LA INTEGRACIÓN DE CONTEXTOS EN EL ESTUDIO DE SUCESIONES DE FUNCIONES

Valentina Badía Albanés, Concepción Valdés Castro
Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana Cuba
valia@matcom.uh.cu, concha@matcom.uh.cu
Campo de investigación: Visualización Nivel: Superior

Resumen. *El uso de sistemas algebraicos computacionales ha permeado la manera en que estamos realizando nuestra enseñanza. Está siendo aprovechada la posibilidad de apoyarnos en la computadora para mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos.*
En este trabajo presentamos algunos ejemplos, en el tema de la convergencia de sucesiones funcionales, para mostrar cómo se puede vincular la información obtenida de la visualización gráfica y la exploración numérica con el enfoque analítico tradicional. A través de esta integración de contextos pretendemos que el estudio de la convergencia de sucesiones funcionales sea realmente significativo, dejando una huella profunda no solo en este concepto concreto, sino también en la formación matemática del estudiante
Palabras clave: visualización, CAS, sucesiones de funciones, convergencia

Introducción

En algunos cursos de lo que podemos denominar Cálculo Avanzado, en ocasiones es necesario explicar a estudiantes relativamente noveles nociones relacionadas con la convergencia de sucesiones funcionales: convergencia puntual, uniforme o en la media. Para cualquier profesor que haya tenido que enfrentar esta tarea no es desconocido el alto grado de dificultad que ella presenta, especialmente si se pretende una verdadera asimilación de estos conceptos. En la Universidad de La Habana, nos hemos visto ante tal desafío, cuando impartimos los cursos de Análisis Matemático en las carreras de Matemática, Física y Computación. Este desafío nos ha motivado a la búsqueda de algún paliativo.

Actualmente existe una amplia literatura que analiza las ventajas e inconvenientes relacionados con el uso de los sistemas algebraicos de cómputo (CAS) en la enseñanza, así como las posibilidades que ellos brindan para integrar eficientemente los contextos numérico, gráfico y analítico y de esta manera mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos.

El objetivo del presente trabajo es mucho más modesto: deseamos compartir con la comunidad de educadores matemáticos latinoamericanos una forma que estimamos eficaz para la enseñanza de algunas nociones relacionadas con la convergencia de sucesiones de funciones. Mediante ejemplos concretos, pretendemos describir un conjunto de tareas para realizar con el auxilio de algún CAS, que contribuyan a que los alumnos transiten y coordinen los diferentes registros de representación de los conceptos objeto de estudio.

Metodología

Nuestra propuesta la hemos basado en:

- Una revisión bibliográfica de los materiales a nuestro alcance sobre el uso de los CAS en la enseñanza, especialmente aquellos que versan sobre nociones relacionadas con el Análisis Matemático (Arcavi, 2003; Artigue, 2002; Badía A, 2001; Sárvari, 2005; Forster y Taylor, 2001; Ruthven y Hennessy 2002; Moreno y Shriraman, 2005).
- Un análisis de la forma de presentación, en los libros de texto disponibles, de las nociones de convergencia puntual, uniforme y en la media.
- La observación durante varios años de práctica docente de cuáles son las dificultades principales de los estudiantes en la asimilación de estos conceptos y algunas de las estrategias que contribuyen a una comprensión más profunda de los mismos.

A continuación presentamos un conjunto de tareas a realizar por parte de los estudiantes con algunos comentarios de aquellas cuestiones que es indispensable discutir en clase. En alguna de estas tareas el uso de un CAS será una ayuda muy valiosa, en otras su utilización es optativa y, en unas pocas, innecesaria e incluso contraindicada (Drijvers, 2002). Llamamos la atención sobre que, en los ejemplos propuestos el alumno se verá obligado a transitar por los contextos numérico, gráfico y analítico (Peschek y Schneider, 2002).

Estudio de la convergencia puntual y uniforme

En esta parte propondremos dos ejemplos donde se evidencian las diferencias en el comportamiento de las sucesiones uniformemente convergentes y las que no lo son. Estas tareas pueden ser propuestas con posterioridad a la formulación de la definición de convergencia uniforme, con el fin de favorecer a su comprensión, sin embargo, nos parece mucho más efectiva la discusión de los incisos a), b) y c) con antelación a una definición formal.

Ejemplo 1. Dada la sucesión de funciones*:* $l_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x^2}$

a) *Obtenga los 10 primeros términos de la sucesión y realice su gráfico.*

Aquí es interesante notar que para poder apreciar realmente el comportamiento de la sucesión es necesario utilizar para todas las funciones la misma escala o, mejor aún superponer el gráfico de todas las funciones en una misma figura (ver gráfico 1). También puede ser muy instructivo realizar la animación de los gráficos obtenidos. En cualquier caso, se observa como, para valores de la abscisa no demasiados cercanos a 0, las curvas se van acercando cada vez más al eje *OX*.

