TRANSFORMACIÓN LINEAL EN CONTEXTO GEOMÉTRICO

Juan Gabriel Molina Zavaleta
Programa de Matemática Educativa, CICATA-IPN México
jmolinaz@ipn.mx
Campo de investigación: Modelos mentales Nivel: Superior

Resumen. *En este documento se discuten algunas ideas producto de la investigación de Molina (2004) que se trabajaron en un taller de la XXI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. El tema a discusión, los modelos mentales intuitivos (en el sentido de Fischbein, 1987, 1989) que un grupo de estudiantes manifestó acerca de la Transformación Lineal (TL) en un contexto geométrico.*

Palabras clave: intuición, modelos mentales, transformación lineal

Introducción y objetivo

Este taller tuvo dos propósitos, en principio hacer concientes a los participantes acerca de los modelos intuitivos que pudiesen tener acerca de la Transformación Lineal en contexto geométrico, y por otra parte compartir los resultados de la investigación realizada por Molina (o.p.) acerca de las concepciones de un grupo de estudiantes sobre la TL. Lo que entendemos por intuición y por modelos intuitivos está en términos de la teoría de Fischbein (o.p.) sobre el tema y que abordaremos en el siguiente apartado.

La mecánica del taller fue la siguiente, plantear a los asistentes como tarea seis actividades tomadas del intrumento diseñado en la investigación citada y posteriormente discutirlas, señalando el origen y propósito de éstas en terminos de el acercamiento teórico del trabajo. La primera actividad estuvo compuesta por cuatro preguntas abiertas acerca de la TL. Las siguientes cinco tareas fueron preguntas acerca de la existencia de la TL, presentadas en formato geométrico.

La intuición

Según Fischbein, las personas tenemos la necesidad de entrar en un estado de convencimiento acerca de los conceptos matemáticos con los que nos encontramos, es decir, tener certeza de ellos. Lograr ese estado de convencimiento es mediado por la intuición, a través de modelos intuitivos. Con respecto a la intuición señala que este término no tiene definición única y lo que debemos entender por ella, se refiere a aquellas ideas que son aceptadas como ciertas por ser evidentes por sí mismas, es decir, no requieren argumentación para ser aceptadas.

> *La intuición no es la principal fuente de conocimientos evidentes y verdaderos, pero parece serlo, porque su papel es exactamente: crear aparición de certeza, conferir a distintas interpretaciones o representaciones un carácter de certeza intrínseca e incuestionable (Fischbein, 1987, p. 12, nuestra traducción)*

Fischbein (1987) hace una delineación detallada acerca de la intuición, discutiendo los rasgos característicos que pueden tener las nociones intuitivas.

Los modelos intuitivos

La delineación que es fundamental para dar sentido a este trabajo es la referente a qué se entiende por *modelo intuitivo* y cómo el *modelo intuitivo* influye en la cognición.

Para Fischbein, los modelos intuitivos son nociones intuitivamente aceptables que se desempeñan como un sustituto de otras nociones:

> *Los modelos representan una herramienta esencial para moldear o para darle forma a las cogniciones intuitivamente inaceptables. Cada vez que una persona se tiene que enfrentar con una noción que es intuitivamente inaceptable, tiende a producir (algunas veces deliberadamente, otras veces inconscientemente) substitutos de esa noción que son intuitivamente más accesibles. Tales sustitutos son comúnmente llamados modelos intuitivos (Fischbein, 1987, p.121, nuestra traducción y énfasis).*

Con respecto a los modelos, Fischbein entiende un modelo en el sentido de Gentner (1983):

> *Generalmente hablando, un sistema B representa un modelo de un sistema A si, en la base de un cierto isomorfismo, una descripción o una solución producida en términos de A puede ser reflejada consistentemente en términos de B y viceversa (Gentner, 1983, citado en Fischbein, 1987, p.121).*

En su trabajo, Fischbein realiza una categorización amplia acerca de los modelos, sin embargo, para nuestros fines, solamente retomaremos la siguiente:

Modelos explícitos y modelos implícitos (o tácitos)

En esta clasificación distingue entre los modelos explícitos y los implícitos. Los modelos explícitos se construyen o se escogen en forma consciente para facilitar a conseguir una solución. Por ejemplo, si consideramos alguna función que da información del volumen de un recipiente en términos de alguno de sus lados; esta función nos facilitaría encontrar las dimensiones que debería tener tal lado para que el recipiente contenga el mayor volumen posible.

