Errores y Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas.

Luis Rico

1. Presentación

1.1 Paradojas

La presencia permanente de errores en la adquisición y consolidación del conocimiento humano es una cuestión compleja y delicada.

El error es conocimiento deficiente e incompleto. El error es una posibilidad, y una realidad, permanente en el conocimiento científico.

La ciencia es conocimiento verdadero. El desarrollo del conocimiento científico está plagado de errores.

Objetivo del aprendizaje es la adquisición de conocimiento verdadero. Los procesos de aprendizaje incluyen errores sistemáticos.

El error es un objeto de estudio para la educación matemática.

2. Fundamentos Epistemológicos

La fiabilidad del conocimiento humano, es decir, la capacidad de considerar como verdaderos conceptos y procedimientos que están deficientemente desarrollados, que incluyen ideas contradictorias o interpretaciones y justificaciones falsas, ha sido una preocupación constante en filósofos y pensadores que se han ocupado de estudiar la capacidad del hombre por conocer y comprender. El error es una posibilidad permanente en la adquisición y consolidación del conocimiento y puede llegar a formar parte del conocimiento científico que emplean las personas o los colectivos. Esta posibilidad no es una mera hipótesis, basta con observar lo que ha ocurrido a lo largo de la historia de diversas disciplinas en las que se han aceptado como conocimiento válido multitud de conceptos que, hoy día, sabemos que son erróneos.

La preocupación por el conocimiento erróneo, por las condiciones que lo hacen posible y por las funciones que puede desempeñar en el dominio y avance de la ciencia, ha ocupado parte importante de las reflexiones de filósofos de la ciencia y epistemólogos, entre los que queremos destacar a Popper; Bachelard; Russell y Lakatos. En lo que sigue vamos a seleccionar algunas ideas de los autores mencionados, que sirven de fundamentación a este trabajo.

2.1. Popper

En *“Conjeturas y refutaciones”*, Popper pone a examen la siguiente cuestión: ¿cuál es la fuente última del conocimiento?; a partir de ella deriva el papel destacable que tienen los errores en la adquisición del conocimiento científico.

Para ello desarrolla la siguiente línea argumental:

1) Considera que hay, básicamente, dos respuestas clásicas a la cuestión anteriormente planteada, la proporcionada por el empirísmo, que señala la observación como fundamento último del conocimiento; la proporcionada por el racionalismo o intelectualismo clásico, que considera como fundamento la intuición intelectual de ideas claras y distintas.

Destaca en estas dos posiciones el optimismo epistemológico sobre las posibilidades humanas de conocimiento: todo hombre lleva en sí mismo las fuentes del conocimiento, bien en su facultad de percepción sensorial o en su facultad de intuición intelectual. El hombre es capaz de conocer; por lo tanto, puede ser libre.

Contrapone estas posiciones con la creencia según la cual, en ausencia de una verdad objetiva y discernible, hay que optar entre aceptar la autoridad de la tradición o el caos, posición a la que llama tradicionalista. El racionalismo epistemológico ha defendido el derecho de la razón y de la ciencia a criticar y rechazar toda autoridad cuando se encuentra basada en la sin razón, el prejuicio o el accidente. El rechazo del autoritarismo lleva a someter las propias teorías y conocimientos a un examen crítico minucioso.

2) Las posiciones clásicas se sustentan en lo que Popper denomina *"teoría de la verdad manifiesta"*. La verdad es siempre reconocible como verdad; si no es así, sólo es necesario desvelar esa verdad o descubrirla. Esta doctrina de que la verdad es manifiesta plantea la necesidad de explicar la falsedad. El conocimiento no necesita ser explicado, pero ¿cómo podemos caer en el error si la verdad es manifiesta?.

Una respuesta posible considera que la ignorancia es obra de poderes que conspiran para mantenernos en ella, que fomentan nuestros prejuicios para que no podamos ver la verdad manifiesta.

Popper sostiene que esta explicación conspiracional es, básicamente, un mito. La realidad es que la verdad es difícil de alcanzar y, una vez encontrada, se puede volver a perder fácilmente. Las creencias erróneas pueden tener un poder asombroso de supervivencia, en franca oposición a la experiencia y sin ayuda de ninguna conspiración.

La teoría de la verdad manifiesta puede conducir también al autoritarismo. Esto puede deberse a que la verdad, simplemente, no es manifiesta y por tanto necesita de modo constante de re-interpretación y re-afirmación, es decir, de una autoridad que proclame y establezca cual es la verdad.

3) Aunque las epistemologías de Bacon y Descartes eran claramente antiautoritarias tienen una fundamentación de carácter religioso y no fueron capaces de renunciar a pensar en términos de autoridad; uno a la autoridad de los sentidos, el otro a la autoridad del intelecto.

La disyuntiva de tener que admitir que nuestro conocimiento es humano sin tener que aceptar que es mero capricho o arbitrariedad intelectual, no queda resuelta ni con el empirísmo ni con el racionalismo.

Sócrates adelantó una solución con la doctrina de la falibilidad: todos nosotros podemos errar, y con frecuencia erramos individual y colectivamente; pero la idea del error y la falibilidad implica que podemos buscar la verdad, la verdad objetiva, aún cuando por lo general nos equivoquemos por amplio margen. También implica que, si respetamos la verdad, debemos aspirar a ella examinando persistentemente nuestros errores: mediante la infatigable crítica racional y mediante la autocrítica.

4) Popper propone reemplazar la pregunta acerca de las fuentes de nuestro conocimiento como pregunta fundamental, por la pregunta totalmente diferente:

"¿Cómo podemos detectar y eliminar el error?".

Una respuesta adecuada a la cuestión anterior es la siguiente: criticando las teorías y presunciones de otros y - si somos capaces de hacerlo- criticando nuestras propias teorías y presunciones. A esta posición la denomina **racionalismo crítico**.

5) Popper resume en nueve tesis los resultados epistemológicos de su reflexión:

"1. No hay fuentes últimas del conocimiento. Debe aceptarse toda fuente y toda sugerencia y, en primer lugar, deben ser sometidas a un examen crítico.

2. La cuestión epistemológica adecuada no es la relativa a las fuentes; más bien preguntaremos si la afirmación hecha es verdadera, si concuerda con los hechos. Esto se determina examinando o sometiendo a prueba la afirmación misma, de modo directo, o bien sometiendo a prueba sus consecuencias.

3. En conexión con el examen y revisión críticas tienen importancia todo tipo de argumentos.

4. La fuente más importante de nuestro conocimiento es la tradición. La mayor parte de las cosas que sabemos las hemos aprendido por el ejemplo o por que las hemos leido u oido previamente.

5. Toda parte de nuestro conocimiento por tradición es suceptible de examen crítico y puede ser abandonado.

6. El conocimiento no puede partir de la nada. El avance del conocimiento consiste, principalmente, en la modificación del conocimiento anterior.

7. No hay ningún criterio que permita reconocer la verdad. Pero sí poseemos criterios que, con suerte, permiten conocer el error y la falsedad. La claridad y distinción no son criterios de verdad, pero la oscuridad y la confusión indican el error. Análogamente, la coherencia no basta para establecer la verdad pero la incoherencia y la inconsistencia permiten establecer la falsedad.

8. La función más importante de la observación y el razonamiento, y aún de la intuición y la imaginación, consiste en contribuir al examen crítico de las conjeturas con la que se sondea lo desconocido.

9. La solución de un problema plantea nuevos problemas sin resolver, y ello es tanto más así cuanto más profundo era el problema original y más audaz su solución".

Aunque la reflexión de Popper se refiere al conocimiento en general, y de un modo más explícito al conocimiento en las ciencias experimentales, lo que haría necesarias algunas matizaciones al referirnos a las matemáticas, hay algunas conclusiones importantes que queremos destacar. En primer lugar, señalar que **no hay fuentes últimas del conocimiento**, admitir que todo conocimiento es humano, que está mezclado con nuestros errores y nuestros prejuicios.

Esto lleva a **admitir el error como parte constituyente de nuestra adquisición del conocimiento**. Las organizaciones insuficientes o claramente deficientes, las hipótesis tentativas, las conceptualizaciones incompletas son parte legítima de nuestro acceso al conocimiento, forman parte de nuestro modo de conocer. Aún así, no es válida cualquier conclusión, ya que hay una verdad objetiva a la que hemos de tratar de ajustarnos.

Idea complementaria de la presencia del error es la **necesidad de un ejercicio constante de la crítica**, sometiendo a prueba nuestros conocimientos y aproximaciones a la verdad. La búsqueda crítica del error para modificar nuestros conocimientos deficientes es un corolario inevitable de las consideraciones anteriores.

2.2. Bachelard

En otro orden de ideas, **Bachelard** planteó la noción de obstáculo epistemológico como explicación para esa aparición inevitable de errores que, hemos visto, constituye parte importante de nuestro avance en el conocimiento. Así, al comienzo de su obra "La formación del espíritu científico" glosa las siguientes ideas:

"Cuando se investigan las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos; en el acto mismo de conocer, intimamente, es donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones; es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí, donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos.

El conocimiento de lo real es una luz que siempre proyecta alguna sombra; jamás es inmediata y plena. Al volver sobre un pasado de errores se encuentra la verdad. En efecto, ***se conoce en contra de un conocimiento anterior****, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que, en el espiritu mismo, obstaculiza.*

La noción de obstáculo espistemológico puede ser estudiada en el desarrollo histórico del pensamiento científico y en la práctica de la educación.