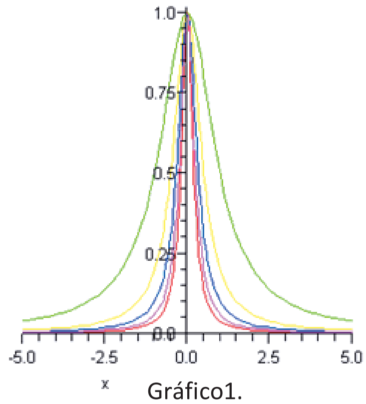

Gráfico1.

b) *Halle la función límite puntual.*

El cálculo de este límite no presenta dificultad alguna, sin embargo, si el alumno pretende utilizar el asistente matemático obtiene 0 como límite. Esto lo puede llevar a considerar a la función constante cero como límite, sin embargo, la función límite (discontinua), es:

$$l(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Este hecho puede aprovecharse para mostrar la necesidad de conocer las limitaciones de las herramientas computacionales y ser críticos con los resultados obtenidos.

c) *Considerando ε = 0,001 y para x = 1; 0,4; 0,2; 0,1; 0,01, investigue cuál es el menor valor de n que satisface la definición de límite.*

Para realizar estos cálculos de manera más eficiente, puede sugerirse la elaboración de un pequeño programa de modo que el cálculo se realice de forma automática. Los resultados (tabla 1), muestran que, a medida que el valor de *x* se acerca a 0, la desigualdad $|f_n(x) - f(x)| < 0{,}001$ es satisfecha por valores de *n* cada vez mayores.

x	1	0.4	0.2	0.1	0.01

Tabla 1.

Entonces pueden ser oportunas preguntas tales como ¿podremos encontrar un valor *n* a partir del cual se cumpla la desigualdad anterior y que sea válido para todo valor real de *x*? ¿y si nos limitamos a considerar las *x* del intervalo $[1,\infty)$? Tras la discusión de estas interrogantes aparece como necesaria la clasificación de la convergencia de las sucesiones de funciones en uniforme y no uniforme, por tanto, nos parece el momento idóneo para la formalización matemática de estas nociones.

d) *Demuestre que la convergencia no es uniforme en todo* $\Re$ *y sí lo es en un intervalo de la forma* $[a,\infty)$, *con* $a>0$.

Cuando se analiza detalladamente el comportamiento gráfico de las sucesiones se observa que todas las curvas aparecen "enganchadas" en el punto (0,1) y esto es lo que les impide "aplastarse" completamente sobre el eje de abscisas. De esta forma, se evidencia que el máximo valor de todas las funciones es 1 y, además, el problema para la uniformidad de la convergencia se presenta solo en los puntos cercanos al origen. Esta última afirmación es corroborada por los resultados numéricos obtenidos. A partir de una discusión de este tipo, es completamente natural la demostración analítica de la no uniformidad de la convergencia usando directamente la definición o a través del comportamiento de las funciones en una sucesión de valores de *x* (por ejemplo, de la forma $1/n$).

Con el segundo ejemplo que proponemos pueden realizarse tareas semejantes a las indicadas en el primero. Podría resultar instructivo realizar el análisis gráfico y de la tabla correspondiente con antelación al enunciado de la definición rigurosa, pero también podrían considerarse como una guía para orientar la intuición y buscar la mejor forma de probar formalmente la convergencia uniforme.

Ejemplo 2. Dada la sucesión de funciones: $f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$

a) *Realice las tareas propuestas en a), b) y c) del ejemplo anterior*.

En este caso, las curvas obtenidas, cada vez se "aplastan" más sobre el eje de abscisas, a medida que *n* crece (ver gráfico 2), aún cuando todas las funciones poseen un punto de máximo relativo y otro de mínimo que se acerca cada vez más al origen.

Si la tabla de valores se realiza solo para los valores propuestos en el ejemplo 1, no será posible visualizar nada interesante.

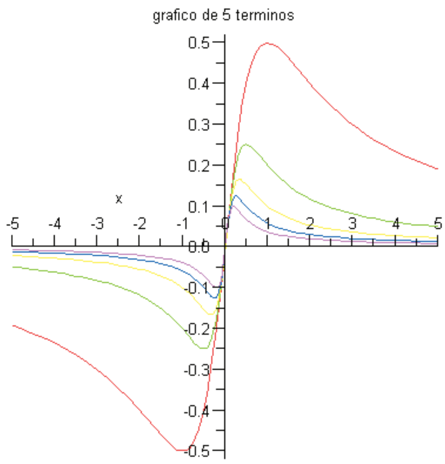

Gráfico 2.