Un modelo es implícito o tácito cuando el sujeto no está consciente de su influencia o del alcance de éste. Esta distinción juega un papel importante en la investigación.

Los modelos intuitivos y la cognición, según Fischbein

El papel de los modelos intuitivos en nuestro pensamiento, es el siguiente:

> *…Los modelos tácitos o intuitivos (ambos, paradigmáticos y analógicos), juegan un rol fundamental en cualquier proceso de razonamiento productivo. No puede existir una actividad de razonamiento productivo sin eventos productivos que consisten en globalización, concretización, extrapolación, etc. Los modelos intuitivos son genuinamente benéficos con respecto a todos estos aspectos. Un modelo ofrece a quien resuelve, un sustituto del original, que por medio de sus cualidades es mejor adaptado a la naturaleza del pensamiento humano que el original. Nosotros pensamos mejor con lo perceptible, con lo prácticamente manipulable, con lo familiar, con lo que se le puede controlar su comportamiento, con la validez implícita, que con lo abstracto, lo que no se puede representar, lo incierto, lo infinito (Fischbein, 1987, p.122, nuestra traducción y énfasis)*

Linchevski y Vinner (1988, citados en Fischbein, 1989, p. 10) comentan que existen varias concepciones erróneas en estudiantes respecto al concepto de conjunto, como por ejemplo considerar que los elementos de un conjunto deben poseer una cierta propiedad explícita común y pensar que un conjunto debe estar compuesto por más de un elemento. Si el modelo intuitivo que sustituye el concepto de conjunto es el de la colección de objetos, estas concepciones erróneas son previsibles:

> *El modelo intuitivo manipula de tras de escena el significado, el uso, las propiedades del concepto formalmente establecido. El modelo intuitivo parece ser más fuerte que el concepto formal. El estudiante tiende a olvidar las propiedades formales y tiende a mantener en mente aquéllas impuestas por un modelo. La explicación parece ser muy simple: las propiedades impuestas por el modelo concreto constituyen una estructura coherente, mientras las propiedades formales, aparecen, al menos a primera vista, más bien como una colección arbitraria (Fischbein, 1989).*

Para los fines de la investigación es importante identificar qué modelos intuitivos tienen los estudiantes sobre la TL porque estos son fundamentales en sus razonamientos productivos. Los modelos que los estudiantes tengan sobre la TL determinarán las concepciones que de tal concepto se formen: “lo que un individuo puede aprender, y cómo lo aprende, depende de los modelos con que cuenta” (Papert, 1981, p.13).

En Fischbein (1989) se explica, entre otras cosas, que los modelos tácitos en los estudiantes no son inalterables, que con la intervención apropiada se pueden modificar, con el objeto de afectar benéficamente el entendimiento de los conceptos matemáticos en los estudiantes. Dentro de sus conclusiones, a manera de sugerencia, indica que un primer paso para definir la estrategia para conseguir tal modificación consiste lógicamente en identificar los modelos tácitos en los estudiantes con respecto al concepto matemático de interés.

Mediante la discusión de las respuestas a las actividades y del acercamiento teórico discutido anteriormente se pretende alcanzar el primer objetivo de este taller. El segundo propósito se procurará comentando los resultados de la investigación que nos ocupa.

Las actividades y sus aportes

A continuación se discuten las actividades y los aportes de éstas al trabajo de Molina (2004). Es importante señalar que muchos de los detalles no se retoman, pero se pueden consultar en la fuente en cuestión.

Actividad 1

Contestar las siguientes preguntas:

a) ¿Qué entiendes por transformación lineal?

b) Propón un ejemplo de una transformación lineal y argumenta por qué es lineal.

c) Propón un ejemplo de una transformación no lineal y argumenta por qué es no lineal.

d) ¿Qué significa *lineal* en la transformación lineal?

Con respecto a estas preguntas se reporta lo siguiente:

Inciso a. La mayoría de los estudiantes entienden la TL como una especie de función, que a un conjunto de vectores los convierte en otro, pero no hicieron referencia a las dos propiedades que debe cumplir para ser lineal. Solamente dos estudiantes de los cinco entrevistados afirmaron que se trataba de una función y que cumplía dos propiedades.

Inciso b. La mayoría pudo plantear un ejemplo (algunos con errores en la sintaxis), sin embargo solo dos estudiantes pudieron demostrar algebraicamente que sus ejemplos correspondían con una TL. Cabe mencionar que los estudiantes del estudio tenían largo tiempo de haber tomado algún curso de álgebra lineal. Esta situación no afectó el estudio porque según la teoría de referencia los modelos o nociones intuitivas que los estudiantes se forman entorno a los conceptos matemáticos predominan con el tiempo.

