EL LOGARITMO A PARTIR DE LA CUADRATURA DE UNA FUNCIÓN

Blanca Estela Nazario Vázquez, Marcela Ferrari Escolá
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero — México
will33303@hotmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología — Nivel: Superior

Resumen. *Nuestra hipótesis de investigación fue formulada en términos de asumir que mediante un proceso de integración de funciones, tomando como argumentación la covariación entre progresiones aritméticas y geométricas los estudiantes, a través de interactuar en distintos marcos (aritméticos, geométricos y algebraicos), construyen y reconstruyen diferentes significados, entre ellos, el de nuestro interés, lo logarítmico. Donde también se establece una cierta relación entre la derivada y la primitiva de una función (Teorema Fundamental del Cálculo) y a la par una caracterización de funciones escolares. Nuestras actividades las desarrollamos en un ambiente de geometría dinámica haciendo uso del software Cabri II Plus. Nuestro trabajo se desarrolla bajo la visión socioepistemológica y tomamos como metodología a la ingeniería didáctica.*

Palabras clave: áreas, curvas, logaritmo, covariación

Al analizar la presencia de los logaritmos en la escuela, tal como nos menciona Ferrari (2001), existe una “dislexia” entre la presentación aritmética y funcional de los logaritmos en el discurso matemático escolar propiciando cierto vaciamiento de significados de los mismos en los estudiantes. En general, los estudiantes realizan operaciones o cálculos con funciones mecánicamente, sin conocer la naturaleza de ésta, no le dan el significado esperado por los profesores a las expresiones, como en el caso de la función logaritmo.

Arrieta (2003) reporta que los estudiantes muchas veces se encajonan en lo *lineal*, prueba de ello es que cuando se les presenta una tabla de valores donde se les pide encontrar algún valor casi inmediatamente usan la regla de tres para cualquier caso, sin tener conciencia del tipo de crecimiento que está involucrado, quedándose en lo lineal y evidenciando por ejemplo lo cuadrático. Nos menciona que para construir un modelo numérico de lo lineal no sólo basta con manipular los datos de una tabla que describe un comportamiento lineal sino también distinguir lo que no es lineal, la contraparte.

De la propuesta que Ferrari (2001) hace de los logaritmos, buscando una aproximación a la construcción de los mismos, tomamos una parte que consideramos relevante, tanto para proveer al logaritmo de significados, como para reconstruir o construir algunos conceptos, por ejemplo, si tomamos como argumento principal la covariación entre progresiones aritméticas y geométricas, éstas permiten saber el tipo de función del que se está *hablando*, ya sea una polinómica o trascendente (logaritmo y exponencial). Entendemos en este trabajo a la covariación como la relación entre las variaciones simultáneas de dos cantidades. Nos interesa que se perciba el tipo de crecimiento que sufre cada uno de los elementos que intervienen y aceptar la íntima relación que se establece entre ambos.

En este estudio socioepistemológico de los logaritmos, éstos se escapan del comportamiento que siguen las funciones polinómicas, en las cuales al considerar su crecimiento numérico desde una tabla de valores, la presencia de progresiones aritméticas tanto en su dominio e imagen nos permite hablar de una función lineal, mientras si se recorre a la primera, segunda, etc. diferencia de las ordenadas, hablaríamos de una cuadrática, cúbica, etc. respectivamente. Mientras tanto si tenemos en *juego* progresiones aritméticas y geométricas tanto en el dominio e imagen, se trata de funciones trascendentes, en particular, del logaritmo y la exponencial.

El objetivo general de nuestra investigación es:

Que los estudiantes:

-Caractericen a las funciones polinómicas y trascendentes (logaritmo y exponencial) a partir de la covariación de las progresiones aritméticas y geométricas.

-Establezcan una relación entre la derivada y la primitiva de una función a través de la interacción con diferentes tipos de funciones.