El epistemólogo tendrá que esforzarse en captar los conceptos científicos en síntesis psicológicas efectivas; vale decir, en síntesis psicológicas progresivas, estableciendo respecto de cada noción una escala de conceptos, mostrando cómo un concepto produce otro, cómo se vincula con otro.

En educación, la noción de obstáculo epistemológico es igualmente desconocida; son poco numerosos los que han sondeado la psicología del error, de la ignorancia y de la irreflexión."

En otra obra, *"La filosofía del no"*, al tratar de diferenciar las funciones del filósofo de la ciencia de las del científico profesional, desarrolla algunas de las ideas anteriores:

"Para el científico el conocimiento surge de la ignorancia, como la luz surge de las tinieblas. El científico no ve que la ignorancia es una trama de errores positivos, tenaces, solidarios. No advierte que las tinieblas espirituales poseen una estructura y que, en esas condiciones, toda experiencia objetiva correcta debe siempre determinar la corrección de un error subjetivo. Pero los errores no se destruyen uno por uno con facilidad. Están coordinados. El espíritu científico solo puede constituirse destruyendo el espíritu no científico. A menudo, el hombre de ciencia se confia a una pedagogía fraccionada, mientras que el espíritu científico debiera tender a una reforma subjetiva total. Todo progreso real en el pensamiento científico necesita una conversión."

Con esta noción de obstáculo espistemológico, retomada posteriormente por Brousseau para la Didáctica de la Matemática, Bachelard realiza una aproximación sistemática a los procesos de creación y constitución del conocimiento dentro de la comunidad científica y, al mismo tiempo, a los procesos de transmisión y asimilación del conocimiento en el sistema educativo. La noción de obstáculo epistemológico, y las sucesivas tipificaciones y caracterizaciones de la misma, se ha utilizado como clave para el estudio, sistematización, análisis y explicación de los errores que se presentan en el pensamiento científico.

2.3. Constructivismo

Las ideas anteriores pueden completarse con los planteamientos constructivistas. Recordamos que hay un acuerdo general entre los constructivistas sobre los siguientes puntos:

1. Todo conocimiento es construido. El conocimiento matemático es construido, al menos en parte, a través de un proceso de abstracción reflexiva.
2. Existen estructuras cognitivas que se activan en los procesos de construcción.
3. Las estructuras cognitivas están en desarrollo continuo. La actividad con propósito induce la transformación de las estructuras existentes.
4. Reconocer el constructivismo como una posición cognitiva conduce a adoptar el constructivismo metodológico.

Si, por otra parte, los errores son elementos usuales en nuestro camino hacia el conocimiento verdadero, hemos de concluir que en el proceso usual de construcción de los conocimientos matemáticos van a aparecer de forma sistemática errores y por tanto el proceso mencionado de construcción deberá incluir su diagnóstico, detección, correción y superación mediante actividades que promuevan el ejercicio de la crítica sobre las propias producciones.

2.4. Lakatos

En un plano diferente, este planteamiento es básicamente coincidente con el estudio realizado por Lakatos en *"Pruebas y refutaciones"*, relativo a la lógica del descubrimiento y la elaboración de conceptos en Matemáticas. Mediante la dialéctica de plantear conjeturas que aproximen una respuesta a un problema o cuestión abierta; crítica de las conjeturas mediante contraejemplos globales y locales; y superación mediante un aumento del contenido y una limitación en la extensión de los conceptos, Lakatos ofrece una metodología basada en los principios de la falsabilidad para la construcción del conocimiento matemático.

Uno de los denominadores comunes entre Popper y Lakatos es la idea de que hay que considerar como posible la retransmisión de la falsedad en un sistema deductivo, en oposición a la idea clásica de la retransmisión de la verdad como única opción. Se trata de un cuestón clave, que tuvo importancia en la segunda crisis de fundamentos (Gödel, 1930). En esencia, se cambia el estatuto positivo (epistemología positivista), que toma la verdad como patrón, por el vaciado en negativo de la verdad, la falsedad. Así, la verdad objetiva pasa a ser una verdad relativa a unos conocimientos, unos esquemas de interpretación y unas reglas metodológicas que permiten acceder a esos conocimientos.

2.5. Conclusiones

De toda esta reflexión concluimos haciendo referencia explícita a algunas consecuencias, importantes para nosotros, relativas a los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

En primer lugar, señalar que **los errores pueden contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje**; en segundo término, indicar que **los errores no aparecen por azar** sino que surgen en un marco conceptual consistente, basado sobre conocimientos adquiridos priviamente; en tercer lugar, argumentar la necesidad de que cualquier teoría de instrucción **modifique la tendencia a condenar los errores culpabilizando a los estudiantes** de los mismos, reemplazándola por la **previsión de errores y su consideración en el proceso de aprendizaje**; y, finalmente, señalar que **todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores**, debidos a diferentes causas, algunos de los cuales se presentan inevitablemente.

Hay que admitir como consecuencia de las reflexiones anteriores que, a partir de sus errores, un jóven o un niño puede aprender distintas propiedades de un concepto de las que no era previamente consciente. Al cometer un error, el alumno expresa el caracter incompleto de su conocimiento y permite a los compañeros o al profesor ayudarle a completar el conocimiento adicional o llevarlo a comprender por sí mismo aquello que estaba mal.

3. Antecedentes en el estudio de errores en el aprendizaje de las matemáticas escolares

3.1. El error en el aprendizaje de las matemáticas

Una característica diferenciadora de las matemáticas escolares consiste en el carácter bien definido de las cuestiones y problemas que se plantean a los niños y jóvenes, independientemente del tópico tratado o del nivel de los escolares. Incluso cuando se incorporan tópicos relativos a estimación de medidas, cálculo aproximado o nociones de probabilidad, todas las cuestiones planteadas tienen una respuesta, o un rango de respuestas, adecuada (s); cualquier otra respuesta se considera inadecuada o incorrecta.

Por ello, siempre resulta posible clasificar las contestaciones de los alumnos a cuestiones y problemas matemáticos en correctas o incorrectas; también hay una tercera opción que consiste en dejar sin respuesta la cuestión planteada. El grado de complejidad de una cuestión determinada nos puede permitir, en ocasiones, subdividirla en apartados o cuestiones parciales, cada una de las cuales a su vez puede ser correcta o incorrecta.

Cuando un alumno proporciona una respuesta incorrecta a una cuestión matemática que se le plantea se puede decir que su respuesta es errónea, y la solución proporcionada es **un error** en relación con la cuestión propuesta.

Los errores forman parte de las producciones de los alumnos durante su aprendizaje de las matemáticas. Los errores son datos objetivos que encontramos permanentemente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; constituyen un elemento estable de dichos procesos. Por otra parte, siendo un objetivo permanente de la enseñanza de las matemáticas en el Sistema Escolar lograr un correcto aprendizaje de las mismas por parte de todos los alumnos, es claro que las producciones o respuestas incorrectas a las cuestiones que se plantean se consideran como señales de serias deficiencias e incluso fracaso en el logro de dicho objetivo.

Por ello el estudio de los errores en el aprendizaje de las matemáticas ha sido una cuestión de permanente interés en Educación Matemática, que tiene una larga historia y se ha caracterizado por aproximaciones e intereses muy diferentes. En cada época el análisis de errores en educación matemática se ha visto orientado por las corrientes predominantes en pedagogía y psicología; también ha estado condicionado por los objetivos y formas de organización del currículo de matemáticas en los correspondientes sistemas educativos.

En un trabajo ya clásico, Radatz[1] señalaba tres rasgos característicos de los estudios aparecidos hasta la fecha:

1. La Aritmética, el conocimiento numérico, constituye el área de contenidos dominante en la mayor parte de los estudios sobre errores en matemáticas escolares.

2. En USA ha habido un desarrollo teórico continuo desde comienzos de siglo para analizar los errores en educación matemática; en los paises europeos el desarrollo ha sido más esporádico y carece de continuidad hasta fechas muy recientes.

3. Hay una pluralidad de aproximaciones teóricas y de intentos de explicación acerca de las causas de los errores de los estudiantes en el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

Siguiendo a este mismo autor, destacamos algunas de las contribuciones realizadas al análisis de errores desde comienzos de este siglo hasta finales de los 70, agrupando los autores por paises.

4. La investigación sobre errores

4.1. Planteamiento y cuestiones generales

La reflexión actual sobre los errores en los estudios sobre aprendizaje de las matemáticas los considera como parte normal en los procesos de aprendizaje, Brousseau, Davis y Werner[2] expresan claramente esta idea:

"Observaciones hechas en el aula ponen de manifiesto que:

1. Los estudiantes piensan frecuentemente acerca de sus tareas matemáticas de un modo muy original, bastante diferente de lo que esperan sus profesores.

2. Cuando esta vía de pensamiento original se muestra inesperadamente útil, admiramos su poder y decimos que el estudiante ha tenido una comprensión inusual; pero cuando, por el contrario, este modo personal de pensamiento omite algo que es esencial, decimos usualmente que el estudiante ha cometido un error. De hecho, ambos casos tienen mucho en común, en particular el dato de que las ideas en la mente del alumno no son las que el profesor espera."

