DE LOS NATURALES A LOS ENTEROS VÍA LAS FORMAS SEMÁNTICAS EQUIVALENTES QUE SE PRESENTAN EN PROBLEMAS ADITIVOS

Eduardo Basurto Hidalgo
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN México
basurtomat@hotmail.com
Campo de investigación: Resolución de problemas Nivel: Básico

Resumen. *Este artículo reporta una investigación realizada con estudiantes entre 12 y 13 años, los cuales trabajaron en la resolución e invención de problemas aditivos con el propósito de extender el dominio numérico de los naturales a los enteros. Los resultados obtenidos indican que cuando los estudiantes resuelven e inventan problemas surgen formas semánticas equivalentes que conducen a nuevos significados de los números signados.*
Palabras clave: problemas, enteros, formas semánticas equivalentes

La resolución de problemas aditivos ocupa un lugar destacado en la investigación en educación matemática debido a la relevancia que tienen en el logro de un aprendizaje numérico lleno de significados. Algunos autores que se han ocupado de estos problemas han dado varias clasificaciones, como son la de Vergnaud (1982), Nesher y Greeno (1983), Carpenter y Moser (1982), Fuson (1992) y Bruno y Martinón (1997).

La investigación presentada se ubica en la tarea de resolver problemas aditivos de números con signo con la finalidad, por un lado de indagar el nivel de conceptualización de los negativos que los estudiantes muestran en la resolución de los mismos, así como la interpretación que dan a dichos números en el lenguaje cotidiano.

Para tales fines, la clasificación que se tomó como base para la elaboración y selección de dichos problemas fue la de Bruno y Martinón (1997) la cual se fundamenta en la distinción entre la estructura funcional y la forma semántica. La estructura funcional se refiere al tipo de situaciones numéricas (estados, variaciones y comparaciones) y la forma semántica al modo de expresar dichas situaciones numéricas.

Marco teórico

La clasificación contiene 11 categorías de problemas caracterizadas esencialmente por:

La estructura, referida a la simplificación mediante la cual, la redacción de un problema puede ser esquematizada de manera simbólica como una fórmula.

La posición de la incógnita, en un problema en que intervengan tres elementos se podrá determinar como elemento desconocido cualquiera de los tres. Para el caso del estudio realizado solamente se consideró la posición final de la incógnita.

El contexto, se le reconoce como el entorno de la realidad en el que se ubica un problema, esto, en el caso de problemas que incluyen números positivos y negativos comúnmente son situaciones en las que se observa la existencia de opuestos.

Dentro del lenguaje natural sea escrito o verbal, existen distintas maneras de expresar la misma situación, es decir, *pagar o abonar a una deuda* podrían ser equivalentes a restar *o disminuir parte de mi deuda*, de esta manera estas dos frases son *formas semánticas equivalentes*, es decir, son formas verbales que tienen el mismo significado.

Estas equivalencias de significado tienden un puente entre el lenguaje matemático y el lenguaje natural así mismo son una manera en que los estudiantes logran identificar la suma y la resta en los problemas. En el ámbito de los signados estas formas semánticas equivalentes se pueden observar en los siguientes enunciados, que son distintas formas de expresar "Juan tenía 3 más que Marcos": *Marcos tenía 3 menos que Juan*, *Juan tenía -3 menos que Marcos Marcos tenía -3 más que Juan.*

Las formas anteriores son irreales en el uso cotidiano ya que nadie expresaría en una plática "Marcos tenía -3 más que Juan" pero en la resolución de problemas se vuelven muy útiles para algunos estudiantes ya que vía estas formas de expresión oral o escrita otorgan cierto sentido a los números signados.

Antes de mostrar la clasificación de problemas, debemos aclarar los términos utilizados en los problemas.

Estado. Cuando un número se refiera a la representación de estado deberá de involucrar tres aspectos, un sujeto, una magnitud y una unidad de medida, por ejemplo: *"La temperatura en Durango es de -2°C"*, se observa claramente que el sujeto corresponde a la ciudad de Durango, la magnitud en cuestión es la temperatura y la unidad de medida son grados. Comúnmente al referirse a un estado la referencia del tiempo es el instante en que se expresa *e (t)*.

