

## ESTUDIO DE LA FUNCIÓN Y SUS DERIVADAS SUCESIVAS EN LA LICENCIATURA EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS DE ESFM-IPN, CON BASE EN EL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL

Moisés Ricardo Miguel Aguilar, María Guadalupe Simón Ramos  
CINVESTAV-IPN

México

mmiguel@cinvestav.mx, gsimon@cinvestav.mx

Campo de investigación: Pensamiento Variacional

Nivel: Superior

**Resumen.** Esta investigación recae bajo el marco teórico del Pensamiento y Lenguaje Variacional pues confiamos en que éste podría replantear el estudio de algunos elementos del cálculo que pueden contribuir a una reconstrucción del discurso matemático escolar en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional (ESFM-IPN). Presentamos a continuación algunos de los resultados que obtuvimos al enfrentar a los estudiantes de esta escuela a una secuencia de problemas que han sido planteados tradicionalmente sobre pensamiento y lenguaje variacional dentro del contexto gráfico (Cantoral y Farfán, 1998; Testa, 2004). Con la finalidad de encontrar evidencia que sustente la necesidad de una reestructuración en los planes y programas de estudio. Así como de un cambio en el discurso matemático actual.

**Palabras clave:** derivadas sucesivas, pensamiento y lenguaje variacional, límite

### Introducción

Es conocido en el mundo de la ciencia que gran parte de los conocimientos en matemáticas han sido el resultado del desarrollo de otras ciencias, como por ejemplo, en Física, la mecánica de los trabajos de Newton dio origen al cálculo infinitesimal. Por su parte, Azcárate (1990), señala que el carácter de los programas vigentes (exhaustivos, excesivamente formales y totalmente separados de la vida cotidiana y de los planes de otras materias), así como la propia estructura de los estudios, ha inducido una enseñanza de las matemáticas en la que se ha descuidado un poco su papel como instrumento de conocimiento.

Es nuestro deseo con este trabajo, encontrar evidencia que nos muestre hasta qué grado esta situación se encuentra cercana a la realidad que se vive hoy en día en la ESFM, considerando que las materias de Cálculo se imparten sin hacer referencia a los problemas de los que dieron origen ni a sus aplicaciones más significativas.

En el caso de la física en la *Licenciatura en Física y Matemáticas* se tiene un claro ejemplo de las necesidades y problemas a los que nos referimos, pero consideramos que la vinculación entre este tipo de materias y las que son propias de la matemática debería ser más cercana.

La cuestión aquí sería comprobar qué tan capaces son los estudiantes, con la formación que han llevado, de tomar su conocimiento en matemáticas y utilizarlo en situaciones que requieren más que el uso de definiciones y resultados teóricos

### **El pensamiento y lenguaje variacional en la ESFM-IPN**

El exhaustivo ritmo de trabajo en la ESFM tiene tan acostumbrados a los estudiantes a tratar con los fenómenos de cambio. Tanto que no les permite detenerse a reflexionar en el hecho de que se utilizan ideas y procesos matemáticos para modelar fenómenos como: la desintegración de sustancias radioactivas, el movimiento de los planetas, la velocidad de las reacciones químicas, el crecimiento poblacional, entre muchos otros, aunque tratemos con estos en varios de nuestros cursos. En pocas palabras, en distintas áreas se utilizan modelos matemáticos en los que la clave de su estudio recae en la noción de cambio y éste nos conduce a la noción de variación cuyo estudio se realiza por medio del cálculo diferencial e integral, ramas de la matemática que se tratan con bastante rigor y profundidad en los cursos de Cálculo 1 y 2 de esta escuela.

El sentido de este trabajo recae, en que si se recurre a la noción de variación se podría replantear el estudio de algunos elementos del cálculo que pueden contribuir a una reconstrucción del discurso matemático escolar en la ESFM.

Pensamos que la enseñanza del análisis elemental (cálculo) en la ESFM no promueve *directamente* como parte del currículo en matemáticas el estudio y el análisis de la variabilidad de fenómenos reales sujetos al cambio, hecho en el que varias investigaciones muestran que el estudio de las funciones encontraría una especial significación, estrechamente ligada a sus orígenes epistemológicos (Ruíz, 1994), además dicha situación tampoco favorece el desarrollo de un pensamiento y lenguaje variacional, como se menciona en Cantoral y Reséndiz (2003); y en Dolores , Alarcón y Albarrán, (2002).