Dentro de la pedagogía actual una dimensión importante consiste en considerar los procesos de enseñanza/aprendizaje como procesos de comunicación, pero esta comunicación debe fluir en

[1] Radatz H. (1980). Students' Errors in the Mathematical Learning Process: a Survey. For the Learning of Mathematics. Vol. 1 (1), págg. 1-20.

[2] Brousseau G., Davis R., Werner T. (1986). Observing students at work, en Christiansen B., Howson G. & Otte M. (Edt.): Perspectives on Mathematics Education. Dordrecht: Reidel Publishing comp.

ambas direcciones: desde los estudiantes hacia el profesor igual que desde el profesor hacia los estudiantes.

Tarea principal del trabajo del profesor consiste en dirigir y guiar el desarrollo de ideas en las mentes de sus estudiantes, por ello es importante para el profesor conocer qué es lo que sus estudiantes se encuentran pensando, y no limitarse a hacer suposiciones sobre esas ideas.

Al comenzar una observación cuidadosa del trabajo de los alumnos, los profesores se encuentran con una serie de sorpresas que, de nuevo, Brousseau, Davis y Werner describen del siguiente modo:

"1. Se hace evidente rápidamente que los errores de los alumnos son, con frecuencia, el resultado de un procedimiento sistemático que tiene alguna imperfección; pero el procedimiento imperfecto lo utiliza el alumno de modo consistente y con confianza. En estos casos, los errores muestran un patrón consistente.

2. Los alumnos tienen con frecuencia grandes concepciones inadecuadas ("misconceptions") acerca de aspectos fundamentales de las matemáticas.

3. Cuando es posible observar a los alumnos y también intercambiar información con sus profesores usuales, se ve que los alumnos emplean con frecuencia procedimientos imperfectos y tienen concepciones inadecuadas que no son reconocidas por sus profesores.

4. También se hace evidente que los estudiantes son con frecuencia más inteligentes para inventar sus propios métodos originales de lo que se espera de ellos. Incluso cuando un método ha sido presentado por el profesor, un alumno puede desarrollar su propio método original, llegando hasta ignorar el método del profesor".

Esta serie de fenómenos se vienen observando desde hace muchos años, como hemos puesto de manifiesto en el apartado anterior, pero no es hasta fechas recientes cuando se tiene en cuenta la complejidad en la que se encuadran. Al estudiar los errores, de acuerdo con las dificultades encontradas por los alumnos, se debiera reconocer que los errores también son función de otras variables del proceso educativo: el profesor, el currículo, el entorno social en el que se enmarca la escuela, el medio cultural y sus relaciones, así como las posibles interacciones entre estas variables. Los errores en el aprendizaje de las matemáticas son, en nuestra consideración, el resultado de procesos muy complejos. Una delimitación clara de las causas posibles de un error dado o una explicación de cada error con la posibilidad de actuar sobre él, es con frecuencia bastante difícil debido a que hay una fuerte interacción entre las variables del proceso educativo y, a menudo, es muy difícil aislar relaciones.

Sin embargo, desde fechas recientes, se ha producido un avance considerable en la investigación sobre educación matemática y se aprecia un interés creciente por lograr un esquema claro de interpretación y previsión de errores y concepciones inadecuadas.

Ya en 1979 Radatz[3] señaló varias razones por las que el estudio de errores y la necesidad de un marco teórico de explicación, eran importantes:

[3] Radatz H. (1979). Error Analysis in Mathematics Education. Journal for Research in Mathematics

"1. El desacuerdo y escepticismo tanto respecto de los tets con relación a norma como con los tests con relación a criterio para medir los logros en matemáticas han aumentado la atención por los aspectos diagnósticos de la enseñanza.

2. Las reformas sucesivas del currículo de matemáticas probablemente no han conducido a nuevos errores y dificultades, pero con seguridad han surgido nuevos errores, debido a los contenidos específicos.

3. La individualización y diferenciación de la instrucción matemática requirió, como posteriormente la socialización y las relaciones de comunicación en el aula, de una gran destreza en el diagnóstico de dificultades específicas; los profesores necesitan de modelos de actuación para diagnosticar la enseñanza en los que los aspectos del contenido matemático estén integrados con ayuda de la psicología educativa y la psicología social.

4. La crítica sobre los paradigmas tradicionales de la investigación educativa han estimulado otros métodos de investigación en educación matemática: investigación clínica, estudio de casos y fenomenología didáctica".

En el momento actual, la mayor parte de los investigadores y especialistas[4] coinciden en considerar como características generales de los errores cometidos por los alumnos los siguientes:

1. Los errores son sorprendentes. Con frecuencia los errores cometidos por los alumnos surgen de manera sorprendente, ya que por lo general se han mantenido ocultos para el profesor durante algún tiempo.

2. Los errores son a menudo extremadamente persistentes, debido a que pueden reflejar el conocimiento de los alumnos sobre un concepto o un uso particular de reglas nemotécnicas. Son resistentes a cambiar por sí mismos ya que la corrección de errores puede necesitar de una reorganización fundamental del conocimiento de los alumnos.

3. Los errores pueden ser o bien sistemáticos o por azar. Los primeros son muchos más frecuentes y, por lo general, más efectivos para revelar los procesos mentales subyacentes; estos errores se toman como síntomas que señalan hacia un método o comprensión equivocada subyacente, que el estudiante considera y utiliza como correcto. Los errores por azar reflejan falta de cuidado y lapsus ocasionales, y tienen relativamente poca importancia.

4. Los errores ignoran el significado; de este modo, respuestas que son obviamente incorrectas, no se ponen en cuestión. Los alumnos que cometen un error no consideran el significado de los símbolos y conceptos con los que trabajan.

Es claro que no pueden ignorarse las capacidades de los estudiantes; tampoco pueden olvidarse los errores que comenten. Brousseau, Davis y Werner[5] señalan cuatro vías mediante las que el error puede presentarse:

Education. Vol. 9 pági. 163-172.

[4] Mulhern G. (1989). Between the ears: Making inferences about internal processes, en Greer B. & Mulhern G. (edtl): New directions in mathematics Education. Londres: Routledge.

"1. Los errores son a menudo el resultado de grandes concepciones inadecuadas acerca de aspectos fundamentales de las matemáticas.

2. Frecuentemente los errores se presentan como resultado de la aplicación correcta y crédula de un procedimiento imperfecto sistematizado, que se puede identificar con facilidad por el profesor.

3. También los errores pueden presentarse cuando el alumno utiliza procedimientos imperfectos y posee concepciones inadecuadas que no son reconocidas por el profesor.

4. Los alumnos con frecuencia inventan sus propios métodos, no formales pero altamente originales, para la realización de las tareas que se les proponen y la resolución de problemas".

Estudiar y analizar los errores cometidos por los estudiantes ha emergido recientemente como una gran línea de estudio e investigación en Educación Matemática, con implicaciones considerables en gran parte de los campos de estudio en nuestra área.

4.2. Principales líneas de investigación

Cuatro son los polos en torno a los cuales se articulan los estudios e investigaciones recientes relativos a errores en el aprendizaje de las matemáticas:

Primero: Estudios relativos al analisis de errores, causas que los producen o elementos que los explican, y taxonomías y clasificaciones de errores detectados. Estos trabajos proceden o conectan con alguna teoría psicológica o psicopedagógica que proporciona un marco explicativo y a la que el análisis de errores ofrece una metodología adecuada para aumentar su contenido empírico. También incluimos aquí las aproximaciones teóricas hechas desde un planteamiento epistemológico o estrictamente matemático, que tratan de establecer causas estructurales para los errores debidas a la propia naturaleza del conocimiento matemático, con exclusividad sobre cualquier otro argumento; los trabajos sobre obstáculos son un ejemplo potente de esta opción.

Segundo: Estudios dedicados al tratamiento curricular de los errores del aprendizaje en matemáticas. Se incluyen aquí los trabajos dedicados a la organización didáctica de la enseñanza de las matemáticas que contempla la consideración de los errores como un dato destacable. Una línea de trabajo es la denominada enseñanza diagnóstica o por diagnóstico, que trata de prever los errores, detectarlos y proponer los medios para su corrección. También incluimos en estos estudios las propuestas realizadas por otros autores que contemplan los errores como plataformas para incentivar el estudio e investigación de los contenidos matemáticos. Igualmente quedan comprendidos en este apartado los estudios sobre evaluación y el papel que desempeñan los errores en las valoraciones que se deben realizar sobre las producciones de los alumnos.

Tercero: Se consideran aquí los estudios dedicados a determinar qué conviene que aprendan los profesores en formación en relación con los errores que cometen los alumnos. Se trata de estudios relativos a la formación del profesorado y al papel que la observación, análisis, interpretación y tratamiento de los errores de los alumnos tienen en este proceso de formación.

[5] Obra citada.

Aunque con un carácter más restringido que los apartados anteriores se trata de un campo de trabajo delimitado que ha tenido cierto desarrollo recientemente.

Cuarto: incluimos en este apartado aquellos trabajos de carácter técnico que implementan y sostienen una determinada clase de análisis sobre errores. El carácter dicotómico de la valoración correcto/incorrecto para las producciones de los alumnos han permitido una utilización considerable de procedimientos estadísticos; gran parte de los trabajos de orientación psicométrica van dirigidos al estudio de errores en el aprendizaje. Los programas de ordenador elaborados para sustentar la interpretación de los errores como bugs y el desarrollo posterior que se ha hecho de los mismos, aunque tienen una fundamentación teórica clara en el procesamiento humano de la información, tienen igualmente un desarrollo técnico propio por lo que los consideramos en este apartado.