Comparación. Se establece como la diferencia existente entre dos estados que se refieren a la misma magnitud, por ejemplo, *"La temperatura en Acapulco es 10 grados mayor que en Querétaro"*, ($C_{ed}(t) = d(t) - e(t)$).

Variación. La variación de un estado se refiere a la comparación de esta misma función estado en momentos diferentes ($V_e(t,s) = e(s) - e(t)$). Como ejemplo de estos podría ser, "*Sergio tiene diez pesos por la mañana en el transcurso del día recibe cincuenta pesos, por consiguiente por la noche tiene sesenta pesos"*

La Tabla 1 muestra la estructura funcional y forma semántica, de la clasificación de problemas de Bruno y Martinón, junto con su estructura sintáctica. Acompañando a lo anterior viene un ejemplo de cada tipo de problema, los cuales fueron utilizados durante la fase experimental del estudio ya sea dentro la aplicación de los cuestionarios o entrevistas.

Tabla 1

ESTRUCTURA FUNCIONAL	FORMA SEMÁNTICA	PROBLEMA	ESTRUTURA SINTÁCTICA
$a(t) + b(t) = u(t)$	Combinación de estados	Karla compro 70 boletos de lotería de los cuales 38 no tienen premio. ¿Cuántos de los boletos si tuvieron	(+70)+(-38)=+32
$e(i) + v = e(f)$	Variación de un estado	El ascensor de un edificio se encuentra en el piso 2 del sótano si sube 18 pisos. ¿En qué piso se encuentra?	(-2) + (+18) = + 16
$e + c = d$	Comparación de estados	Carlos tiene $15. Juan tiene $4 menos que Carlos. ¿Cuánto dinero tiene Juan?	(+15)+(- 4)=+11
$v(i,m)+v(m\ f)= v(i, f)$	Combinación de variaciones sucesivas	La primera semana del mes realicé una compra de $40 con mi tarjeta de crédito. La tercera semana realicé un pago de $30¿Cuál es mi situación a fin de mes?	(-40)+(+30)=-10
$V_a(i,f)+V_b(i,f)=V_e(i,f)$	Combinación de variaciones	A Pedro le dieron $7 de domingo, en casa de su abuelos, más tarde en casa de sus tíos perdió $5 en volados con su primo Luís ¿Cómo quedó su cantidad de dinero de Pedro?	(+7) - (+5)=+2

$V_e(i, f) + c = V_d(i', f')$	Comparación de variaciones	Ayer, de la madrugada al medio día, la temperatura aumentó 10º y hoy aumentó 3º menos que ayer ¿Cuánto aumentó hoy?	(+10)+(-3)=+7
$V(i, f) + c = v_e(i', f')$	Variación de variaciones	El miércoles Diana perdió $ 5. El jueves Diana perdió $ 8 menos que el miércoles. ¿Cuánto perdió o ganó Diana?	(-5) - (-8) = (+3)
$C_{ed} + C_{dg} = C_{eg}$	Combinación de comparaciones adyacentes	Alejandro tiene 3 canicas menos que Maria, Diana tiene 7 más que Alejandro, ¿Cuántas canicas más tiene Diana que María?	(-3) +(+ 7) =(+ 4)
$C_{ag} + C_{bh} = C_{ed}$	Combinación de comparaciones	Rafael subió 3 pisos menos que Laura por las escaleras, pero subió 8 pisos más que Laura por el elevador ¿Cuántos pisos en total subió más Rafael que Laura?	(-3) +(+ 8) = (+5)
$C(i) + v = C(f)$	Variación de una comparación	El lunes Juan tenía $3 más que Marcos, el martes Marcos ganó $5 más que Juan ¿Cuánto más tiene el martes Marcos que Juan?	(- 3)+(+ 5) =(+ 2)
$C_{ed} + C = C_{gh}$	Comparación de comparaciones	Daniel tiene 2 pesos menos que Ernesto. Lo que Héctor tiene más que Gabriel es 5 pesos más de lo que tiene Ernesto que Daniel ¿Cuánto dinero tiene Héctor más que Gabriel?	(2)+(+5)=(+7)