Para ello realizamos una secuencia de actividades con dicho objetivo, la cual se llevó a cabo, como primer acercamiento en la ciudad de Mérida, Yucatán. A continuación se detallan las actividades, aunque cabe mencionar que en este caso no se tomó a las exponenciales, debido a que este objetivo fue ampliado con este tipo de funciones después de esta experiencia.

Análisis preliminar

Este análisis se toma del análisis socioepistemológico y exhaustivo que realiza Ferrari (2001,2004, 2007). De donde a través del análisis *didáctico* se reconoce la problemática en cuanto a que en los libros de texto la noción de logaritmo aparece escindida de su significado original, de las controversias y consensos que suscitó. Respecto al análisis *cognitivo* resulta interesante que ni los alumnos ni los mismos profesores cuentan con muchos argumentos para definir a los logaritmos. En el aspecto *epistemológico*, al analizar el devenir de los logaritmos en la historia, brinda una enorme riqueza, debido a que se vislumbran los obstáculos inherentes al concepto, además de conocer las practicas sociales que llevaron a su construcción, las cuales contribuyen enormemente para realizar un rediseño del discurso matemático escolar, entrando también el aspecto *social*.

Diseño de la situación didáctica y su análisis a priori

Una variable didáctica es un elemento de la situación que puede ser modificado por el maestro, y que afecta a la jerarquía de las estrategias de solución que pone en funcionamiento el alumno (por el costo, por la validez, por la complejidad, etc.) (Brian, 1996, citado por Ruiz Higueras, 2000). En este trabajo las variables didácticas que estarán en juego son las particiones en el eje *x*, es decir, las progresiones geométricas y aritméticas, ya que esto le permitirá al alumno reconocer la función resultante, validando cuales la describen *mejor*.

Se parte de tres actividades, en cada una se exploraran las siguientes funciones:

- La función constante $f(x)=1$.
- La función lineal $f(x)=x$.
- La función hiperbólica $f(x)=\frac{1}{x}$.

La idea de iniciar así, primero con funciones polinómicas, es para que los estudiantes se percaten como el logaritmo quiebra con ese patrón de crecimiento, con ese *juego* que se da entre las progresiones, que por lo tanto ya no se trata del mismo tipo de función, sino ahora se está en el campo de las trascendentes. Debido a que nos interesa la argumentación entre la covariación de las progresiones aritméticas y geométricas, creímos conveniente formar dos grupos de trabajo que exploraran alternadamente dichas progresiones, con la finalidad de generar un ambiente rico en discusión.

En la *actividad 1*, tomamos la función $f(x)=1$. Se plantea con la finalidad de que los estudiantes se familiaricen con el uso del software Cabri II Plus. También se pretende que los estudiantes comiencen a envolverse con los distintos marcos (geométrico, numérico y algebraico) para generar argumentaciones, además consideramos que es una función que les permite hacer una vinculación de estos marcos.

Se dan las instrucciones para la construcción de la curva y el cálculo de áreas. También se les da una tabla de valores, para percibir mejor la covariación entre las progresiones, estableciendo que encuentren ya sea la diferencia o razón en la columna de las *y*, según crean conveniente. Esto se hace también con las siguientes funciones.

La *actividad 2* se trata de la función $f(x)=x$, donde ya con un poco de manejo de Cabri, aproximarse al área que se encuentra bajo la curva, ya que se pretende que por lo menos se percaten que se trata de una función cuadrática. Además de que vayan vinculando la progresión que les permita hablar mejor de ese tipo de funciones, la progresión aritmética. Lograr establecer que de acuerdo a la posición de las progresión aritmética que les da como resultado, digan de que función se trata, ya sea lineal, cuadrática, cúbica, etc.

En la *actividad 3* se toma la función $f(x)=\frac{1}{x}$, con la que se busca *desequilibrar* la construcción que hasta el momento tienen, basada en la covariación entre progresiones aritméticas. Que se percaten que esta nueva función, el logaritmo, se escapa de este patrón de crecimiento. No se pretende que lleguen a la expresión algebraica como tal, pero se considera que es posible que los estudiantes logren percatarse que se trata del logaritmo, ya sea recordando el resultado de la integral, o debido a que ya pueden haber establecido que la función que les resulta es la primitiva y la derivada de esta última es la función de la que calcularon el área, por lo tanto pueden recordar que $\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$, *x>0.* Para finalmente establecer una diferencia entre las funciones polinómicas y trascendentes.