Inciso c. Esta cuestión en general casó dificultad, solo dos personas pudieron dar un ejemplo, ambos ejemplos incluían un término x^2.

Inciso d. Esta pregunta fue contestada por todos, aquí salieron a la luz nociones intuitivas asociadas a ese término. Un estudiante lo relacionaban con segmentos de recta, "lineal viene de línea"; otro estudiante con un orden en el cuál se hacen operaciones; otro pupilo con ecuaciones de primer grado. Sin embargo ninguno hacía referencia a que éste es un adjetivo que se le da a un operador cuando satisface las dos condiciones para cualquier escalar k y cualesquiera vectores $u, v \in \Re^2, T(ku) = kT(u)$ y $T(u+v) = T(u) + T(v)$. En palabras de Fischbein podemos decir "el modelo intuitivo parece ser más fuerte que el concepto formal. El estudiante tiende a olvidar las propiedades formales y tiende a mantener en mente aquéllas impuestas por un modelo".

Actividades trabajadas

Las actividades presentan la siguiente pregunta:

Diga si es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 1 en los vectores de la Figura 2. Argumente por qué.

Actividad, inciso a

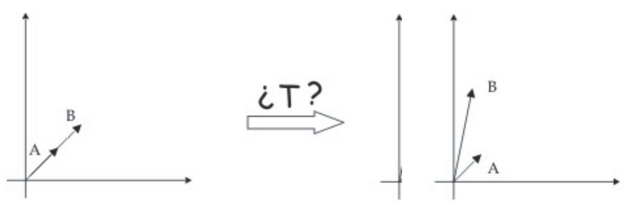

Figura 1 Figura 2

Por motivos de espacio no incluimos las restantes actividades, estas se pueden consultar en el siguiente hipervínculo:

http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33500204&iCveNum=6262

El resultado principal que reporta es que los modelos intuitivos detectados en todos los estudiantes sobre la TL son una serie de casos particulares de transformaciones lineales. Éstas son transformaciones lineales que se conocen en el ambiente escolar como expansiones, contracciones, reflexiones, rotaciones y composiciones de éstos. Los estudiantes, con el conjunto anterior de transformaciones lineales en $\Re^2$ como universo, cuando las preguntas involucran sólo estas transformaciones, en la mayoría de los casos determinan si la transformación involucrada en la cuestión es lineal; en caso de que tal transformación no forme parte de su universo, ésta es excluida de la clase TL. Para justificar lo antes dicho retomamos un caso en que se refleja esta situación.

El caso de Hermes: En el transcurso de la entrevista este alumno contestó con desenvoltura y correctamente cada uno de los casos que se le plantearon, mostrando facilidad para transitar entre las representaciones gráficas y las algebraicas. Sin embargo cuando llegó a la actividad *I* tuvo dificultades.

Ante esta situación, de entrada Hermes contesta negando la existencia de la TL; con seguridad dice:

H159: No, ésta no, porque está dejando fijo a B y este, está transformando a, A (señala la figura 2), y pues no.

Resulta importante lo repentina y contundente de la reacción de Hermes al negar la posible existencia de la TL, porque dos rasgos de la intuición son su *evidencia* y *certeza*; son nociones que quien las experimenta no siente necesidad de argumentos para aceptar como ciertas y Hermes parece estar seguro de su respuesta. Ante la reacción de Hermes intervenimos pidiendo que agregara detalles a su explicación. Como respuesta Hermes intentó dar una justificación algebraica que respaldara su afirmación, no la consiguió, sin embargo mantuvo su postura. A continuación al pasar a la siguiente pregunta (actividad *m*):

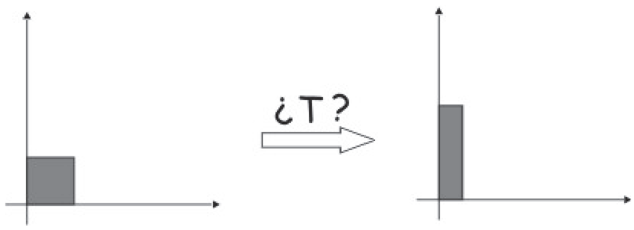

Figura 1 Figura 2

Hermes estaba en profundas meditaciones, repentinamente tomó la hoja en la que estaba plasmado el caso anterior, la actividad *l* y a continuación desarrolló un elaborado argumento a favor de la existencia de la TL, recurriendo a ideas relativas a los vectores base de una transformación; aquí nos interesa resaltar que con mucha seguridad cambió de postura, y mostró que en el caso de la actividad *l* sí podría existir una transformación lineal y comentó que lo mismo ocurriría con la actividad *m*. Cuando Hermes descubrió que sí podría existir la TL, nos explicó los rasgos que él consideraba de la transformación lineal y qué fue con los que se apoyaba para argumentar:

