ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN MATEMÁTICAS

Edison De Faria Campos
Universidad de Costa Rica Costa Rica
edefaria@cariari.ucr.ac.cr
Campo de investigación: Resolución de problemas Nivel: Medio, superior

Resumen. *El propósito de este curso es el de compartir algunas reflexiones relacionadas con la estrategia metodológica de resolución de problemas matemáticos, revisar las ideas de Polya (1990), Schoenfeld (1985), del informe PISA, de la NCTM y especialmente el enfoque "Open-Ended" (Becker y Shimada, 2005) utilizado por los japoneses en el aula.*

También se describen aspectos históricos de la utilización de tecnologías digitales en el proceso de resolución de problemas, principalmente las estrategias utilizadas por investigadores en inteligencia artificial.

Palabras clave: resolución de problemas

Introducción

A partir de la década de los 60 la resolución de problemas ha recibido un enorme impulso, especialmente en la educación matemática. En el documento Agenda para la acción (1980) del Nacional Council of Teachers of Mathematics (NCTM), la resolución de problemas fue colocada como el foco de la educación matemática para la década de los 80. En los documentos elaborados por la NCTM en 1989 y en el 2000, la resolución de problemas recibió un destaque especial. En los estándares para la matemática escolar, la resolución de problemas es considerada como parte integral del aprendizaje de la matemática y se considera que los estudiantes de todos los niveles del sistema educativo deberían ser preparados para construir nuevos conocimientos matemáticos mediante la resolución de problemas; resolver problemas que aparecen en matemáticas y en otros contextos; aplicar y adaptar varias estrategias para resolver problemas; monitorear y reflexionar sobre el proceso de resolver problemas matemáticos.

Un importante concepto en resolución de problemas es el de heurística. Heurística son métodos exploratorios para resolver problemas y, utilizada como sustantivo, significa el arte o la ciencia del descubrimiento. Como adjetivo se refiere a cosas más concretas como estrategias heurísticas, reglas heurísticas, silogismos heurísticos. Son estrategias que guían el descubrimiento.

La noción de heurística se le atribuye a Pappus (300 D. C.). Él propuso una rama de estudios denominada "analyomenos" o "el tesoro del análisis" o "el arte de resolver problemas". En ciencias computacionales (ANSI/IEEE Estándar 100, 1984), heurística son métodos o algoritmos exploratorios durante la resolución de problemas en los cuales las soluciones se descubren por la evaluación del progreso logrado en la búsqueda de un resultado final (búsqueda heurística). Como adjetivo caracteriza técnicas por las cuales mejora en promedio el resultado de una tarea resolutiva de problemas. Se dice que hay búsqueda ciega, búsqueda heurística (basada en la experiencia) y búsqueda racional (usando inteligencia). La psicología ha propuesto que una heurística es una regla sencilla y eficiente para explicar cómo toman decisiones las personas, como llegan a un juicio o solucionan un problema. Puede considerarse como un atajo a los procesos mentales activos, ahorrando o conservando recursos mentales pero que puede conducir a errores en la toma de decisiones. Para Polya, vale la pena utilizar tales recursos aún considerando los riesgos mencionados. Su argumento es que si tomamos una conclusión heurística como una certeza entonces podemos equivocarnos y sentirnos engañados, pero si rechazamos completamente las conclusiones heurísticas entonces no lograremos hacer ningún progreso en el proceso de resolución del problema.

Lamentablemente, cuando un resultado matemático es publicado en revistas científicas, se oculta el razonamiento heurístico llevado a cabo por el matemático antes de obtenerlo. Pero, desde el punto de vista del aprendizaje, este razonamiento heurístico es bastante importante.

Polya presenta su teoría heurística a través de una serie de preguntas e instrucciones seguidas de varios ejemplos de problemas y propone el método de cuatro pasos para resolver problemas: comprender el problema; crear un plan; ejecutar el plan y finalmente examinar lo hecho (Polya, 1990). Posteriormente él publicó su obra "Matemáticas y Razonamiento Plausible" en dos tomos: en el primer tomo él presenta varios ejemplos de problemas resueltos mediante inducción o analogía mientras que el propósito del segundo tomo era el de determinar si existe o no una lógica de la inducción o un cálculo de credibilidad para las hipótesis y propone el siguiente silogismo heurístico: A implica B y B es verdadera entonces A es más digna de crédito, factible o plausible (Polya, 1966). Así, si $A \Rightarrow B$ y si logramos probar que B es verdadera, entonces, después de esa demostración, la conjetura A es más creíble que antes de la demostración de B, aunque no podemos garantizar que A sea verdadera. A este patrón Polya lo llama patrón fundamental inductivo.