Experimentación

Impartimos un laboratorio didáctico en la XI Escuela de Invierno de Matemática Educativa realizada en Mérida, Yucatán, en donde se tomaron elementos de la geometría en un ambiente con Cabri II Plus, las funciones fueron sometidas a un proceso, la *integración*, tomándolo como "el área bajo la curva" basándose en progresiones aritméticas y geométricas, las cuales generan argumentos que permiten construir y reconstruir los significados que los estudiantes tienen de las funciones.

Este diseño de actividades surge de la tercera parte que Ferrari (2007) plantea como una de las fases para la construcción social del logaritmo. Es la etapa donde se plantea al logaritmo como *objeto teórico*, visto como la integral de la función $f(x)=\frac{1}{x}$. La construcción de la función logaritmo como la integral tomando como argumentación la covariación de las progresiones geométricas y aritméticas, contribuye a que los estudiantes identifiquen y diferencien al logaritmo de las funciones polinómicas, debido al patrón de crecimiento. Desde esta visión, partimos para la construcción de nuestras actividades, considerando que esto ayuda a que los estudiantes logren caracterizar a las funciones polinómicas y trascendentes, teniendo como argumento principal la covariación entre las progresiones aritméticas y geométricas. Además de lograr establecer la relación que existe entre la función graficada y la función obtenida, es decir, que los estudiantes se percaten que el "área bajo la curva de la derivada es la gráfica de la primitiva" (Aguilar, 2005).

La mayoría de los estudiantes que se inscribieron al laboratorio eran estudiantes de la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas. El laboratorio didáctico se llevó a cabo tres días con sesiones de aproximadamente 3 horas. En todas las actividades tomamos una función del tipo $f(x)=kx^n$ donde particularmente consideramos $k=1$ y $x\geq 1$, solicitándoles a los estudiantes argumentar sus respuestas.

Análisis a posteriori y validación

Presentaremos los resultados de las actividades, se ubicarán de acuerdo al tipo de progresión que manejaron.

Para la *primera actividad*, los estudiantes, en general, presentaron pocas dificultades, algunas cuestiones relacionadas con el software y con el significado de algunas simbologías de la tabla.

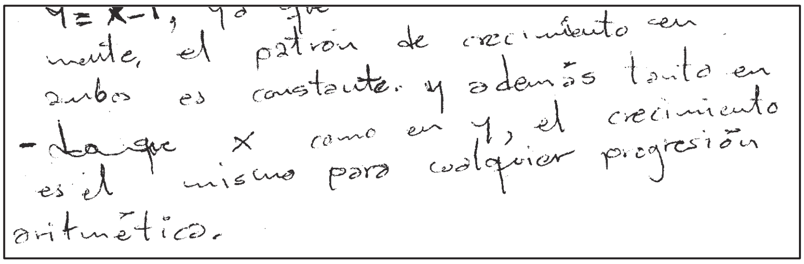


Figura 1

Para los estudiantes que tomaron una progresión aritmética, fue casi inmediato observar que se trataba de una función lineal menos una constante.

Los valores en la tabla les permitieron establecer sin muchos cálculos la expresión algebraica que describe dicho patrón de crecimiento.