Finalmente, incluimos en este apartado técnicas de análisis puestas a punto por algunos equipos investigadores para contrastar hipótesis alternativas que justifican el origen o causa de un determinado error.

Aunque estas cuatro categorías no son excluyentes, las vamos a utilizar para organizar la presentación y realizar una breve descripción de los trabajos e investigaciones relativos a errores del aprendizaje en matemáticas más significativos para nosotros en estos últimos años.

4. 3 Análisis, causas y clasificación de errores

Característica diferenciadora de la aproximación cognitiva al estudio del aprendizaje con respecto a los estudios conductistas es la necesaria postulación de procesos mentales en la realización de tareas. Sin embargo, los procesos mentales no son visibles; por ello, los investigadores deben recurrir a una variedad de métodos indirectos de observación que permitan hacer inferencias sobre los procesos mentales considerados.

El surgimiento de la teoría del procesamiento de la información ha resultado valioso para el estudio del pensamiento y, en particular, el trabajo de un número creciente de investigadores ha puesto de manifiesto que el pensamiento matemático es especialmente indicado para representarlo mediante modelos de procesamiento de la información.

El método de procesamiento de la información está basado en la suposición de que los problemas matemáticos pueden descomponerse en varios componentes de procesamiento. Sin embargo, estos subcomponentes son, por su naturaleza, internos y, por tanto, hay que utilizar métodos indirectos de observación. Entre estos métodos indirectos se encuentra el análisis de los errores de los sujetos en sus producciones matemáticas.

Algunos de los resultados e interpretaciones más valiosos mediante el procesamiento humano de la información se han encontrado estudiando los errores; la utilidad de esta aproximación se incrementa con el hecho de que hay patrones consistentes en los errores. La consistencia puede considerarse a dos niveles, por un lado, a nivel individual, ya que los sujetos muestran una regularidad considerable en su modo de realizar tareas y resolver problemas matemáticos similares, con poca variabilidad en periodos cortos de tiempo. Por otro lado, también hay consistencias en los grupos humanos, de carácter colectivo; se trata de ciertos errores que personas diferentes cometen en ciertas etapas de su desarrollo educativo.

Mediante combinación de resultados empíricos con algunos supuestos acerca de estructuras mentales y ciertas leyes generales del procesamiento humano de la información, es posible predecir algunos patrones comunes de error.

Davis[6] elaboró una teoría de esquemas o constructos personales, que se presentan de forma similar en distintos individuos que comparten las mismas experiencias, y cuya combinación mediante los principios generales que regulan el procesamiento humano de la información le permiten tipificar e interpretar algunos de los errores más usuales de los escolares en el aprendizaje de las matemáticas. Los esquemas postulados por Davis tienen las siguientes características:

1.Deben considerarse como esquemas para asimilar información, es decir, para organizar los datos de entrada.

2. Cada estructura de representación puede identificarse por los errores que presenta, con lo que revela parte de su modo interno de trabajo.

3. Cada estructura de representación tiene un origen legítimo, en un aprendizaje inicialmente correcto.

4. Cada estructura de representación necesita un tipo de información inicial y no funcionará correctamente si no se le proporciona toda la información inicial.

5. Los esquemas son persistentes. Es precisamente esta propiedad la que los hace reconocibles como entidades internas de procesamiento de la información: que pueden ponerse en correspondencia con ciertos comportamientos externos observables. Esto se observa porque funcionan de modo idéntico en una variedad de situaciones; producen alteraciones en los datos de entrada cuando no parecen encajar con el esquema; cuando se pretende enseñar contra un esquema interiorizado el aprendizaje apenas se produce.

6. La creación y el modo de operación de los esquemas sigue ciertas reglas ordenadas. Una de estas reglas es la denominada de sobregeneralización inicial; un segunda expresa que no se discrimina cuando no es necesario; una tercera dice que el procesamiento tiende a producirse según el esquema asumido y cuando encuentra algún inconveniente se producen modificaciones o adaptaciones que permiten continuar.

7. La recuperación en memoria de un esquema puede realizarse mediante términos clave breves y explícitos.

8. Un alumno que realiza una tarea matemática con éxito encuentra gran parte de la información necesaria en los esquemas que utiliza, que no suelen estar presentes en los enunciados de los problemas o tareas propuestas.

Al postular la representación interna de información, las estructuras de su procesamiento y algunas características de los componentes estructurales propuestos, Davis plantea un mecanismo mediante el que analiza el pensamiento matemático humano y algunos de sus errores.

Algunos de los errores clásicos explicados por el modelo de Davis son:

1. Reversiones binarias. Ejps. $4 \times 4 = 8$; $2^3 = 6$.

---

[6] Davis R. (1984). Learning Mathematics: the Cognitive Science Approach to Mathematics Education. Australia: Crroom Helm.

2. Errores inducidos por el lenguaje o la notación. Ejp. $2x - x = 2$.

3. Errores por recuperación de un esquema previo. Entre los ejemplos que propone se encuentran los errores usuales de la suma y la resta, justificados por esquemas tales como el de adición con dos entradas, el simétrico de la sustración y la comparación de unidades en una relación de proporcionalidad.

4. Errores producidos por una representación inadecuada.

5. Reglas que producen reglas. Así, de la implicación: $(x-2)(x-3) = 0$,
$x=2$ o $x=3$, se pasa a : $(x-2)(x-3) = 2$, $x=4$ o $x=5$.

Radatz[7] realiza una clasificación de errores a partir del procesamiento de la información y establece cinco categorías generales.

1. Errores debidos a dificultades de lenguaje. Señala que el aprendizaje de los conceptos, símbolos y vocabulario matemáticos es para muchos alumnos un problema similar al aprendizaje de una lengua extrajera. Una falta de comprensión semántica de los textos matemáticos es fuente de errores; por ello, la resolución de problemas verbales está especialmente abierta a errores de traducción desde un esquema semántico en el lenguaje natural a un esquema más formal en el lenguaje matemático.

2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial. Aunque se trata de un campo de estudio cuyo desarrollo se está iniciando, es cierto que las diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales es una fuente de dificultades para muchos jóvenes y niños en la realización de tareas matemáticas.

Algunas representaciones icónicas de situaciones matemáticas pueden suponer dificultades en el procesamiento de la información; el análisis y síntesis perceptivos implican una demanda considerable para algunos alumnos, presentando dificultades y produciendo errores.

3. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. En este tipo de errores se incluyen todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Estas deficiencias incluyen la ignorancia de los algoritmos, conocimiento inadecuado de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.

4. Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.

La experiencia sobre problemas similares anteriores puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información. En estos casos los alumnos desarrollan operaciones cognitivas, que continúan empleando aún cuando las condiciones fundamentales de la tarea matemática en cuestión se hayan modificado. Persisten en la mente algunos aspectos del contenido o del proceso de solución, inhibiendo el procesamiento de nueva información. Dentro de esta clase de errores se encuentran los siguientes:

-Errores por perseveración, en los que predominan elementos singulares de una tarea o problema.

---

7 Obra citada.

-Errores de asociación, que incluyen interacciones incorrectas entre elementos singulares.

-Errores de interferencia, en los que operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros.

-Errores de asimilación, en los que una audición incorrecta produce faltas en la lectura o escritura.

-Errores de transferencia negativa a partir de tareas previas, en las que se puede identificar el efecto de una impresión errónea obtenida de un conjunto de ejercicios o problemas verbales.

5. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Este tipo de errores surgen con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes.

En una investigación más reciente sobre errores cometidos por alumnos de Secundaria en matemáticas, Movshovitz-Hadar, Zaslavksy e Inbar[8] hacen una clasificación empírica de los errores, sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos realizada por expertos.

De acuerdo con la metodología propuesta determinan seis categorías descriptivas para clasificar los errores encontrados. Estas categorías son:

1. Datos mal utilizados. Se incluyen aquí aquellos errores que se han producido por alguna discrepancia entre los datos que aparecen en una cuestión y el tratamiento que le ha dado el alumno. Dentro de este apartado se encuentran los casos en los que: se añaden datos extraños; se olvida algún dato necesario para la solución; se contesta a algo que no es necesario; se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado; se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta; o bien, se hace un lectura incorrecta del enunciado.

2. Interpretación incorrecta del lenguaje. Se incluyen en este caso los errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto. Esto ocurre al poner un problema en ecuaciones expresando una relación diferente de la enunciada; también cuando se designa un concepto matemático mediante un símbolo distinto del usual y operando con él según las reglas usuales; a veces se produce también una interpretación incorrecta de símbolos gráficos como términos matemáticos y viceversa.

3. Inferencias no válidas lógicamente. Esta categoría incluye aquellos errores que se producen por falacias de razonamiento, y no se deben al contenido específico. Encontramos dentro de esta categoría aquellos errores producidos por: derivar de un enunciado condicional su recíproco o su contrario; derivar de un enunciado condicional y de su consecuente, el antecedente; concluir un enunciado en el que el consecuente no se deriva del antecedente, necesariamente; utilizar incorrectamente los cuantificadores; o también, realizar saltos injustificados en una inferencia lógica.