Dichas investigaciones muestran que, pareciera ser que la enseñanza de las matemáticas reduce el sentido personal que el educando pudiera tener de los conceptos, a un nivel de abstracción tan general que aleja la posibilidad de que pueda construir su significado objetivo. Y obstaculiza que resuelva muchos problemas relacionados con la modelación de procesos objetivos.

Lo dicho anteriormente no significa que los niveles rigurosamente teóricos deban ser omitidos del proceso de enseñanza-aprendizaje, sino que debe llegarse a ellos partiendo de las experiencias (sintetizadas y tratadas para lograr los objetivos de aprendizaje que se proponen) que la sociedad recorrió para llegar a formular la teoría. Lo cuál implica incorporar tiempo y actividades, así como un esfuerzo adicional en la docencia, en vez de las pobres exposiciones tradicionales. Se trata de aprovechar los lenguajes más empíricos de la matemática (los que se trabajan en el bachillerato son una buena muestra) para procurar la vinculación entre lo intuitivo y accesible al estudiante, y lo teórico que debe aprender.

El objetivo de los cursos en los que se imparte el análisis elemental, según el programa de estudios de la ESFM, es la justificación de las técnicas de cálculo infinitesimal aprendidas en cursos anteriores. Sin embargo, también se considera que es la oportunidad de enseñar a los alumnos a traducir ideas geométricas e intuitivas a un lenguaje claro y preciso, que muchas veces es la única manera de poder abordar determinados problemas matemáticos y físicos. Esta habilidad en parte podría complementarse recurriendo a las nociones de variación y cambio que anteriormente deberían haber desarrollado los estudiantes. Nociones, que se encuentran muy escasamente desarrolladas en estudiantes de nivel medio superior, superior e incluso en profesores de ambos niveles. Dichos estudios han basado sus explicaciones de estos problemas en la línea de investigación *Pensamiento y Lenguaje Variacional*.

El Pensamiento y Lenguaje Variacional es una línea de investigación que describe, genéricamente, un programa de investigación en marcha, no excluyente ni de orientaciones teóricas ni de acercamientos metodológicos, con el que se busca entender cómo es que se construye o se forma progresivamente entre los estudiantes dicho pensamiento. Entendemos por estudio del Pensamiento y Lenguaje Variacional como aquel que se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos, propios de la variación y el cambio, en el sistema educativo y en el medio social que les da cabida. O sea, aquel que pone particular atención en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales. Es una línea de investigación que posee una orientación múltiple, por un lado se ocupa de las estructuras variacionales específicas desde un punto de vista matemático y fenomenológico, en segundo término estudia las funciones cognitivas que los seres humanos

desarrollan mediante el uso de conceptos y propiedades matemáticas del cambio y en tercer lugar, tiene en cuenta los problemas y situaciones que se abordan y se resuelven en el terreno de lo social mediante estructuras variacionales consideradas tanto en la escuela como en el laboratorio (Cantoral, 1997)

### **Metodología**

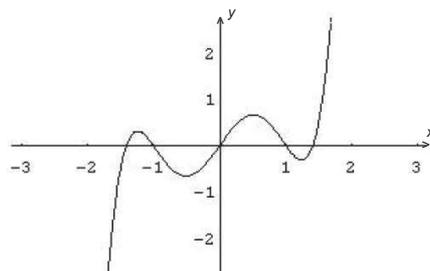
Lanzamos una convocatoria a todos estudiantes de todos los grados de la Licenciatura en Física y Matemáticas con el único requisito de que hubieran llevado el curso de Cálculo 2. Curso donde se aborda cálculo diferencial e integral. Se les invitó a resolver un cuestionario con diversas preguntas sobre la función y sus derivadas sucesivas. La respuesta de los estudiantes fue pobre pero la muestra final tuvo bastante riqueza pues incluyó estudiantes de todas las especialidades, tanto de la especialidad en física como de la especialidad en matemáticas.

El diseño de actividades se realizó con base en diseños que fueron aplicados en otros estudios, de los cuáles realizamos un análisis de los elementos que nos parecía importante incluir, con la finalidad de observar algunas concepciones que los estudiantes pudieran tener sobre la función, la derivada y sus derivadas sucesivas. Con el tiempo algunos de los diseños se fueron modificando y adaptando a las necesidades y conocimientos de nuestra población hasta obtener tres diseños finales, que consideramos, reflejan muy bien su papel dentro de nuestro estudio. Presentamos a continuación el análisis de una pregunta de cada uno de los diseños con las cuales nos proponemos presentar evidencia del objetivo de este trabajo.

