ACERCA DE LA LÓGICA DE LA CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" (Argentina)
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. CICATA (México)
crccrespo@gmail.com

Resumen. Ante el hecho reiterado de que los alumnos no comprenden en el aula de matemática la necesidad de la demostración y que además aparecen formas de argumentación no deductivas y que son consideradas erróneas, en este trabajo se pretende analizar primeramente las funciones de las demostraciones matemáticas y su presencia en la clase de matemática. Se plantea una serie de reflexiones de la manera en la que se construye el conocimiento matemático, intentando identificar la lógica subyacente que guía la construcción del conocimiento matemático y compararla con la del descubrimiento en las ciencias fácticas.

Palabras clave: lógica, construcción, inducción, deducción abducción

Abstract. Based on the fact that students repeatedly fail to understand the need of formal demonstration in the mathematics classroom and that non deductive ways of argumentation appear, considered wrongful by teachers, we try to analyze in this paper firstly the use for mathematics demonstration and its presence in the class. We propose a series of considerations on the way that mathematical knowledge is constructed, trying to identify the logic underneath that knowledge in order to face it with the logic involved in the arousal of factic sciences.

Key words: logic, construction, induction, deduction, abduction

La demostración en el aula de matemática. Sus funciones y presencia

En muchas oportunidades, en el aula de matemática los estudiantes no comprenden la necesidad de la demostración de propiedades en matemática. Para comprobar la validez de una afirmación matemática se contentan recurriendo, por lo general, a una simple verificación o creen la propiedad, por resultarles evidente. Aún en los casos en que llegan a comprender su necesidad, la dificultad surge cuando ellos son quienes realizan estas demostraciones. Las distintas formas del pensamiento lógico no siempre son logradas satisfactoriamente por los alumnos en la escuela. Los docentes reconocen que la argumentación deductiva es la que conduce a demostraciones y por lo tanto la que conduce a validar el conocimiento matemático (Crespo Crespo, 2007a)

En algunas investigaciones realizadas acerca de las concepciones de los docentes y los estudiantes del último año de la carrera de profesorado de matemática sobre las demostraciones (Crespo Crespo y Ponteville, 2004, 2005), se ponen de manifiesto que ciertas ideas aparecen desdibujados: no se distinguen claramente las diferencias entre la matemática, el saber matemático y el aprendizaje de la matemática en relación con las argumentaciones. Sin embargo, gran cantidad de docentes tiene claramente asumida la existencia de diferencias fundamentales entre otros saberes conceptuales específicos (geométricos, algebraicos, analíticos, etc.), pero no reconocen los distintos niveles existentes entre qué es demostrar, qué es saber demostrar y qué es aprender a demostrar. La no diferenciación de estos tipos de saberes, en particular entre el saber matemático en sí y el saber escolar relacionados con las argumentaciones, hacen que no se asuman las características que deben tener las argumentaciones matemáticas en la escuela y que a veces se confundan con la formalización. Esto ocasiona que en algunas clases de matemática se recurra a formalismos que en lugar de explicar y clarificar contribuyen a confundir, ya que el alumno por no poder manejar cómodamente la notación, recurre a la memorización.

Al hallar formas no deductivas presentes en las argumentaciones de los estudiantes, surge la pregunta acerca de si es posible aprovecharlas en la construcción del conocimiento matemático y de qué manera (Crespo Crespo, Farfán, y Lezama, 2008, 2009). Esto ha dado origen a investigaciones en las que se analizan las mismas. En estas juega un papel fundamental el marco teórico elegido, ya que debe permitir comprender esas argumentaciones dentro de los escenarios en los que se manifiestan. Por ello el marco en el que nos situamos es la socioepistemología.