Otra excelente obra de Polya con Szego consiste en los dos tomos de problemas y teoremas en análisis (Problems and theorems in análisis, 1976) con problemas que constituyen un verdadero reto para los lectores.

Con el desarrollo de la ciencia de la computación aumenta el interés en el proceso de resolución de problemas con la ayuda de las computadoras. Entre los primeros investigadores que intentaron construir programas inteligentes para resolver problemas se encuentran Newell y Simon (1959, 1972). Su primer programa conocido, el "Logic Theorist", intentaba demostrar afirmaciones utilizando reglas de la lógica de predicados. El éxito del programa fue enorme pues, en el caso de teoremas, lograba producir una demostración generalmente más directa, más corta que las encontradas en libros de lógica. En 1957 Simon y Newell crearon un programa computacional conocido por sus siglas como GPS (General Problem Solver), una máquina universal para resolver problemas. La idea es que cualquier problema que pudiera ser escrito en forma simbólica pudiera ser resuelto por la GPS: demostraciones de teoremas, problemas geométricos y juegos de ajedrez entre otros. Un problema se define como una situación en la cual un individuo desea hacer algo, pero desconoce el curso de la acción necesaria para lograr lo que quiere (Newell y Simon, 1972). El entusiasmo inicial debido al éxito de la estrategia se fue apagando, y no debido a la falta de capacidad computacional sino debido a la profundidad de los problemas teóricos. La dificultad fundamental es que estrategias para resolver problemas generales son limitadas. El ser humano utiliza conocimiento de dominio específico para resolver problemas en diferentes contextos mientras que el GPS tenía estrategias bastante generales pero débiles. Para fortalecerlo habría que agregar conocimientos de dominio específico para resolver problemas, posiblemente, de todas las áreas, lo que es una tarea imposible. En 1967, 10 años después de haber empezado, Newell anunció que el programa GPS había terminado. Debido a la dificultad de crear máquinas inteligentes de propósito general, una alternativa consiste en intentar desarrollar máquinas que imiten el desempeño humano en dominios restringidos del conocimiento. El primer intento serio de aplicar este enfoque alternativo se conoce como Micromundos. La teoría detrás de Micromundos fue el primer paso en el campo de la inteligencia artificial para producir inteligencia en un ambiente restringido. Otra línea de investigación fructífera en inteligencia artificial es la que trata de sistemas expertos que juegan algún tipo de juego, como por ejemplo el ajedrez. El caso más famoso fue el de Deep Blue, una computadora IBM que venció al campeón mundial Gary Kasparov. Este programa puede procesar 200.000.000 de movimientos antes de decidir la jugada que hará.

En la década de los ochenta del siglo pasado, Schoenfeld (1985) escribió una obra importante en el campo de resolución de problemas matemáticos. Él realizó experiencias con estudiantes y profesores en las que les proponía problemas a resolver. Los estudiantes tenían los conocimientos previos necesarios para afrontar su solución y los profesores tenían la formación previa para hacerlo. Schoenfeld observaba cómo actuaban los estudiantes y los profesores durante la resolución de problemas, los filmaba, grababa y anotaba sus observaciones. Un hallazgo de estos experimentos fue que las heurísticas planteadas por Polya no eran suficientes para tener éxito al resolver problemas y propuso cuatro estrategias necesarias para un resolutor de problemas de matemática: los recursos (conocimientos previos); las heurísticas; control (distribución de los recursos durante el proceso, la forma de utilizar la información para resolver el problema que incluye el monitoreo del proceso y la toma de decisiones. Un monitoreo no efectivo puede llevar al fracaso mientras que el proceso opuesto mejora la posibilidad de éxito) y el sistema de creencias (del profesor, de los estudiantes y las creencias sociales). Schoenfeld argumenta que las creencias acerca de la naturaleza de las matemáticas, la enseñanza, el aprendizaje, derivados de las experiencias en el aula o fuera de ella, influyen durante la resolución de problemas.

Algunas iniciativas actuales

El Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (Programme for International Student Assessment, PISA/ OCDE) cuyo objetivo primordial es el de desarrollar indicadores que expresen el modo en que los sistemas educativos de los países participantes han preparado a sus estudiantes de 15 años para desempeñar un papel activo como ciudadanos en la sociedad, contiene un dominio denominado Alfabetización Matemática (Mathematical Literacy) relacionado con la formulación y resolución de problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones (http://www.pisa.oecd.org/). Para ellos la resolución de problemas es una parte central del currículo explicitan las características de un problema matemático en este ámbito:

- Una situación contextualizada, ubicada en la realidad, que podría ocurrir en la vida del estudiante o bien una situación que el estudiante pueda identificar como importante para la sociedad. Utilizar y hacer matemáticas en una variedad de situaciones y contextos es un aspecto importante de la Alfabetización Matemática.
- Una situación que no puede ser resuelta mediante aplicaciones de procedimientos rutinarios que el estudiante haya estudiado o bien practicado en el aula y que

invite al estudiante a moverse entre distintas representaciones y a exhibir cierto grado de flexibilidad en la forma en que accede, administra y evalúa la información. Además es importante resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías.