### **Análisis de resultados**

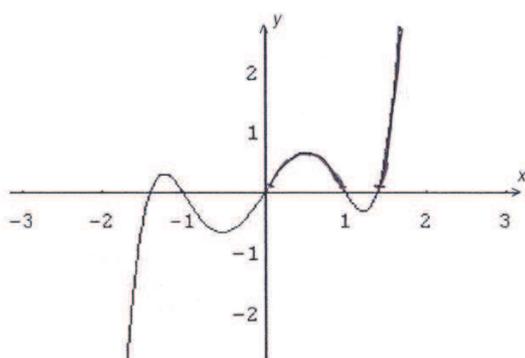
Presentaremos a continuación algunas de las preguntas que incluimos en el cuestionario junto con el objetivo por el cual se incluyó y la respuesta de los estudiantes.

A.4 Indique sobre la gráfica de la función que aparece enseguida la porción que consideres cumple con la condición  $f'''(x) > 0$ .

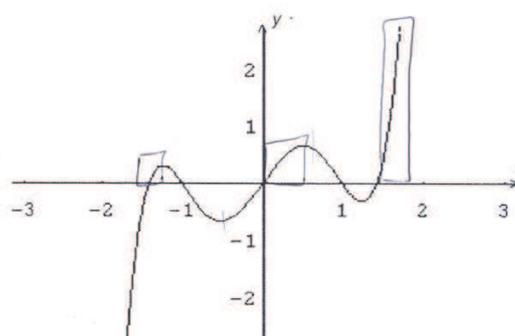


Grafica de la función  $f(x)$

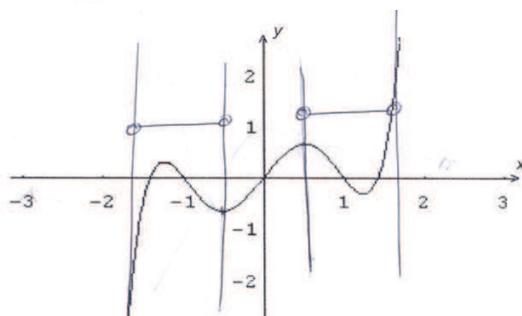
Algunas respuestas que dieron los estudiantes fueron:



Grafica de la función  $f(x)$



Grafica de la función  $f(x)$



Grafica de la función  $f(x)$

Esta fue la cuarta pregunta de nuestro primer diseño, el cual nos resultaba muy importante pues la respuesta requería que se utilizaran estrategias de pensamiento y lenguaje variacional, es decir, necesitaban recurrir a un manejo simultáneo y coordinado de las derivadas sucesivas pero solamente uno de los estudiantes lo pudo llevar a cabo.

Este estudiante tomó la función y obtuvo el gráfico de su primera derivada considerando la información que le proporciona la derivada acerca de crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión, máximos y mínimos. Para dibujar a la segunda derivada ahora consideró a la primera derivada como la función original y de esta forma también pudo obtener el trazo de la tercera derivada (estos trazos los realizó en un dibujo aparte) e indicó en la gráfica las regiones donde  $f'''(x) > 0$ .

B.7 Podrías decir ¿Cuál es el significado geométrico del siguiente límite  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  ?

Buscábamos que los alumnos hicieran evidente si pueden dar o no una representación gráfica al límite y el tipo de argumentos que utilizan para la construcción e interpretación de ésta, en especial la importancia e interpretación que den al cociente para la construcción de dichos argumentos. Estas fueron algunas de las respuestas que dieron:

*“es la pendiente de la recta secante en el punto  $f(a)$ ”*

*“la pendiente de  $f(x)$  en el punto  $a$ ”*

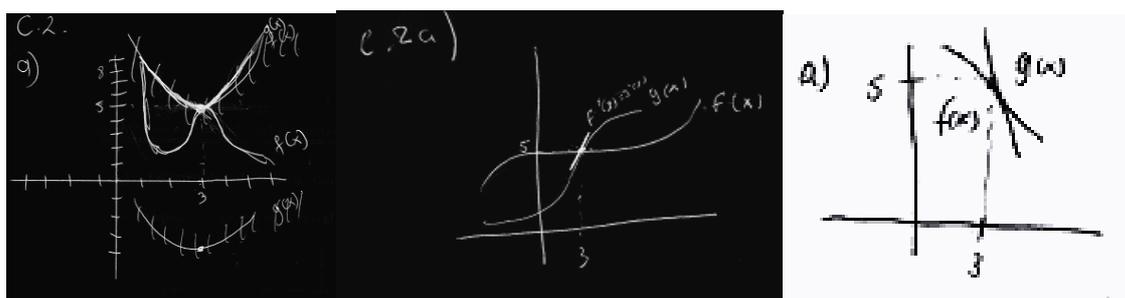
*“es el límite de las rectas secantes a la gráfica de  $f$  siendo  $a$  un punto fijo sobre  $f$  y  $x$  variando cada vez más próximo a  $a$ ”.*