Las demostraciones pueden ser entendidas como prácticas sociales asociadas a la práctica de referencia de la validación del conocimiento matemático (Crespo Crespo, 2007). En trabajos orientados al análisis de las demostraciones en el aula, se afirma la validación no es la única función de la demostración. Algunos autores (de Villiers, 1993), presentan un modelo en el que se evidencian las siguientes funciones:

- *Verificación o convicción*: establece la verdad de una afirmación. Se piensa a las demostraciones como autoridad absoluta para establecer validez de conjeturas y se considera detrás de teoremas la presencia de una secuencia de transformaciones lógicas. Normalmente se busca la demostración después de haber tenido la convicción de validez.
- *Explicación*: exhibe los por qué de la verdad. En resultados evidentes o apoyados en evidencia cuasiempírica, la demostración explica causas.
- *Sistematización*: organiza diversos resultados en un sistema que incluye axiomas, conceptos básicos y teoremas. Esta función ayuda a identificar inconsistencias y razonamientos circulares. Simplifica teorías integrando conceptos y proporcionando una visión global de la estructura subyacente.
- *Descubrimiento o creación*: permite llegar a nuevos resultados. Esta función se apoya en la idea de que no todas las propiedades se descubren por intuición sino que algunas pueden ser el producto de la demostración misma.

- *Comunicación*: transmite el conocimiento matemático. En este punto se considera a las demostraciones como forma de discurso, de intercambio basado en significados compartidos.

Este modelo busca exponer algunas de las funciones de la demostración dentro de la actividad matemática científica pues permite vislumbrar las posibilidades de modificar algunas prácticas vinculadas con la demostración en el aula evitando caer en la función formalista de verificación que se reconoce generalmente en la enseñanza de la matemática en las aulas.

Pensando en estas funciones, se realizó una investigación en la que se indagaron las representaciones de docentes y estudiantes del último año de profesorado de matemática acerca de la demostración y sus funciones (Crespo Crespo y Ponteville, 2005). Según los resultados obtenidos en la investigación, se observó que la demostración en el aula, o ha sido totalmente ignorada o bien se presta como medio de verificación, y en menor medida de explicación. Estas dos funciones se pueden vislumbrar en las respuestas obtenidas. Sin embargo, las de sistematización, descubrimiento y comunicación prácticamente no aparecen. En particular, centraremos nuestra atención en esta oportunidad en el descubrimiento. En la investigación recién mencionada, no pudimos establecer en aquel entonces la causa del no reconocimiento de esta función, por lo que la investigación continuó en ese sentido.

Descubrimiento o invención en matemática

Una pregunta usual entre los estudiantes de profesorado de matemática se refiere a si los conocimientos matemáticos se descubren o se inventan. Cada una de estas opciones denota una posición epistemológica frente a la matemática como ciencia.

Afirmar que se descubren conocimientos está traduciendo una visión platónica del mundo, en la que la matemática surge de la observación de objetos y fenómenos; la matemática es, bajo esta óptica, la ciencia que lee la naturaleza y los conocimientos matemáticos son la interpretación de la misma. Al pensar que el conocimiento matemático se inventa, se ve a la matemática como una construcción humana; sus conocimientos se logran construir a través de prácticas sociales que se realizan en una sociedad que interactúa en un escenario sociocultural. Esta visión es la que mantiene la socioepistemología y por eso se habla del conocimiento social del conocimiento matemático.

Sin embargo, la manera en la que se presenta la matemática en la escuela en muchas oportunidades se orienta de forma que los estudiantes crean que se trata de un saber ya cerrado y dado, en el que no se puede participar en su construcción, sino que a lo sumo se está descubriendo conceptos de una ciencia acabada.

Muchos libros de epistemología se refieren al descubrimiento del conocimiento científico, por lo general abordando los conocimientos de las ciencias fácticas y sociales. No en todos los casos la palabra descubrimiento tiene el mismo significado. Gregorio Klimovsky realiza un interesante análisis de los tipos de descubrimiento (Klimovsky, 2005), distinguiendo cuatro interpretaciones:

a. Descubrimiento como "topetazo": una persona encuentra de forma imprevista un fenómeno o proceso no conocido ni esperado. Por ejemplo, el descubrimiento de $\sqrt{2}$ por parte de los pitagóricos.

b. Descubrimiento como identificación de un entidad nueva:

c. Descubrimiento como hallazgo de una entidad que había sido prevista por la teoría:

d. Descubrimiento teórico como admisión de que la existencia de las entidades que se postulan tiene un valor explicativo que otras explicaciones no tienen. Por ejemplo, la teoría de conjuntos infinitos de Cantor.

En nuestra visión de la matemática y comprendiéndola como una construcción sociocultural, será más natural hacer una analogía ala interpretación anterior y referirnos a:

a. Construcción como "topetazo"

b. Construcción como identificación de un entidad nueva

c. Construcción como hallazgo de una entidad que había sido prevista por la teoría.

d. Construcción teórica como admisión de que la existencia de las entidades que se postulan tiene un valor explicativo que otras explicaciones no tienen.