- Requiere conexiones entre contenidos de diversas áreas.

En la evaluación utilizada en PISA 2003 se requirió que los estudiantes demostraran habilidad para comprender el problema, identificar las variables involucradas en el problema y sus interrelaciones; representar el problema mediante distintos registros de representación (tabular, gráfico, simbólico, verbal); resolver el problema, lo que requería tomar decisiones o diseñar un sistema pertinente o bien hacer diagnóstico y proponer una solución; proporcionar sentido a la solución matemática, en términos de la situación real inicial y, finalmente, comunicar la solución del problema, seleccionando para ello los medios y las representaciones apropiadas.

En la década de 1970 se impulsó en el Japón la investigación sobre resolución de problemas. Por lo general, los problemas tradicionales utilizados en matemática son de respuesta correcta única y son conocidos como “completos” o “cerrados”. Los problemas que permiten varias respuestas correctas o los que permiten el uso de varios métodos para obtener la única respuesta correcta se denominan “abiertos”. El enfoque “Open-Ended” utilizado en las escuelas japonesas consiste en (Becker y Shimada, 2005):

- Presentar un problema “abierto” a los estudiantes.
- Dar el tiempo apropiado para que ellos trabajen individualmente o en grupos en la búsqueda de las respuestas correctas al problema. La meta es que ellos logren encontrar algo nuevo en el proceso.
- Comparar las soluciones obtenidas, argumentar, buscar justificativas para las soluciones encontradas, discutir, formular preguntas.

Por lo general las lecciones en las instituciones educativas japonesas son desarrolladas alrededor de una única idea central que es cuidadosamente desarrollada y extendida.

El profesor, quién sirve de guía y soporte para los estudiantes en las etapas anteriores, busca nuevas ideas y cierra la lección con los aspectos teóricos, tomando en cuenta todos los aportes dados por los estudiantes. Las ventajas de este enfoque son: los estudiantes participan más activamente en las lecciones y expresan sus propias ideas; tienen más oportunidades para utilizar su conocimiento y habilidades matemáticas; se estimula la creatividad en el aula y el trabajo colaborativo entre los estudiantes; cada lección puede proporcionar ricas experiencias cognoscitivas a los estudiantes y sube el autoestima cuando un estudiante recibe la aprobación de sus colegas. La principal desventaja del enfoque consiste en la dificultad en diseñar problemas abiertos que sean interesantes y factibles de ser desarrollados en una lección.

Las principales características en una lección de matemática en escuelas japonesas son: relación explícita entre los temas tratados en la lección o en otras lecciones (mayor coherencia e integración cognoscitivas); más tiempo dedicado a temas matemáticos importantes; mayor tiempo de trabajo en actividades no rutinarias, nuevas soluciones, aplicaciones; más conceptos desarrollados que aquellos solo establecidos.

Conclusiones

En el curso tratamos con aspectos teóricos e históricos acerca de la resolución de problemas y planteamos varios tipos de problemas matemáticos, algunos de ellos son problemas que aparecieron en distintas olimpiadas matemáticas regionales o internacionales. También ejemplificamos tipos de problemas que siguen el enfoque “Open-Ended” utilizado en las escuelas japonesas.

Referencias bibliográficas

Becker, J., Shimada, S. (2005). *The Open-Ended Approach: A new proposal for teaching mathematics*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Nacional Council of Teachers of Mathematics (1980). *An agenda for action: Directions for school mathematics for the 1980s*. Reston, VA.

Nacional Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA.

Nacional Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM. Reston, VA.

Newell, A., Shaw, J. C., Simon, H. A. (1959). Report on a general problem-solving program. *Proceedings of the International Conference on Information Processing.* Pp. 256-264.

Newell, A., Simon, H.A. (1972). *Human problem solving.* Englewood Cliffs, N.J.:

Prentice-Hall.

Polya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Santos Trigo, L. M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. (Segunda edición). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Polya, G. y Szego, G. (1976). *Problems and theorems in análisis*. New York: Springer.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, USA: Academic Press.