Además logran percatarse de cómo crece cada columna y la relación entre ambas. En cuanto a los estudiantes que tomaron una progresión geométrica lograron percatarse de qué función se trataba, pero no hicieron hincapié en la progresión geométrica que les resultó, no teniendo aún elementos para caracterizarlas. Tanto los estudiantes que trabajaron con progresiones aritméticas y geométricas obtuvieron una expresión algebraica. *Figura 1.*

Respecto a la *segunda actividad* hubo más complicaciones para saber de qué función se trataba. A los estudiantes que trabajaron con la progresión aritmética no se les dificultó operar con ella y en consecuencia hallar la función, en este caso la cuadrática, consideramos que esto en parte se debe a que, generalmente en la escuela se trabaja con ese tipo de progresiones cuando se tabula y grafica. Mientras tanto los estudiantes que trabajaron con las progresiones geométricas presentaron dificultades para hallar la relación que existía en el crecimiento de cada variable, a pesar de ello un estudiante logró hacer un análisis muy interesante, como se describe a continuación.,

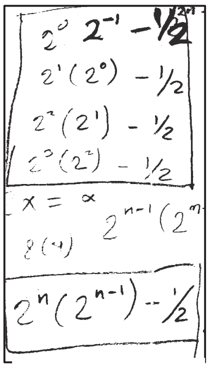


Figura 2

Este estudiante inició tomando valores en el eje de las *x* en progresión geométrica, logrando vincularlas a través de otro crecimiento una progresión aritmética con la cual iba obteniendo tanto los valores del dominio como los de la imagen, para después dejarlas en una sola función. Lo interesante de este caso es que logra relacionar a la progresión geométrica con otra, la cual se aproxima mucho a una progresión geométrica. *Figura 2 y 3.*

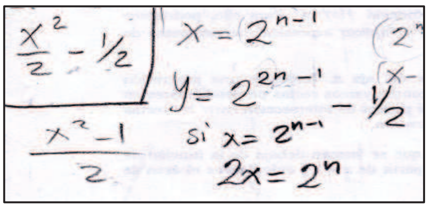
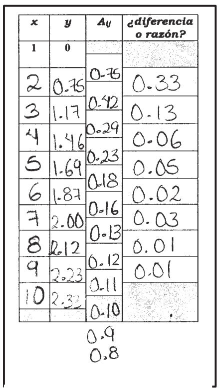


Figura 3

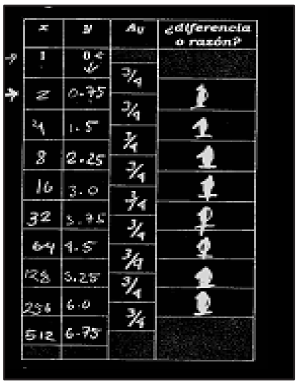
Respecto a la *tercera actividad* se percató un cierto *desequilibrio* debido a que en esta última actividad los estudiantes eligieron libremente con que progresión trabajar. Casi todos los estudiantes prefirieron la progresión aritmética, pero a estos estudiantes no les ayudó mucho tomar esta progresión ya que los valores obtenidos no presentaban algún patrón de crecimiento, por lo que solo se quedaron en la tabla de valores, no encontrando ninguna relación entre los valores de *x* y *y*. Presentándose así uno de los obstáculos previstos, debido a los diferentes patrones de crecimiento entre los tipos de funciones. *Figura 4.*



x	y	A_y	¿diferencia o razón?
1	0		
2	0.75	0.75	0.33
3	1.17	0.42	0.13
4	1.46	0.29	0.06
5	1.69	0.23	0.05
6	1.87	0.18	0.02
7	2.00	0.16	0.03
8	2.12	0.13	0.01
9	2.23	0.12	0.01
10	2.32	0.11	
		0.10	

0.9
0.8

Figura 4



x	y	A_y	¿diferencia o razón?
1	0		
2	0.75	3/4	1
4	1.5	3/4	1
8	2.25	3/4	1
16	3.0	3/4	1
32	3.75	3/4	1
64	4.5	3/4	1
128	5.25	3/4	1
256	6.0	3/4	1
512	6.75	3/4	

Figura 5

En cuanto a los estudiantes que tomaron una progresión geométrica, estos se sorprendieron al ver lo que les resultaba en las áreas, ya que obtuvieron una constante, teniendo así una progresión aritmética en la suma de áreas. Percatándose de que a diferencia de las otras funciones las cuales se describían mejor con las progresiones aritméticas en este caso era más apropiado tomar una progresión geométrica en el eje de las *x* y la cual traía como consecuencia una progresión aritmética en el eje *y*, teniendo así en *juego* dos progresiones distintas. *Figura 5.*

Varios de los estudiantes vincularon la integral de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ con el logaritmo, por ello es que sabían que esa era la función que relacionaba a la *x* y *y*, pero algunos argumentaron que no era fácil saber la expresión algebraica.