Lógica del descubrimiento científico

La manera tradicional de referirse a problemas epistemológicos es encontrada en los textos de epistemología. Por lo general se refieren al descubrimiento científico, centrándose en las ciencias experimentales. Tienen distintas interpretaciones de descubrimiento y en nuestro trabajo nos proponemos pensarlas en relación a la matemática.

La reflexión acerca de la ciencia es una inquietud antigua. Aristóteles es quizá uno de los primeros que se plantearon formalmente preguntas acerca de la naturaleza de la ciencia.

Hasta mediados del siglo XVIII varios pensadores intentaron una caracterización de las leyes empíricas, en las que la inducción desempeña un papel fundamental. Hacia principios de siglo XIX los cuestionamientos cambiaron su ángulo y comenzó la búsqueda de la lógica de la justificación de los resultados científicos. Leibniz había establecido con anterioridad que era la lógica simbólica el lenguaje universal de las ciencias y que en ese lenguaje debían formalizarse los conocimientos científicos para que fueran entendidos por todos a pesar de sus diferencias culturales. Estas ideas reflejaban "un viejo sueño de muchos pensadores a lo largo de la historia [...] de tener un método seguro y sistemático para razonar" (Bautista, 2006, p.17)

En relación a la lógica del descubrimiento de la ciencia, Francis Bacon en el siglo XVII, identificó dos formas básicas de razonamiento en las ciencias. La Inducción es la lógica que rige la formulación y selección de hipótesis en ciencias experimentales, va de lo particular a lo general y generaliza a partir de casos en los que algo es verdad. Por otra parte, la deducción va de lo general a lo particular y es aplicada para validar resultados científicos enunciados.

A estos dos modos básicos de razonamiento, Charles S. Peirce en el siglo XIX, sumó otro que describió como fundamental para las ciencias. La Abducción, que se enfoca en la formulación de hipótesis es este otro modo básico de razonamiento. Gracias a él, es posible engendrar nuevas hipótesis explicativas, es el primer paso en la investigación y según Peirce es la esencia de la lógica del descubrimiento: se logra la inferencia de un caso a partir de una regla general y un resultado: "hipótesis", "conjetura" o "suposición". La Abducción no tiene carácter necesario, sino probable, es un tipo de razonamiento sintético o ampliativo que genera hipótesis al tratar de explicar un fenómeno. El esquema básico de la abducción consiste en dos premisas: una de ellas es una implicación y la otra su consecuente y su conclusión es el antecedente de la implicación mencionada. Se trata de una forma de razonamiento que desde el punto de vista deductivo es una falacia, pero que permite la ampliación del conocimiento mediante la formulación de posibles causas de un hecho. Se encuentra orientada a la búsqueda de explicaciones que satisfagan el interés por la comprensión del mundo y cumple un rol importante tanto en la investigación como en el aprendizaje de las ciencias (Lucero, 2005).

La figura 1 permite ver de manera esquemática los tipos de inferencias presentes en las ciencias.

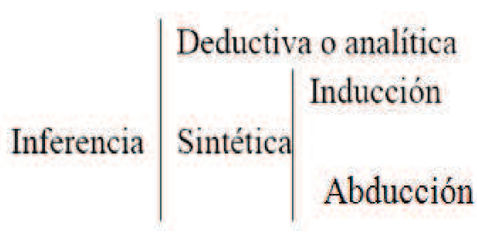

Figura 1. Formas de inferencia del conocimiento científico

Existen tres tipos de abducciones según las características de los sucesos en los que se sustenten. Las abducciones basadas en entidades o hechos no observados en el momento de formular la hipótesis son aquellas que formulan una hipótesis sobre algo que será observable en el futuro para permitir verificarla. Otras abducciones se basan en entidades o hechos que pudieron observarse con anterioridad aunque en el momento actual no sea posible repetir la observación. Finalmente algunas abducciones se basan en hechos que son inobservables en la práctica, porque están más allá de lo perceptible directamente por los sentidos.

Lógica de la construcción del conocimiento matemático

En el caso de la matemática y a partir de las ideas explicadas anteriormente, puede hablarse de una lógica para la construcción del conocimiento y una lógica para la validación del mismo. La primera se realiza a través de las estrategias de inducción y abducción y su función es la ampliación del conocimiento. La segunda, cuya función es la preservación de la verdad, tiene carácter deductivo.

El origen de la matemática, tal como puede apreciarse a través de la historia de la humanidad, es empírico, se basa en la observación y en la necesidad de encontrar soluciones a problemas prácticos que surgieron en cada escenario sociocultural. La construcción de esos conocimientos se basó en la inducción y la abducción. El pensamiento deductivo surgió recién en la cultura griega, aunque después marcó los senderos de la matemática desde ese momento hasta nuestros días. Algunos autores afirman que "el descubrimiento incluye la justificación final, puesto que sería impropio considerar que se ha logrado un descubrimiento antes de que la hipótesis esté debidamente establecida" (Gaeta y Gentile, 2005, p.209)

En relación al aula de matemática, la lógica de la construcción del conocimiento combina las tres formas de razonamiento: deducción, inducción y abducción. Si bien las dos últimas no aceptadas por los docentes y parece que son rechazadas en el discurso matemático escolar, se hallan presentes. Son utilizadas como recursos didácticos y para comprender propiedades. Son numerosos los casos en los que es posible detectar su presencia en el aula tanto en la introducción de un tema como en los momentos de comprensión del mismo. También con el uso de los recursos tecnológicos en el aula de matemática, se fomenta la utilización de argumentaciones inductivas y abductivas.

Reflexiones finales sobre la construcción del conocimiento matemático

La matemática combina intuición y razón. El pensamiento intuitivo es creativo y subjetivo (Bunge, 1965), el racional es analítico y objetivo. La intuición es el sostén de la construcción del conocimiento matemático. La lógica que la guía es distinta de la lógica formal, no es deductiva, sino que tiene sus propias reglas metodológicas que guían al científico en las etapas iniciales de la investigación.

La presencia de formas no deductivas (inductivas y abductivas) de argumentación en el aula, nos lleva a analizar cómo utilizarlas y a ser concientes de su utilidad y limitaciones. No podemos ignorarlas, sino que por el contrario debemos estar atentos a la manera en la que actúan para poder aprovecharlas a la hora de lograr en nuestros estudiantes construir nuevos conocimientos matemáticos.

Referencias bibliográficas

Bautista, R. (2006). Las matemáticas en la segunda mitad del siglo XX. En P. González Casanova y M. Roitman Rosenmann (Coord.), *La formación de conceptos en ciencias y en humanidades.* México:Siglo XXI.

Bunge, M. (1965). *Intuición y ciencia.* Buenos Aires: EUDEBA.

Crespo Crespo, C. (2007a). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Crespo Crespo, C. y Ponteville, Ch. (2004). Las concepciones de los docentes acerca de las demostraciones. En L. Díaz Moreno (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Volumen 17. Tomo 1. (560-565) Clame, México.

Crespo Crespo, C. y Ponteville, Ch. (2005). Las funciones de la demostración en el aula de matemática. En J. Lezama (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Volumen 18. (307-312) Clame, México.

Crespo Crespo, C., Farfán, R. M. y Lezama, J. (2008). Acerca de la existencia de formas de argumentación construidas fuera de escenarios escolares que llegan al aula de matemática. P. Lestón (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 21. México: Clame (825-835)

Crespo Crespo, C., Farfán, R. M. y Lezama, J. (2009). Algunas características de las argumentaciones y la matemática en escenarios sin influencia aristotélica. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 12 (1), 29-66.

de Villiers, M. (1993). *El papel y la función de la demostración en matemáticas*. En *Épsilon*, 26,15-30.

Klimovsky, G. (2005). Tipos de descubrimiento. En G. Klimovsky (Ed.), *Los enigmas del descubrimiento científico*. (43-51). Buenos aires: Alianza.

Gaeta, R. y Gentile, N. (2005). ¿Son los descubrimientos matemáticos diferentes de los descubrimientos en las ciencias fácticas? En G. Klimovsky (Ed.), *Los enigmas del descubrimiento científico*. (207-229). Buenos Aires: Alianza.

Lucero, S. (2005). Descubrimiento e inferencia a la mejor explicación. En G. Klimovsky (Ed.), *Los enigmas del descubrimiento científico*. (81-97). Buenos Aires: Alianza.