Por ello es conveniente sugerir que se utilicen valores de *x* mucho más pequeños. De este modo se evidenciará que, independientemente del *x* considerado, el valor de *n* igual a 101 puede resultar suficiente.

x	0.1	0.02	0.0101	0.01	0.009	0.008	0.006

Tabla 2

Una tarea adicional podría ser la exploración para otros valores de ε más pequeños.

b) *Halle la función límite y demuestre que la convergencia es uniforme en todo* $\Re$.

Ni el gráfico ni la exploración numérica brindan una respuesta a esta tarea. Para ello es oportuno calcular, en dependencia de *n*, el valor máximo de las funciones $f_n(x)$ de la sucesión. Por esta razón la demostración debe hacerse en forma analítica. Sin embargo, los cálculos necesarios, como el hallazgo de la derivada o la resolución de la ecuación resultante al igualar esta derivada a cero, pueden ser auxiliados por el CAS que se esté utilizando. Por supuesto, más adelante, como ejercitación, pudieran proponerse ejemplos, donde la dificultad de algunos de estos cálculos se beneficiara más del uso de los programas computacionales.

Convergencia en la media vs convergencia puntual

El ejemplo siguiente muestra el apoyo que puede ser el uso de un CAS en la interpretación y mejor comprensión de las llamadas convergencias en la media. Hemos seleccionado aquella que hace más sencilla nuestra presentación, pero una ayuda semejante podemos obtener para las otras. Convendremos en decir que la sucesión $f_n(x)$ converge en la media a la función $f_n(x)$ en el intervalo [*a*,*b*] si se cumple que

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx=0\,.$$

Ejemplo 3. Analice gráfica y analíticamente el comportamiento límite de la sucesión de funciones: $f_n(x)=n^2x(1-x)^n$.

En este ejemplo se puede orientar la realización de tareas similares a las realizadas antes, en particular, puede ser interesante, con vistas al estudio de las propiedades de la convergencia uniforme, observar que la no uniformidad de la convergencia esta vez se acompaña de una función límite continua, la función idénticamente nula. A continuación se propone

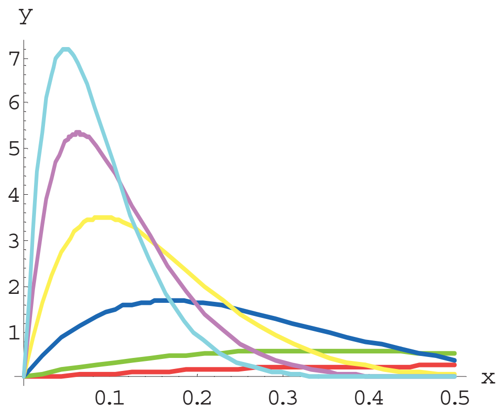

Gráfico 3.

Analice la convergencia en la media en el intervalo [0,1].

Si esta sucesión de funciones convergiera en la media a la función constante cero, entonces las áreas bajo las curvas deberían hacerse cada vez menores. Sin embargo, una inspección cuidadosa de los gráficos de estas funciones (ver gráfico 3), permite conjeturar que esto no sucede así. Una manera de poner este hecho de manifiesto es realizando un estimado burdo de las áreas a través de un triángulo que permanezca enteramente por debajo de la curva. Así que la hipótesis es que no debe haber convergencia en la media en el intervalo [0,1]. La prueba de esta hipótesis debe efectuarse analíticamente mediante el cálculo de la sucesión de integrales la cual evidentemente

$$\int_0^1 n^2x(1-x)^n dx=\frac{n^2}{(n+1)(n+2)},$$

no tiene límite cero. Para el cálculo de esta integral puede utilizarse algún CAS, lo cual, adicionalmente, puede promover algunos análisis interesantes.

En el ejemplo anterior la sucesión de funciones converge puntualmente a cero y sin embargo no converge en la media. Por supuesto, también debe mostrarse a los alumnos algún ejemplo donde haya convergencia en la media, pero los ejemplos de este tipo más interesantes que hemos encontrado no son adecuados para el uso de los CAS y por ello se salen de los objetivos de este trabajo.

Convergencia en la media vs convergencia uniforme

Los dos ejemplos que se proponen a continuación permiten comparar la convergencia uniforme y la convergencia en la media.