*“pendiente de la recta tangente a  $f(x)$ ; razón de cambio”*

*“se mide el cambio de la función en un cierto intervalo, la pendiente a la curva en ese punto”*

C.2 Sean  $f$  y  $g$  dos funciones reales, realiza en cada caso un esbozo, en un mismo sistema de ejes cartesianos, del gráfico de dichas funciones, en un entorno del punto en cuestión, de modo que se cumplan las condiciones dadas.

$$\begin{aligned} \text{C.2a)} \quad f(3) &= g(3) = 5 \\ f'(3) &= g'(3) = -2 \\ f''(3) &= -4, \quad g''(3) = 8 \end{aligned}$$



En el primer caso el estudiante no solo no considera correctamente el signo de la derivada, sino que sus bosquejos indican que toma a la derivada como cero en los tres casos.

Sólo una estudiante tuvo problemas al trazar el bosquejo de ambas funciones considerando su segunda derivada. Sus dibujos muestran que no le ha dado un significado correcto al signo de la segunda derivada.

Es importante hacer notar que un estudiante además de haber bosquejado de una forma adecuada (de acuerdo a los aspectos considerados) al parecer considerar el valor concreto de la segunda derivada al haber tomado en cuenta también qué tan cóncava es cada una de las funciones, considerando el caso en que  $|f''(a)| > |g''(a)|$  o el caso contrario  $|f''(a)| < |g''(a)|$ . Además muestra cómo al tener la misma primera derivada, las funciones son muy parecidas alrededor del punto en cuestión, de tal modo que casi se pueden confundir.

### Conclusiones generales

El manejo simultáneo y coordinado de las derivadas sucesivas parece ser una condición sin la cual la formación de la idea de derivada y en consecuencia de la noción de predicción deviene inevitablemente frágil (Cantoral, y Farfán, 1998).

- Las repuestas a la pregunta A.4 indican que los estudiantes no pueden establecer un manejo simultáneo entre las derivadas sucesivas, lo cual indica que su concepción de derivada se muestra frágil.

- En B.7 los estudiantes dan muestra del uso que hacen de sus recursos memorístico, de la falta de comprensión del lenguaje matemático además de su falta de comprensión de la noción de cambio implícita en la definición analítica de derivada.
- La pregunta C.2 muestra que carecen de herramientas que les permitan pasar del lenguaje gráfico al lenguaje algebraico, indispensables para establecer el manejo simultáneo entre las derivadas sucesivas.

Lo que nos hace pensar en la urgencia de una reestructuración en los planes y programas de estudio de la ESFM-IPN, además de la importancia de incluir las nociones de variación, pues estas replantearían el estudio del cálculo y contribuiría a una reconstrucción del discurso matemático escolar en la ESFM.

### Referencias bibliográficas

Azcárate, C. (1990). *La velocidad: Introducción al concepto de derivada*. Tesis de Doctorado no publicada. Universidad Autónoma de Barcelona.

Artigue Michéle. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 1(1), 40-55.

Cantoral, R. (1997). *Pensamiento y lenguaje variacional*. Documento interno. D.F., México: Cinvestav del IPN.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del Pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Díaz Moreno (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 17, (pp.1-10)

Cantoral, R. y Farfán, R. Ma. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon* 42, 353-369.

Cantoral, R. y Farfán, R. Ma. (2003). Matemática Educativa: una visión de su evolución, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 6(1), 27-40.

Cantoral, R., Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: Un estudio en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 6(2), 133-154.

Marcolini, M. (2005). La noción de predicción: Análisis y propuesta didáctica para la educación universitaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8(1), 25-68

Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C., Alarcón, G., y Albarrán, D.F. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 5(3), 225-250.

Farfán, R. Ma. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

González, N. R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN.

Ruiz, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Tesis de Doctorado no publicada, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada.

Testa, Z. Y. (2004). *Procesos de resignificación del valor numérico de la función derivada segunda: Un estudio en el sistema escolar Uruguayo*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN.