diferente color) se sombrean áreas de color naranja, implícitamente relacionado a la regla de los signos (menos) (más) = menos (ver Imagen 3).

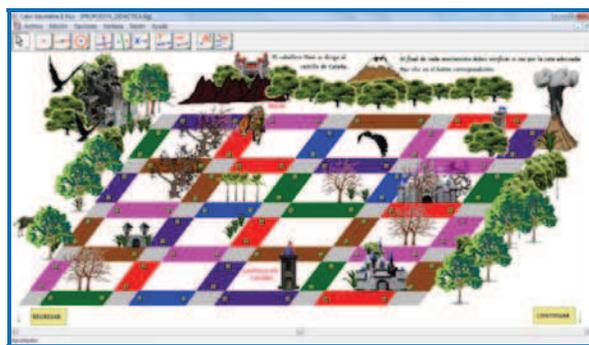


Imagen 3. Escena 2 que forma parte de la propuesta didáctica.

- *Cierre.* Este momento se divide en dos secciones, la primera contiene una actividad que tiene la intención de verificar si el alumno conjetura las reglas de los signos y la otra contiene el final de la historia y las instrucciones para guardar su archivo.

Después de terminar con las actividades, el alumno continúa con una hoja de trabajo, donde se le cuestiona sobre las características de los movimientos del caballero de tal forma que a través del tránsito de las etapas del álgebra, etapa retórica, sincopada y simbólica, obtenga la noción de la regla de los signos.

Parte 2. Han realizado algunos movimientos para rescatar a la princesa, los cuales los representó simbólicamente, coloca el símbolo (+) si el área correspondiente a esos caminos proviene de un movimiento adecuado y coloca el símbolo (-), si el área correspondiente a esos caminos proviene de un movimiento inadecuado.

$$\begin{array}{ll} (\%)(\#) = & (-)(-) = \\ (+)(-) = & (\&)(\&) = \\ (>)(<) = & (+)(+) = \end{array}$$

Imagen 4. Instrucciones que llevan a obtener las reglas de los signos.

Consideraciones y reflexiones

El diseño de la propuesta contempla los análisis preliminares, en la cual observamos que se alcanza los objetivos deseados de la misma, sin embargo encontramos algunos inconvenientes que podemos mejorar, tal es el caso de la ruta de los caminos, los colores utilizados. Con nuestra actividad alcanzamos a darle significado a la regla de los signos, además que dicha regla se convierte en aprendizaje para los alumnos, pues los alumnos participaron en el proceso de construcción del mismo.

Referencias bibliográficas

- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.), XV Jornadas de ASEPUMA y III Encuentro Internacional (pp. 1-12), Colombia.
- Artigue, M. (1998). Ingeniería didáctica. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Colombia. Una empresa docente.
- Douady, R. (1996). Ingeniería Didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collège-seconde. En Barbin, E., Douady, R. (Eds). *Enseñanza de las*

matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas. Topiques éditions. (pp. 241-256) Francia: Publicación del I.R.E.M.

Gómez, P. (2001). La justificación de la regla de los signos en los libros de texto: ¿Por qué menos por menos es más? En P. Gómez y L. Rico (Eds), En *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 257-276), Granada: Editorial Universidad de Granada.

Martínez, M., Struck, F. (2001). *Matemáticas 2*. México: Santillana.

Nieto N., Viramontes J. y López F. (2009). ¿Qué es matemática educativa? *CULCyT*, 6(35), 16-21.