4. Teoremas o definiciones deformados. Se incluyen aquí aquellos errores que se producen por deformación de un principio, regla o definición identificable. Tenemos en este caso la

[8] Movshovitz-Hardar N., Zaslavksy O. & Inbar S. (1987). An Empirical clasification model for errors in High School Mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, Vol 18, págg. 3-14

aplicación de un teorema sin las condiciones necesarias; aplicar la propiedad distributiva a una función no lineal; realizar una valoración o desarrollo inadecuado de una definición, teorema o fórmula reconocibles.

5. Falta de verificación en la solución. Se incluyen aquí los errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada; si el resolutor hubiese contrastado la solución con el enunciado el error habría podido evitarse.

6. Errores técnicos. Se incluyen en esta categoría los errores de cálculo, errores al tomar datos de una tabla, errores en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos básicos.

La categorización de estos autores está fundamentada más en el conocimiento matemático que en el procesamiento de la información. Cuando se intenta avanzar desde la descripción de los patrones de error y las técnicas falsas hasta llegar a un análisis de las causas de los errores en las cogniciones de los alumnos, parece claro que la interpretación en base al procesamiento de la información ofrece una base teórica más completa para la clasificación de errores.

Otra aproximación diferente es la realizada por algunos investigadores desde un punto de vista epistemológico, que pasamos a comentar brevemente. Las ideas generales que sustentan este planteamiento son como sigue:

"La reconstrucción y apropiación de conocimiento matemático exige una labor depurativa constante en la que se ponga en cuestión el conocimiento vulgar, empírico, parcial, falso en unos casos o superficial en otros, que tienen los individuos en cada momento educativo, para que se produzcan rupturas con los conceptos y representaciones necesariamente limitados, y que aparezcan en su lugar nuevas concepciones, teorías y procedimientos, como alternativas más amplias, profundas e integradoras.

Este punto de vista caracteriza el proceso de aprendizaje como resultado de modificaciones cualitativas del conocimiento en la dirección del conocimiento científico y por tanto de un pensamiento más evolucionado. A grandes rasgos, el conocimiento matemático se construye paulatinamente mediante actos sucesivos de abstracción, a partir de la realidad, para desembocar en un nivel en el que el trabajo se realiza con entes y relaciones matemáticas con poca o nula conexión con la realidad en la mayoría de los casos. Se trata de un proceso en cadena con sucesivas rupturas y ampliaciones, en el que aparecen dificultades inherentes al salto cualitativo que supone el paso de la realidad concreta cotidiana a la realidad matemática formal. En este proceso, el individuo debe ir abandonando y sustituyendo progresivamente ciertos tipos de conocimiento por otros más evolucionados, venciendo las resistencias naturales que suelen presentarse ante modificaciones. Los conocimientos antiguos que funcionan no son desechados completamente sino que quedan integrados y valorados dentro de la nueva y más completa visión que surge del aprendizaje. En esta dinámica, los errores que cometen los individuos de forma persistente *son manifestaciones de la presencia de un fenómeno más amplio, que algunos autores denominan inadaptación del conocimiento, provocada por obstáculo. El error dentro de esta interpretación es un hecho constatable que tiene su origen o es debido a la presencia de uno o varios obstáculos como fenómenos más generales y arraigados en el individuo".*[9]

Aunque se han hecho serios intentos por desarrollar un sistema de categorización de errores en base a una tipificación de obstáculos y del análisis derivado correspondiente, el hecho real es que, hasta el momento, no se han superado los niveles generales, meramente descriptivos, y no existe un desarrollo teórico sistemático que permita clasificar, interpretar y predecir los errores en términos de obstáculos, es decir, en función de argumentos fundamentalmente epistemológicos y con exclusión de categorías cognitivas.

4.4. Tratamiento curricular de los errores

Siguiendo a Bell[10] consideramos que la enseñanza diagnóstica surge a partir de los estudios actuales sobre comprensión de la matemática, que presenta dos rasgos principales.

En primer lugar, la enseñanza se basa en tareas críticas que exponen las ideas, correctas y equivocadas, de los alumnos. Proporcionan material para lecciones basadas en el conflicto cognitivo y la discusión. En segundo lugar, se esfuerza en basar la enseñanza directamente en tareas lo más cercanas posible a aquellas en las que se espera que los alumnos apliquen los principios que aprenden. Si se combinan estas dos ideas tenemos que, en su comienzo, hay que elegir una tarea realista que incorpore los conceptos erróneos y provocar así un conflicto cognitivo que desemboque en una discusión dirigida a resolver ese conflicto.

Los trabajos realizados o dirigidos por el Profesor Bell orientan su investigación a descubrir y poner de manifiesto un número de áreas susceptibles de errores y equivocaciones graves y ampliamente desconocidas. El comienzo se ha hecho observando los errores de los alumnos al realizar tareas prescritas, aunque luego ha sondeado más profundamente en los errores de concepción que los sostienen y gobiernan. Una vez que se ha puesto de manifiesto que muchos errores no son simples fallos de memoria, sino que tienen raices más profundas, se hace evidente que la enseñanza necesaria para remediarlos o evitar su aparición tiene que operar a un nivel profundo. El énfasis de la enseñanza se aparta de la adquisición de procedimientos algorítmicos y se dirige hacia el desarrollo de estructuras conceptuales correctas. Los estudios sobre estructuras multiplicativas y comprensión por los alumnos de las mismas, entran dentro de los ejemplos más conocidos de investigación sobre errores para producir un tratamiento curricular.

El material desarrollado se articula en torno a un modelo de lección diagnóstica a la que se incorporan algunos tipos de tareas. La lección diagnóstica típica utiliza uno o unos cuantos

---

9 González J. L. (1992). Pensamiento relativo. Análisis de errores en tareas de traducción-interacción entre sistemas de representación. Tesis Doctoral inédita.

10 Bell A. (1986). Diseño de enseñanza diagnóstica en matemáticas.

problemas críticos (casi siempre desarrollados originalmente como items de tests) para descubrir concepciones erróneas y así provocar discusiones conducentes a una resolución; a continuación siguen problemas similares que se dan con algún tipo de retroalimentación inmediato en cuanto a la corrección, para consolidar la conciencia recién adquirida.

Se han desarrollado varios tipos de tareas que proporcionan diversas maneras de descubrir conocimientos erróneos, provocar la reflexión o activar los conceptos pertinentes. Estas tareas son: empleo de diagramas, sustitución de números fáciles, juegos, invención de preguntas, calificación de deberes y tareas colectivas. El desarrollo alcanzado en la ejemplificación de estas tareas con el material elaborado y editado por Shell Center de la Universidad de Nottingham (U.K.), que ha alcanzado un alto grado de difusión y una ejemplaridad didáctica sobresalientes, nos eximen de entrar en más detalles sobre estos aspectos.

Con posterioridad a las investigaciones del Prof. Bell han sido muchos los especialistas que se han dedicado a estudiar, clarificar y tratar de eliminar los conceptos erróneos de los alumnos, abordando las dificultades de transferencia a aplicaciones realistas, incorporándolas desde el comienzo a la enseñanza.

Otra orientación curricular surgida en estos últimos años es la que vienen desarrollando Borassi[11] y otros autores sobre la utilización de los errores como plataformas para explorar nuevos conocimientos matemáticos, en vez de un uso exclusivamente diagnóstico y preventivo.

Sobre la base de algunos errores usuales que se presentan en el estudio de las fracciones tales como:

$3/4 + 6/7 = 9/11$; $2/3 + 5/7 = 7/10$

se plantean cuestiones como las siguientes:

¿Cuál es la regla alternativa que el estudiante está aplicando aquí?, ¿por qué está haciendo eso?, la regla de adición utilizada ¿puede tener significado en algunos casos? ¿bajo qué condiciones ocurre esto?

¿Hay un sistema matemático en el que opere esta nueva regla de adición? ¿qué propiedades tendría un tal sistema?

Escalonadamente, y mediante una serie de cuestiones con sentido, nos llega a mostrar que, aunque la operación $2/3 + 5/7 = 7/10$ puede considerarse como una equivocación, hay algunos contextos en los que esta regla puede resultar razonable. De este modo llegan a plantearse cuestiones más de fondo, como las siguientes:

¿Puede haber algo que sea cierto y falso a la vez en matemáticas?

¿Cómo se puede decidir si una regla es cierta o falsa en matemáticas?

¿Es siempre posible hacer esa determinación?

Llegando a un nivel de análisis como el que plantean estas otras cuestiones: ¿Cómo escoger reglas y definiciones para establecer un nuevo sistema en matemáticas?, ¿Cuál es el efecto de la

[11] Borassi R. (1987). Exploring Mathematics through the Analysis of Errors. For the Learning of Mathematics. Vol. 7, pågg. 2-9.

simbolización sobre el aprendizaje de las matemáticas?, ¿Cuál es el efecto de elegir diferentes simbolizaciones sobre el desarrollo de un tópico matemático?

Estas y otras reflexiones dan pie a plantear los errores como punto de partida para una nueva orientación de las clases de matemáticas, que superen el nivel simplemente diagnóstico. La línea argumental es como sigue.