H181(Fragmento):…Pues tendría que cambiar de opinión en varias de esas, pero […]

E182: Mjm, ¿en cuáles tendrías que cambiar de opinión?

H183: Pues en un montón, sí porque estaba yo pensando, considerando transformaciones solamente rotación y por escalar, y no o sea, no necesariamente, de hecho ésta va a ser una transformación, transformación lineal, además.

Posiblemente lo que condujo inicialmente a Hermes a concluir la no existencia de la TL es que él pensaba en la transformación lineal como una función que tiene el mismo simple efecto geométrico en todos los vectores del plano (expande todos, contrae todos, rota todos, etc); cuando observa que el vector B se mantiene constante, interpreta que la transformación no afectó a un vector, entonces concluye que no es una TL. En otras palabras, Hermes tiene en mente ciertos modelos intuitivos acerca de cómo se comportan las transformaciones lineales, de tal forma que cuando se enfrenta a una situación que no encaja dentro de su universo de modelos, rechaza la existencia de la transformación lineal, como en la actividad *l*.

Hermes pensaba la transformación lineal en términos de movimientos geométricos simples, la expansión, compresión, la rotación y combinaciones de ellos. Cuando abordó la actividad *m*, él percibió una transformación lineal que tenía un comportamiento que consideraba imposible en ellas, que un vector se contraiga y otro se expanda, teniendo como resultado el cambió de postura, esta observación la respaldan con el diálogo H109 y en H183; aunque en este caso su argumento está basado en el no cumplimiento de la propiedad de la multiplicación por un escalar.

> H109: Porque como están alineados, deberían de cumplir este, esto deberían de cumplir (señala $A = \lambda B,\ T(A) = \lambda T(B)$), a esto, si se cumple esto, eso se debe cumplir y veo que, que no pues, un vector se estira y el otro se encoge, eso es lo que veo que no se puede.

Como discutimos en los párrafos anteriores, inicialmente Hermes se mostró reacio en aceptar la existencia de la TL. Su reacción, firmeza en no aceptar la existencia, no poder argumentar, podría ser la manifestación de su intuición ejerciendo influencia en él. Por otra parte, su cambio de postura después de observar el caso siguiente es un ejemplo de cómo una noción intuitiva puede ser modificada, cuando otro modelo intuitivo entra en juego. Al reflexionar sobre la pregunta, lo que era *implícito* volvió explícito [ver 183 arriba] y esto permitió el cambio en su postura. La pregunta planteada en la actividad *m* tiene un formato diferente a las anteriores, esto también podría tener el efecto de evocar modelos mentales de otra naturaleza en Hermes (uno con figuras que para él sí es una TL, porque tal vez lo asocia con la fórmula $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x \\ 2y \end{bmatrix}$ que sí cumple las propiedades), él logra percibir en la actividad *m* que si los lados que determinan la figura 1 representan vectores, ocurría algo semejante a lo planteado en la actividad *m*: una TL que afecta en forma diferente a los vectores, por consiguiente deduce que en tal caso sí podría existir.

Conclusiones

El álgebra lineal es una materia muy importante en el currículo escolar en México, por ello es importante mostrar explícitamente a profesores y estudiantes cómo los modelos intuitivos influyen implícitamente en nuestro razonamiento, esto brinda una comprensión profunda del concepto TL, pues permite que nuestro conocimiento sobre el tema se aproxime mejor al que la matemática le asigna.

Referencias bibliográficas

Fischbein E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach.* Holland: Reidel.

Fischbein, E. (1989). Tacit Models and Mathematical Reasoning. *For Learning of Mathematics*, *9*, 9-14.

Molina, J. G. (2007). Concepciones de la Transformación Lineal en Contexto Geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 241-273.

Molina, J. G. (2004). *Las concepciones que los estudiantes tienen sobre la transformación lineal en contexto geométrico.* Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav-IPN.

Papert, S. (1981). *Desafío a la mente*. Argentina: Ediciones Galápago.