Ejemplos 4 y 5. Analice gráficamente la convergencia uniforme y en la media de las sucesiones y demuestre analíticamente las conjeturas que haya realizado.

$$f_n(x) = x(1-x^2)^n \quad y \quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

Después de la experiencia con los ejemplos anteriores, con solo este enunciado general, los alumnos pueden plantearse y resolver tareas similares. El comportamiento gráfico de ambas sucesiones funcionales se muestra en los gráficos 4 y 5, donde puede apreciarse que, en ambos casos, las áreas bajo las curvas se van haciendo cada vez más pequeñas con el aumento de n, lo

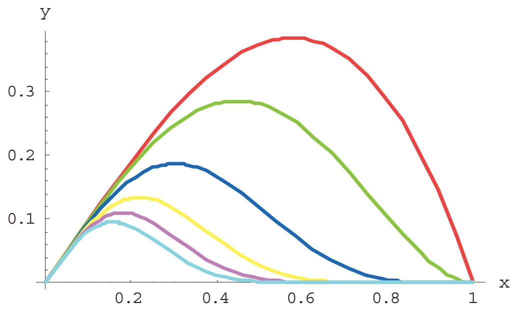

Gráfico 4.

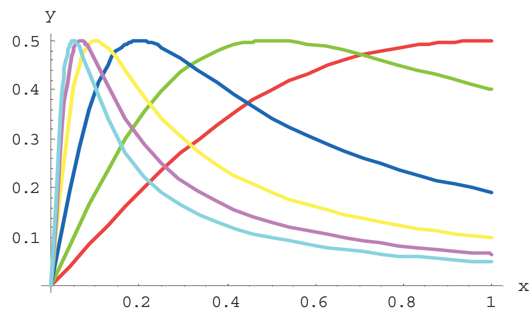

Gráfico 5.

que permite conjeturar que ambas convergen en la media a cero. Esta afirmación puede demostrarse mediante el cálculo de las integrales correspondientes, con la ayuda o no del asistente matemático. Sin embargo, cuando se analiza la convergencia uniforme, tanto gráficamente como realizando la exploración numérica, se concluye que en el primer caso hay convergencia uniforme y en el segundo no. Para la demostración puede ser de utilidad el empleo del asistente matemático.

Consideraciones finales

Las actividades presentadas no constituyen una secuencia didáctica estricta, solo pretendemos indicar un posible orden de desarrollo y será la dinámica propia de la clase y el criterio de cada profesor el que determine cual debe ser el orden de las tareas o si éstas deben ser reformuladas. También pueden añadirse otros ejemplos similares o incluso de un grado de complejidad computacional más elevado, siempre en dependencia de la intencionalidad didáctica que se tenga. Nuestra propuesta está encaminada a fomentar el uso de estrategias adecuadas para lograr un aprendizaje significativo, a promover la reflexión creativa, a motivar a los estudiantes en la formulación de preguntas y la búsqueda de respuestas, en definitiva nuestro objetivo principal es favorecer la apropiación del conocimiento matemático por parte de los estudiantes.

En la identificación de las potencialidades del uso de la tecnología en la enseñanza de temas habituales en la enseñanza universitaria de la matemática, hemos podido constatar que resultan muy instructivas la visualización geométrica y la exploración numérica previa a la introducción de nuevos conceptos y teoremas matemáticos. Pero también puede ser muy provechoso realizar este tipo de actividades con posterioridad a la definición formal, cuando las condiciones están creadas para una discusión más amplia y profunda. Este “ir hacia delante y volver hacia atrás” es un excelente método para lograr obtener el máximo provecho de las posibilidades de las diferentes representaciones del concepto.

Recalquemos la importancia que tiene dar a las representaciones visuales una “lectura” correcta: aprender a interpretarlas adecuadamente, a evadir la superficialidad. Solo así ellas realmente proporcionarán una rica experiencia cognoscitiva en la búsqueda de significados a los conceptos estudiados y solo así podrá evitarse que lejos de ayudar se conviertan en un obstáculo para el aprendizaje.

Por otra parte, hay que tratar de no privilegiar ninguna de las formas de representación, debemos usar todos los registros de representación, intentando una coordinación y transición adecuada entre ellos para permitir la comprensión integral del concepto.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics 52*, 215-241.

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 7*, 245-274.

Badía A., V. (2001). Utilización del Mathematica en las ecuaciones diferenciales ordinarias. En Beitía (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14*, (pp. 303-310). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Drijvers, P. (2002). Learning mathematics in a computer algebra environment; obstacles and opportunities. *ZDM 34(5)*, 221-228.

Forster P., Taylor P. (2001). A multiple perspective analysis of learning in the presence of technology. *Educational Studies in Mathematics 42*, 35-59.

Moreno, L.A. & Shriraman, B. (2005). The articulation of symbol and mediation in mathematics education. *ZDM 37(6)*, 476-486.

Peschek, W.; Schneider,E. (2002). CAS in general mathematics. *ZDM 34(5)*, 189-195.

Ruthven K., Hennessy S. (2002). A practicioner model of the use of computer-based tools and resources to support mathematics teaching and learning. *Educational Studies in Mathematics 49*, 47-80.

Sárvari, C. (2005). CAS integration into learning environment. *ZDM 37(5)*, 418-423.