La interpretación exclusiva de los errores como instrumentos de diagnóstico y corrección explota sólo parcialmente el potencial educativo del error discutido. En primer lugar, con tal suposición solamente profesores e investigadores podrían estar implicados en el proceso de analizar el error. Los propios estudiantes quedarían privados de la oportunidad de implicarse en la actividad de explicar y dotar de sentido a sus propios errores, una actividad que puede resultar altamente motivadora y provocadora. Además, la propia creatividad de los investigadores al analizar el error se puede ver constreñida por el enfoque limitado a buscar las causas del error del estudiante de forma que se pueda eliminar. Esto sucede porque consideran el error necesariamente como una desviación de un cuerpo de conocimiento establecido al que no deben conceder la consideración de un reto para los resultados estándar.

Pero a la vista del ejemplo anterior, incluso los errores matemáticos más simples pueden proponer tales retos, sin necesidad de un conocimiento matemático sofisticado, ni tampoco un alto nivel de capacidad matemática.

Hay al menos dos direcciones principales que pueden seguirse en el uso de los errores para motivar la reflexión e interrogarse acerca de la naturaleza de nociones matemáticas: Los errores pueden usarse para investigar la naturaleza de nociones matemáticas fundamentales tales como *“prueba”*, *“algoritmo”* o *“definición”*. Debido a que utilizamos continuamente algoritmos, pruebas y definiciones cuando estudiamos matemáticas podría suponerse que sabemos muy bien lo que son esas nociones y si estamos cometiendo errores al trabajar con ellas. Por el contrario, es muy difícil explicar qué es lo que caracteriza una prueba matemáticamente buena (o un algoritmo, o una definición) e incluso es más difícil llegar a ser consciente de sus funciones o sus límites. Puede ser mucho más sencillo señalar por qué una cierta prueba no parece correcta, intentar arreglarla y a partir de este proceso concreto intentar abstraer qué propiedades deseamos que tenga una prueba matemática.

Los errores pueden ayudarnos a investigar cuestiones abstractas relativas a la naturaleza de las matemáticas a las que es difícil acercarse por otra vía. De nuevo esto implica utilizar el contraste destacado por el error, al igual que de su contenido informativo, aunque con un enfoque distinto a un nivel superior de abstracción.

Utilizar los errores como motivación y medio para interrogar sobre la naturaleza de las matemáticas puede mejorar la comprensión de las matemáticas como disciplina por parte de los estudiantes. Comprender una materia implica mucho más que simplemente “aprender con comprensión” su contenido básico. También incluye comprender su filosofía, la metodología empleada, el alcance y las limitaciones de la disciplina; debe incluir el desarrollo de actitudes positivas hacia la disciplina. Este tipo de comprensión, por desgracia, no es muy común en especial en matemáticas, y tratar de mejorarlo debiera ser extremadamente importante tanto para los estudiantes como para los profesores de cada nivel y materia.

Para poder apreciar completamente el potencial educativo de los errores como plataformas para interrogar, en los dos niveles identificados, también es importante comprender la variedad de cuestiones y exploraciones que pueden motivarse por diferentes clases de errores matemáticos. De hecho, aunque la mayor parte de la gente parece identificar los errores con el uso o la comprensión deficientes de una regla, los errores matemáticos pueden presentar características bastante diferentes, al menos con respecto a:

* Grado de incorrección: además de resultados falsos, se pueden tener de hecho resultados parciales o aproximados, resultados correctos obtenidos mediante procedimientos ineficientes o inaceptables, resultados que se pueden tomar como correctos en un contexto determinado pero no en otro, problemas para los que no se ha llegado a una solución, etc.

* Contexto matemático: es decir, si estamos trabajando con problemas, algoritmos, teoremas, definiciones, modelos, etc.

El punto de vista elegido por estos autores puede resumirse diciendo que los errores pueden emplearse como instrumento de motivación y como punto de partida para exploraciones matemáticas creativas, que implican actividades valiosas de planteamiento y resolución de problemas. También los errores pueden proporcionar una comprensión más completa y profunda del contenido matemático y de la propia naturaleza de las matemáticas.

Esta línea de estudio e investigación sobre el uso de errores en el desarrollo curricular está sólo en sus comienzos y necesita aún de esfuerzo investigador para llegar a propuestas más sistemáticas y completas.

Para concluir este apartado realizaremos algunas reflexiones en torno a las conexiones entre el estudio de errores y la evaluación.

Son muchos los investigadores que han cuestionado estos últimos años la naturaleza estrictamente psicométrica de la evaluación escolar. Los aspectos cuantitativos predominantes en los tests y otros métodos similares para medir el rendimiento no proporcionan criterios suficientes para procedimientos instructivos eficientes.[12]

En los últimos años venimos asistiendo al desarrollo de nuevos modelos de evaluación que requieren de nuevos procedimientos de valoración; pero tan importante o más que la valoración que reciben los alumnos, está el hecho de que esas valoraciones sirvan para reorientar su comprensión ayudándoles en la superación de sus concepciones deficientes y en la supresión de los errores. La evaluación no debe reducirse a los aspectos puramente externos y formales sino que debe lograrse una interiorización de los juicios alcanzados para proceder a una modificación y avance en los conocimientos. Nesher[13] nos aporta algunas consideraciones claves para una actualización del papel de la evaluación, diferenciando las pruebas de evaluación de los ejercicios o instrumentos para la investigación.

Las recomendaciones de Nesher, resumidamente, dicen:

[12] Radatz H. Obra citada.

[13] Nesher P. (1987). Toward on Instructional Theory: the Role of Student's Misconceptions. For the Learning of Mathematics. Vol. 7, págg. 33-39.

"a) El aprendiz deberá ser capaz, durante el proceso de aprendizaje de valorar las limitaciones e incomodidades de una pieza dada de conocimiento. Esto puede ser enfatizado desarrollando entornos de aprendizaje que funcionen como sistemas de retroalimentación dentro de los cuales el aprendiz sea libre para explorar sus creencias y obtener respuesta específica a sus acciones.

b) En los casos en que el aprendiz reciba retroalimentación inesperada, si no queda bloqueado por ella, deberá ser estimulado y motivado para continuar e interrogar respecto a su tarea.

c) El profesor no puede predecir completamente el efecto del sistema de conocimiento previo del estudiante en un nuevo entorno. Más aun, antes de que complete su instrucción, debiera proporcionar oportunidades al estudiante para manifestar sus concepciones deficientes y así relacionar la instrucción subsiguiente a estas concepciones.

d) Las concepciones deficientes son, por lo general, una excrecencia de un sistema de conceptos y creencias ya adquiridos aplicados equivocadamente a un dominio. No debieran tratarse como cosas terribles que deben desarraigarse ya que ello puede confundir a los aprendices y destruir su confianza en el conocimiento previo. En vez de ello, el nuevo conocimiento debiera conectarse con el esquema conceptual previo del estudiante y situarlo en la perspectiva correcta.

e) Las concepciones deficientes no sólo se encuentran tras las realizaciones erróneas, sino que también se ocultan tras muchos casos de ejecución correcta. Una teoría de la instrucción deberá cambiar su enfoque de las realizaciones erróneas hacia la comprensión del sistema de conocimiento completo de los estudiantes, del cual se derivan sus reglas de actuación.

f) Los items diagnóstico que discriminan entre concepciones adecuadas y deficientes no son necesariamente los mismos que se emplean en los ejercicios y pruebas escolares. Un esfuerzo especial de investigación debiera hacerse para construir items diagnóstico que establezcan la naturaleza específica de las concepciones deficientes.

También Romberg[14] insiste en la complejidad de las tareas de evaluación y en la necesidad de superar un tratamiento exclusivamente penalizador de las producciones erróneas o incorrectas de los alumnos.

4.5. Los errores y la Formación del Profesorado

Al comienzo de este apartado ya se hizo refencia a la función prioritaria de los profesores en dirigir y guiar el desarrollo de ideas matemáticas en las mentes de los escolares, razón por la cual era de importancia destacable el entrenamiento en pautas de observación cuidadosa sobre el trabajo de los alumnos con el fin de conocer en profundidad lo que los estudiantes están

[14] Romberg T. (1989). Evaluation: a coat of many colours. En Robitaille (Edt.): Evaluation and Assessment in Mathematics Education. París: Unesco.

pensando. Este aprendizaje debe iniciarse durante el periodo de formación inicial. A la pregunta *"¿qué conviene que aprendan los profesores en formación al realizar la observación de los alumnos en su trabajo matemático?"*, Brousseau, Davis y Werner[15], contestan señalando algunas ideas directrices a tener en cuenta para esa observación:

"1. Proporcionar a los estudiantes una oportunidad para ver lo que conocen y lo que pueden inventar o descubrir con antelación a enseñarles un método, técnica o concepto supuestamente novedoso.

2. No dejar a la casualidad la creación de las representaciones mentales de los alumnos. Se pueden proporcionar experiencias para los alumnos que influirán considerablemente en las representaciones mentales que ellos construyan mentalmente.

3. Mediante las relaciones de comunicación con los alumnos, el profesor puede conocer las representaciones mentales que los alumnos están empleando."

Además del entrenamiento en la observación de las actuaciones de los alumnos y en una guía efectiva para ayudarles a superar las concepciones inadecuadas y los errores, los profesores en formación inicial y permanente deben tener un conocimiento general de las consideraciones teóricas y de fundamentación que hemos hecho en los apartados anteriores relativas a la clasificación de errores, determinación de causas, esquemas teóricos de interpretación y desarrollo curricular derivado del diagnóstico, tratamiento y superación de los errores en el aprendizaje. Todas estas cuestiones tienen interés intrínseco para la formación de profesores y deben ser objeto de estudio, reflexión y práctica explícitas.

Hay, finalmente, otras dos cuestiones de interés en relación con la formación de profesorado y el estudio de los errores. Por un lado, el análisis de los errores cometidos por los alumnos y la discusión en seminario de vías posibles para su corrección ponen de manifiesto las propias concepciones que tiene cada profesor en formación respecto del conocimiento matemático y la naturaleza de su aprendizaje. Esta comprensión sobre las propias creencias permite asumir críticamente los planteamientos profesionales de cada profesor en formación, observando las incoherencias y aspectos olvidados y promoviendo una concepción más completa de las tareas docentes.

Introducir en el aula una consideración sistemática de los errores va más allá de introducir un nuevo tópico en el currículo, y hace necesario la enseñanza de estrategias adecuadas. Esto es debido a que tanto los profesores como los alumnos tienen fuertes concepciones previas sobre los errores y, por tanto, estas consideraciones influirán sus comportamientos en relación con las actividades que impliquen errores. Será pues importante que los profesores clarifiquen sus concepciones sobre las matemáticas, su aprendizaje y los errores para que puedan ayudar a sus alumnos a superar el sentimiento negativo que las personas tienen hacia los errores.

Por otro lado, también los profesores en formación cometen errores en la realización de tareas matemáticas, muchas de ellas similares o debidas a las mismas causas que las que comenten los escolares. Poner de manifiesto las concepciones deficientes y los errores

[15] Brousseau G., Davis R. & Werner T. Obra citada.

cometidos es una tarea formativa ineludible para el Profesor en formación; conviene aprovechar este tipo de actividades para proponer esquemas de trabajo correctivos y situaciones en las que el conflicto cognitivo entre las concepciones inadecuadas y las adecuadas se ponga fuertemente de manifiesto y obliguen a una reestructuración positiva de los esquemas previos.

Algunas investigaciones recientes han trabajado en esta línea.[16]

4.6. Técnicas de análisis

A lo largo de los estudios e investigaciones en educación matemática podemos encontrar una gran variedad de métodos para el estudio de los errores en matemáticas. Mulhern[17] los agrupa en cuatro amplias categorías:

1. Contar simplemente el número de soluciones incorrectas a una variedad de problemas. Este método, que tiene un valor diagnóstico limitado es cercano al método psicométrico, y ha dominado la educación estatal hasta hace poco.

2. Análisis de los tipos de errores cometidos. Esta técnica implica usualmente clasificar diferentes tipos de error, examinar cómo se desvian de la solución correcta y hacer inferencias sobre qué factores pueden haber conducido al error.

3. Análisis de patrones de error. Tales análisis pueden revelar errores sistemáticos que sean síntoma de concepciones inadecuadas, o bien al variar aspectos de las tareas los patrones de error que resultan pueden proporcionar claves sobre qué estrategias se han utilizado.

4. Construir problemas de tal modo que puedan provocar errores en los individuos. Aquí el investigador observa los patrones de error realizados por los individuos; especula sobre las posibles causas de estos errores; y, sistemáticamente, construye nuevos problemas de los que puede predecirse que inducirán a errores similares.

Ya hemos indicado, al considerar los antecedentes en el estudio de errores, que la mayor parte de los estudios hasta fechas recientes eran de la primera de las clases mencionadas, con una fuerte influencia de la metodología psicométrica. También hemos considerado en detalle diversas aproximaciones a la clasificación de errores. Vamos a presentar el planteamiento que están siguiendo algunos autores como Nesher[18] al realizar el análisis de patrones de errores como síntomas de concepciones deficientes o inadecuadas (“misconceptions”).

La noción de concepción deficiente señala una línea de pensamiento que causa una serie de errores, todos ellos procedentes de una premisa incorrecta subyacente, en vez de errores esporádicos, desconectados y no sistemáticos. No siempre resulta sencillo seguir la línea de pensamiento de los niños y poner de manifiesto cómo es de consistente y sistemático. La mayor parte de los estudios, sin embargo, informan sobre la clasificación de errores y su frecuencia, aunque ésto no explica su origen y por tanto no pueden tratarse sistemáticamente.

---

[16] Tirosh D. & Graeber A. (1989). Preservice elementary teachers’ explict beliefs about multiplication and division. Educ. Stud. Math. Vol. 20, págg. 79-96.

[17] Mulhern G. Obra citada.

[18] Nesher P. Obra citada.

Parece que esta carencia de generalidad en los análisis podría evitarse si se mira en los niveles de representación más profundos en los que evoluciona un sistema de significado que controla las realizaciones superficiales. Cuando se detecta un principio erróneo en este nivel más profundo, es posible explicar no un caso sino toda una clase de errores. Denominamos a una tal regla para la guía de errores una concepción deficiente.

La aplicación de estos principios al estudio de dos tipos de errores detectados en la comparación de números decimales[19] , sirve para poner de manifiesto los esfuerzos de los alumnos por proporcionar sentido conceptual a nuevos conocimientos matemáticos recibidos mediante instrucción en términos de conocimientos previamente dominados; ésto es lo que explica la aparición de los errores. En este estudio, el diseño de una prueba en la que se tienen en cuenta todas las posibles actuaciones de los alumnos en términos de las concepciones deficientes que se hipotetizan, proporciona un modelo para analizar los patrones de error como categorías consistentes, de un modo más detallado y directo que en trabajos anteriores.

Las dificultades que se presentan usualmente para detectar estos errores, debido a que los alumnos pueden obtener buenas calificaciones en pruebas de comparación de decimales (que es el contenido que se estudia), aún cuando se encuentren afectados por algunas de las concepciones deficientes subyacentes, llevan a realizar las siguientes consideraciones de carácter general:

a) Para hacer el diseño sobre la instrucción relativa a un nuevo conocimiento, no es suficiente con analizar los procedimientos y sus requisitos previos, que es lo que se hace en muchos casos. Debemos conocer cómo este nuevo conomiento se integra en un gran sistema de significados, que el niño ya posee, y del cual va a derivar sus directrices.

b) Es crucial conocer específicamente cómo los procedimientos ya conocidos pueden interferir con el material que se está aprendiendo.

c) Todos los nuevos elementos que se asemejan, pero son distintos de los antiguos, debieran discriminarse claramente en el proceso de instrucción, y el profesor debiera esperar encontrar errores en estos elementos. Es innecesario decir que, aunque produzcan mayor número de respuestas erróneas, tales elementos deben presentarse a los niños, y no tratar de evitarlos.

Otro desarrollo técnico avanzado en el estudio de errrores, ya comentado, es el realizado en el campo de la sustracción al aplicar el modelo de los bugs, considerando la metáfora de la mente humana como un ordenador. Maurer[20] nos explica los resultados más importantes de esta técnica de análisis. El conocimiento de los tipos de errores de sustracción que cometen los estudiantes es ahora tan detallado que se han escrito programas de inteligencia artificial que cometen los mismos errores que los estudiantes, proporcionando al programa sólo unos cuantos principios básicos. Otros programas sirven para diagnosticar rápidamente qué bugs tiene un estudiante determinado. Otros ayudan a diagnosticar los bugs de los demás mediante un entrenamiento en esta tarea. Practicando las destrezas de búsqueda de bugs, los estudiantes

[19] Resnick L., Nesher P., Leonard F., Magone M., Omanson S., Polet I. (1989). Conceptual bases of Arithmetic Errors: the case of decimal fractions. Journal for Research in Mathematics Education Vol 20 págg. 8-27.

[20] Maurer S. Obra citada.

llegan a reconocer que sus propios razonamientos pueden tener bugs. También la teoría sobre la generación de bugs ha empezado a proporcionar ideas sobre las mejores y peores elecciones de ejemplos y sobre los métodos mejores y peores para seleccionar material. Esto era algo que no podía hacer el antiguo conocimiento sobre errores sistemáticos.

En cualquier caso, la investigación actual indica que muchas respuestas a problemas que han sido considerados descuidos son, de hecho, el resultado de concepciones inadecuadas sistemàticas sobre sustracción.

La figura muestra el trabajo de un estudiante con un bug. El bug se refiere a "llevarse" o "pedir prestado", en este caso "llevarse" de 0:

$$\begin{array}{r} a\ 0\ b \\ -\ \underline{x\ y\ z} \end{array} \qquad \text{donde z es mayor que b}$$

El estudiante transforma la sustracción en:

$$\begin{array}{r} (a-1)\ \ 0\ \ (b+10) \\ -\ \underline{\ \ x\quad y\quad z\ \ } \end{array} \qquad \text{en vez de:} \qquad \begin{array}{r} (a-1)\ \ 9\ \ (b+10) \\ -\ \underline{\ \ x\quad y\quad z\ \ } \end{array}$$

Procedimiento que conduce a su vez a una segunda dificultad:

0 - y = y (una versión) 0 - y = 0 (otra versión).

No hay nada aleatorio o chapucero en el trabajo del estudiante con bugs como estos. Está trabajando cuidadosamente, siguiendo un procedimiento preciso, aunque incorrecto.

¿Qué explican tales bugs?. Imaginemos que el estudiante comprende el algorítmo de la sustracción de una manera muy mecánica. Lo ve como una mera manipulación columna por columna, excepto si el dígito de arriba de una columna es más pequeño que el de abajo, en cuyo caso se disminuye el dígito c de su izquierda en 1 y se sustituye d por 10 + d. Imaginemos además que el profesor nunca ha presentado el caso en que c es cero, o que el estudiante estaba distraido cuando el profesor lo hizo. ¿Qué hace el estudiante en un ejemplo en el que c vale cero?. No se evade, sabe que debe dar una respuesta. Así, generaliza imaginando alguna versión del procedimiento que incluye todos los casos previos y también este. En este ejemplo, la idea del estudiante es que el dígito del que se pide prestado no necesita ser el que está inmediatamente a la izquierda, sino que puede ser el dígito no nulo más cercano a la izquierda. De este modo, ante una laguna en el algorítmo, el estudiante hace un "remiendo" incorrectamente, creando un bug. El estudio de tales correcciones se llama "Repair theory".

Si bien los críticos a la Repair theory han puesto de manifiesto las limitaciones de los análisis hechos sobre esta fundamentación, en especial por las características tan específicas que tienen los conocimientos a los que se puede aplicar, que le dan un carácter limitado y restrictivo, no cabe duda que, en su campo, la potencialidad del análisis logrado es bastante completo.

4.6. Conclusión

El campo de estudio sobre errores en el aprendizaje de las matemáticas escolares hemos visto que se viene desarrollando y definiendo de manera crecientemente productiva durante los últimos años. Su interés para la mejora en la comprensión y conocimiento de los alumnos, así como para una realización eficaz de las tareas docentes, es indudable. Creemos que, en los próximos años, asistiremos a un mayor desarrollo de estos estudios al avanzar en la comprensión teórica y en sus implementaciones prácticas. Para nosotros constituye un campo de interés permanente en el que pensamos continuar desarrollando una parte considerable de nuestras investigaciones en el Area.

Bibliografía:

Artigue M. (1989). Epistemologie et Didactique. Institut de Recherche pour l'enseignement des Mathematiques. París: University Paris VII.

Bachelard G. (1978). La filosofía del no. Buenos Aires: Amorrortu.

Bachelard G. (1988). La formación del espíritu científico. Mexico: Siglo XXI.

Baruk S. (1985). L' age du capitaine. De l'erreur en mathématiques. Paris: Editions du Seuil.

Bell A. (1986). Diseño de enseñanza diagnóstica en matemáticas.

Blando J., Kelly A., Schneider B., Sleeman D. (1989). Analyzing and modeling Arithmetic Errors. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 20, págg. 301-308.

Booth L. (1984). Algebra: Children's strategies and errors. Windsor: NFER-Nelson.

Borassi R. (1986). Algebraic Explorations of the Error 16/64 = 1/4 Mathematics Teacher. Vol. 79, págg. 246-248.

Borassi R. (1987). Exploring Mathematics Through the Analysis of Errors. For the learning of Mathematics. Vol 7 págg. 2-9.

Bordón, Revista de la Sociedad Española de Pedagogía (1953). Tomo V, nº35.

Bouvier A. (1987). The rigth to make mistakes. For the Learning of Mathematics. Vol. 7 págg. 17-25.

Brekke G. (1991). Multiplicative Structures at ages seven to eleven. Studies of children's conceptual development, and diagnostic teaching experiments. Thesis for the Ph. D. degreé. Nottingham: Unversity of Nottingam.

Brousseau G., Davis R., Werner T. (1986). Observing Students at work, en Chistiansen B., Howson G., Otte M. (Edts): Perspectives on Mathematics Education. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Brown J., Burton R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematics skills. Cognitive Science 2, págg. 155-192.

Brown J., Vanlehn K. (1982). Towards a generative Theory of "Bugs", en Carpenter T., Moser J., Romberg T., (Edt.s). Addition and Subtraction

Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Buswell G., Judd C. (1925). Summary of Educational Investigations Relating to Arithmetic. Chicago: University of Chicago.

Castro E., Rico L., Castro E. (1992). Choice of Structure and Interpretation of Relation in Multiplicative Compare Problems. New Hampshire. Proceedings XVI Annual Conference of the International Group of PME.

Cebulski L., Bucher B. (1986). Identification and remediation of children's subtraction errors: a comparison of practical approaches. Journal of School Psychology. Vol. 24, págg. 163-180.

Clements M. A. (1980). Analyzing children's errors on written mathematical tasks. Educational Studies in Mathematics. Vol. 11, págg. 1-21.

Cochran W., Cox G. (1990). Diseños Experimentales. México: Trillas.

Davis R. (1984). Learning Mathematics. The Cognitive Science Approach to Mathematics Education. Australia: Croom Helm.

Fischbein E. (1987). Intuition in Science and Mathematics. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Graeber A., Baker K. (1991). Curriculum materials and Misconceptions concerning Multiplication and Division. Focus on Learning Problems in Mathematics. Vol. 13, págg. 25-37.

Graeber A., Tirosh D., Glover R. (1989). Preservice teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 20, págg. 95-102.

Hart K. (1981). Children's understanding of Mathematics 11-16. Londres: J. Murray.

Janvier C. (1987). Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics. Hillsdale: Lawrence Earlbaum Associates.

Kerslake D. (1986). Fractions: Children's strategies and errors. Windsor: NFER-Nelson.

Kilpatrick J. (1978). Variables and Methodologies in Research on Problem Solving, en Hatfied L. & Brandbard D. (Edts.) Mathematical problem solving: papers from a research workshop. Columbus, Ohio: Eric-Smeac.

Kilpatrick J. (1991). A history of Research in Mathematics Education, en Grows D. (Edts.). Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: MacMillan.

Lakatos I. (1978). Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático. Madrid: Alianza Universidad.

Lewis A., Mayer R. (1987). Students' miscomprehension of Relational Statements in Arithmetic word Problems. Journal of Educational Psychology. Vol. 79, págg. 363-371.

Maurer S. (1987). New knowledge about errors and New vievs about learners: What they mean to educators and more educators would like to know, en Schoenfeld A. (Edt.) Cognitive Science and Mathematics Education Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Mevarech Z. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. Educational Studies in Mathematics. Vol. 14, págg. 415-429.

Molina F. (1989). Propuesta de Innovación Curricular sobre Análisis Numérico en el Bachillerato.Tesina de Licenciatura. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Movshovitz-Hadar N., Inbar S., Zaslavsky O. (1986). Students' distortions of Theorems. Focus on Learning Problems in Mathematics. Vol. 8, págg. 49-57.

Movshovitz-Hadar N., Inbar S., Zaslavsky O. (1987). Sometimes Students'. Errors are our fault. Mathematics Teacher. Vol. 80, págg. 191-194.

Movshovitz-Hadar N., Zaslavsky O., Inbar S. (1987). An empirical classification model for errors in High School Mathematics. Journal for Research in Mathematics Education. vol. 18, págg. 3-14.

Mulhern G. (1989). Between the ears: making inferences about internal processes, en Greer B. & Mulhern G. (Edts.) New Directions in Mathematics Education. Londres: Routledge.

Nesher P. (1987). Toward an Instructional Theory: the Role of Students' Misconceptions. For the Learning of Mathematics. Vol. 7, págg. 33-39.

Pinchback C. (1991). Types of Errors Exhibited in a Remedial Mathematics Course. Focus on Learning Problems in Mathematics. Vol. 13, págg. 53-62.

Popper K. (1979). El desarrollo del conocimiento científico. México: Siglo XXI.

Radatz H. (1979). Error Analysis in the Mathematics Education. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 9, págg. 163-172.

Radatz H. (1980). Students' Errors in the Mathematics Learning Process: a Survey. For the Learning of Mathematics. Vol. 1, págg. 16-20.

Resnik L., Nesher P., Leonard F. Magone M., Omanson S., Pelet I. (1989). Conceptual bases of Arithmetic Errors: the case of Decimal fractions. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 20, págg. 8-27.

Rico L. y Col. (1982). Programación del Bloque de Fracciones en el ciclo Medio de la E.G.B.Actas de las II Jornadas sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Sevilla, págg. 612-640.

Rico L., Castro E. (1983). Cero ¿es un número natural?. Análisis de las dificultades de Cero. Cádiz: Actas I Jornadas Andaluzas de Profesores de Matemáticas, págg. 152-161.

Rico L. y cols. (1988). Didáctica Activa para la Resolución de Problemas. Granada: Universidad de Granada.

Romberg T. (1989). Evaluation: a coat of many colours, en Robitaille D. (Edt.): Evaluation and Assessment in Mathematics Education. París: Unesco.

Sierpinska A. (1990). Some remarks on undertanding in mathematics. For the Learning of Mathematics. Vol. 10, págg. 24-36.

Tall D. (1991). Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tirosh D., Graeber A. (1989). Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. Educational Studies in Mathematics. Vol. 20, págg. 79-96.

Tirosh D., Graeber A. (1990). Evoking cognitive conflict to explore preservice teachers' thinking about division. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 21, págg. 98-108.

Wollman W. (1983). Determiming the Sources of Error in a translation from sentence to equation. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 14, págg. 169-181.