La investigación intenta también identificar los significados que los estudiantes dan a los números signados basándonos en los niveles de aceptación de los negativos, mismos que fueron validados en problemas aparecidos en textos históricos así como en problemas resueltos por estudiantes actuales, Gallardo (2002). Estos niveles son los siguientes:

1. Número sustractivo. En este caso la noción del número siempre obedece a la magnitud. Esto es en la resta de dos cantidades a – b, siempre b será menor que a, donde a, b son números naturales, es decir, en este nivel el signo "–"solo tiene un carácter binario a nivel de sustracción.

2. Número relativo. Este nivel de aceptación se hace presente cuando un estudiante puede concebir la idea de opuestos, esto en situaciones discretas así mismo es un nivel que aparece cuando la idea de simétricos se manifiesta en situaciones continuas.
3. Número aislado. Este se presenta cuando un estudiante es capaz de aceptar un número negativo como la solución de una operación, de un problema o una ecuación.
4. Negativo formal. Aparece cuando el estudiante reconoce al número negativo como parte de un conjunto numérico en donde quedan incluidos tanto los positivos y los negativos así como sus propiedades, el cual se conoce como el conjunto de los enteros.

El estudio

Nos planteamos las preguntas de investigación:

¿Cómo lograr que los estudiantes representen problemas de estado, variación y comparación vía adición y sustracción de enteros?, ¿Cómo interpretan los estudiantes, en lenguaje cotidiano, los números signados dentro de relaciones aditivas?, ¿Cuáles son los problemas que presentan mayor dificultad?

Con el propósito de poder responder estas preguntas, analizamos el desempeño de 20 alumnos de 12 a 13 años, a los que durante su enseñanza regular sus profesores titulares les había enseñando a resolver problemas sencillos que involucran números signados. Estos alumnos resolvieron cuestionarios y algunos de ellos participaron en entrevistas individuales video grabadas donde abordaron situaciones aditivas en lenguaje natural, adiciones y sustracciones con números signados, así como también resolvieron e inventaron problemas pertenecientes a las 11 categorías de Bruno y Martinón.

En este artículo solamente se analizan algunos de los ítems que reflejan de manera más clara los trenes de pensamiento de los estudiantes analizados. A continuación se muestran algunos fragmentos de diálogos de diferentes estudiantes que ponen al descubierto de manera muy clara la aparición de forma semánticas equivalentes. La letra E se asigna al entrevistador y la A es para el alumno.

Fragmento 1

R1 E: Resuelve: (+5) - (-3)=

R2 A: Escribe: (+5)-(-3)=*+ 5 + 3* = 8

R3 E: ¿Qué diferencia ves entre este menos (+5) - (-3) y éste (+5) - (-3)?

R4 A: El primero es el que va a restar y el segundo le va a dar valor al tres de negativo.

R5 E: ¿Entonces hay dos signos menos o es el mismo?

R6 A: Hay dos, uno para el número y otro para la operación.

R7 E: Si yo te pongo 0 – (-1) =

R8 A: Esto quiere decir que al cero se le está restando un número negativo o sea que se sumaria.

R9 E: ¿por qué?

R10 A: *Por que es como si debieras algo pero te quitas esa deuda. Anota: Es como algo que debo y lo pago para no deber.*

Fragmento 2

R1 E: Inventa un problema que corresponda a la expresión: (-5) - (-2) =

R2 A: *El estudiante anota:* "Juan debe $5.00 pesos si paga $2.00 ¿Cuánto deberá ahora?"[Explica] Porque si debe $5.00 se está quitando una deuda de $2.00 ahora ya deberá menos es decir, se quita lo que debía.

R3 E: *Entonces quitar una deuda es equivalente a…*

R4 A: *A pagar*

R5 E: Tú crees que si tú le dices a un compañero tuyo "Juan debe $5.00 pesos si paga $2.00 ¿Cuánto deberá ahora?", ¿escribiría la operación (-5)-(-2) =?

R6 A: No

R7 E: ¿Tú que crees que anotaría tu compañero si tú le pones este problema?

R8 A: -5 + 2 =

R9 E: Entonces, ¿que cambiarías del problema para que pudiera escribir la operación (-5)-(-2)=?

R10 A: Diría, "*Juan debe $5.00 pesos si se quita una deuda de $2.00 ¿Cuánto deberá ahora?*"

R11 E: De esa manera si crees que escribiría la operación ***(-5)-(-2) =***

R12 A: Si

Fragmento 3

R1 E: Resolver: El miércoles Diana perdió \$ 5. El jueves Diana perdió \$ 8 menos que el miércoles. ¿Cuánto perdió o ganó Diana?

R2 A: El estudiante anota: (-5) – (-8) = 3

R3 E: Bien, ¿y este menos (-5) – (-8) = 3 de qué es?

R4 A: De lo que perdió.

R5 E: ¿Y éste? (-5) – (-8) = 3

R6 A: De que perdió ocho menos que el miércoles.

R7 E: Entonces ¿el primer menos de que perdió y el segundo es de menos que el miércoles?

R8 A: Si

R9 E: *Como perdió menos de lo que había perdido, ¿eso qué quiere decir?*

A: *Que ganó.*

Conclusiones

Con base en los resultados obtenidos, podemos afirmar que existe una relación entre la aceptación del número negativo, la forma semántica y el contexto de los problemas. Ahora bien, debido a que esta interrelación es compleja, el sujeto puede avanzar conceptualmente en una tarea pero no necesariamente en la siguiente.

Observamos que, la necesidad de inventar un problema correspondiente a la operación planteada, provocó en el estudiante la invención de problemas con formas semánticas distintas, en las que el sujeto acepta distintos niveles del negativo, a saber, como número sustractivo, número relativo y número aislado.

Por último es importante señalar que la transferencia del lenguaje verbal del enunciado del problema al lenguaje simbólico de las matemáticas, se ve deteriorada conforme las estructuras de los problemas se vuelven menos familiares al estudiante.

Ante esta disyuntiva, ¿qué hacer al respecto? Pensamos que la solución al menos parcialmente, se encuentra en la enseñanza. El profesor puede fomentar en el alumno el surgimiento de las formas semánticas equivalentes que aunque irreales en el lenguaje cotidiano, en la situación escolar provocan la emergencia con significado de los positivos y negativos, como podemos observar en el fragmento 1 en R10, en el fragmento 2 en R3, R4 y R10 y en fragmento 3 en R9.

Además, diversificar el contexto en los problemas genera nuevas formas semánticas. Vía estas directrices didácticas el estudiante logrará inventar problemas que lo conduzcan a situaciones más ricas que el muy familiar contexto monetario, dotando de nuevos significados a los enteros.

Referencias Bibliográficas

Bruno, A. y Martinón, A. (1997). Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos. *Educación matemática 9(1)*, México: Editorial Iberoamérica.

Carpenter, T.P. y Moser, J.M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. En T.P. Carpenter, J.M. Moser y T.A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 9-24). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). New York: Macmillan Publishing Company.

Gallardo, A. (2002). Qualitative analysis in the study of negative numbers. En L. Pig y A. Gutiérrez (Eds.) *Proccedings of the 20th PME International Conference 2*, 377-384.

Nesher , P. y Greno, J. (1983). Categorías semánticas de problemas verbales, una reconsideración. En F. Furinghetti (Ed.) *Proceedings of the 15th PME International*, 63-68.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of though involved in addition and subtraction problems. En T.P. Carpenter, J.M. Moser y T.A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 39-59). Hillsdale, NJ: Erlbaum.