En general, los estudiantes argumentaron sorprenderse de los comportamientos entre las funciones, mencionando que jamás las habían tratado de esa manera. Hubo un quiebre importante en cuanto al tipo de progresiones que los estudiantes estaban acostumbrados a manejar, es decir, percibir que tomar intervalos en progresiones aritméticas para calcular el área bajo una curva no proporcionan mucha información para establecer la relación entre los patrones de crecimiento de la función logaritmo. Los argumentos que lograron dar son muy interesantes, aunque hubo algunas dificultades que fueron, desde la simbología y organización de la tabla, hasta dificultades de algunas nociones que nos interesaba que se enfatizaran más, es decir, como la idea de darle explícitamente mayor importancia a las progresiones para determinar cada tipo de función.

Reflexiones finales

Construir a las funciones desde esta perspectiva generó un ambiente rico, por un lado el uso del software Cabri II Plus, la participación por parte de los estudiantes, además de mirar al logaritmo como la cuadratura de una función, permitió a los estudiantes diferenciarla de las polinómicas, hallando a su vez otros argumentos para definirlas. Por los argumentos que se generaron en esta experiencia, observamos que los estudiantes establecen estas diferencias y además ciertas relaciones de los dos procesos de integral y derivada, haciendo inferencias para determinar la función resultante, considerando a su vez que al resultado no solo lo están contemplando como un número sino también como una función. A la par de realizar estas aproximaciones se percatan de que éstas son *mejores* cuando las particiones que se toman en el eje *x* son más pequeñas, tal como lo apoya Robutti (2003), cuando nos menciona que este tipo de acercamientos atiende la discontinuidad epistemológica, respecto al paso de finito al infinito, de discreto al continuo, marcado por la definición de la integral definida como el límite de sumas finitas. Tal como mencionamos anteriormente, con estas actividades se genera un quiebre entre lo escolarmente está construido, es decir, el manejo de progresiones aritméticas y el ingreso de progresiones geométricas, del cual se pretendía que a las primeras las asociaran al patrón de crecimiento que les da mayor información en las funciones polinómicas y que las segundas les provee de más argumentos para definir al logaritmo. Queremos recalcar que no pretendemos que se apropien del concepto de todas las funciones en sí, sino esto representa una parte de todo ese proceso, ya que como nos menciona Sierpinska (1992, citado por Ferrari, 2001), para decir que se entiende algo, debes establecer que es o que no es. En nuestro caso, se provee de algunos argumentos para decir cuando una función es de cierto tipo.

Referencias bibliográficas

Aguilar, M. (2005). Un estudio del teorema fundamental del cálculo en el contexto área bajo la curva En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18* (pp. 437- 443). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de la modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de Doctorado no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de Maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Ferrari, M. (2004). La covariación como elemento de resignificación de la función logaritmo. En L. Díaz (Ed.) *Acta Latinoamericana de matemática educativa 17* (pp. 45-50). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ferrari, M. (2007). *Construcción social del conocimiento matemático. La función logaritmo.* Memoria Predoctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Ferrari, M. & Nazario, B. (2007). Regresando a la geometría para construir funciones. En Red de Cimates (Eds.) *Resúmenes. XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. (p.11). México: Red de Cimates.

Robutti, O. (2003). *Real and virtual calculator: from measurements to definite integral*. Extraído en julio de 2007 desde http://www.didmatcofin03.unimo.it/pubblicazioni/TG9_Robutti_cerme3.pdf

Ruiz Higueras, L. (2000, julio). *Ingeniería Didáctica. Construcción y análisis de situaciones de enseñanza–aprendizaje*. Documento presentado en la XIV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Panamá, Panamá.