SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE PROGRAMACIÓN LINEAL

María Rey Genicio, Clarisa Hernández, Silvia Forcinito
Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Jujuy Argentina
tresm@imagine.com.ar
Campo de investigación: Pensamiento algebraico y gráfico Nivel: Medio

Resumen. *Esta propuesta didáctica se sostiene en un Proyecto de Investigación, que tiene como marco teórico las diferentes Teorías Cognitivistas, los aportes de Bixio (1998), de Guy Brousseau (1986) y de Artigue, M., Douady, R. y Moreno, L. (1999). Pretende brindar al docente un material estructurado en forma clara, precisa y amena para la enseñanza del tema; no como algo prescriptivo sino como una propuesta que pueda ser reflexionada, es decir que oriente el análisis y los criterios de acción del profesor y le permita decidir entre alternativas y comprobar resultados. Está pensada para que el alumno resuelva las actividades en base a sus conocimientos previos y a la interacción grupal y comunique sus resultados en una puesta en común. La función del docente será la de institucionalizar los conocimientos puestos en juego.*

Palabras clave: secuencia didáctica, enseñanza, programación lineal

Consideraciones sobre la propuesta

En el marco del Proyecto de Investigación se ha desarrollado una propuesta didáctica para abordar el tema**:** Programación Lineal. Sintetizamos a continuación aportes teóricos y conceptos básicos que sustentan la misma desde diferentes fuentes.

Fuente psicológica.

Teorías Cognitivas: entienden que el aprendizaje efectivo requiere participación activa del estudiante en la construcción del conocimiento, ya que este proceso está mediado por procesos de pensamiento, comprensión y dotación de significado. La actividad de los alumnos es base fundamental para el aprendizaje mientras que la acción del docente es aportar las ayudas necesarias, estableciendo esquemas básicos sobre los cuales explorar, observar, y reconstruir conocimientos. En esos esquemas se articulan la información (aportada por docente, textos, materiales u otros alumnos) con las acciones cognitivas de los sujetos.

Interacción Socio–Cognitiva: la cognición humana óptima se lleva a cabo con la colaboración de otras personas y de objetos físicos y simbólicos que potencian las capacidades individuales. Así, los procesos grupales de construcción de conocimientos son medios altamente eficaces para un aprendizaje significativo, aunque requieren una intervención del docente muy cuidadosa, optimizando actividades, facilitando intercambios cognitivos, supervisando, recuperando oportunamente lo producido en cada grupo, y logrando la reorganización final de los conocimientos.

Didáctica general y Didáctica de la Matemática

Estrategia didáctica: según Bixio (1998), es un conjunto de acciones que realiza el docente con clara y conciente intencionalidad pedagógica. Algunos de sus componentes son el estilo de enseñanza, la estructura comunicativa de la clase, el modo de presentar los contenidos, las consignas, los objetivos y su intencionalidad, la relación entre materiales y actividades, los criterios de evaluación, etc. Las estrategias deben apoyarse en los conocimientos previos de los alumnos (significatividad), orientar la construcción de conocimientos a partir de materiales adecuados y ser factibles de desarrollarse en el tiempo planificado, con la cantidad de alumnos con que se cuenta y con la carga horaria destinada.

Ingeniería didáctica: elaboración de un conjunto de secuencias de clases concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo para efectuar un proyecto de aprendizaje, y para la que, en los análisis preliminares, se tuvieron en cuenta las dificultades y los errores más frecuentes de estos aprendizajes, las prácticas habituales para el tratamiento de este tema y los diferentes enfoques que presentan los libros de texto sobre el mismo. La concepción y el diseño de las actividades se encuadran dentro de la «Teoría de las situaciones didácticas» de Guy Brousseau (1986): proponer situaciones «adidácticas» en las que el docente no debe mostrar su intencionalidad ni intervenir indicando al alumno qué hacer; sino provocar que el alumno acepte la responsabilidad de la situación de aprendizaje. Estas situaciones, enfrentan a los alumnos ante un conjunto de problemas que evolucionan de manera tal que el conocimiento que se quiere que aprendan es el único medio eficaz para resolverlos. Intervienen las «variables didácticas» para que el conocimiento evolucione en niveles crecientes de complejidad, y las «recontextualizaciones» de los conceptos tratados en los distintos marcos le otorgan significatividad a la propuesta.

En la resolución de los problemas se espera que aparezcan distintas estrategias. También se sugieren puestas en común en las que se validen resultados, detecten errores, analicen distintas propuestas y representaciones utilizadas y elijan las más eficaces, debatan argumentaciones, identifiquen conocimientos puestos en juego, etc., a fin de que estos evolucionen en la totalidad del grupo de clase y converjan hacia el "saber" que se quiere construir.

Los problemas diseñados responden a las «condiciones del buen problema» enunciadas por Artigue, Douday & Moreno (1999): a) los enunciados tienen sentido en relación con los conocimientos previos; b) todos los alumnos están en condiciones de dar alguna respuesta, al menos para el problema inicial; c) admiten distintas estrategias de resolución y se pueden formular en distintos marcos. Y, principalmente, el conocimiento buscado es un conocimiento adaptativo en tanto es el medio científico de responder eficazmente a los problemas. Además se propone que en la puesta en marcha se cumplan las fases enunciadas por Douady en las que, dado el problema inicial: 1º– Se movilizan los objetos matemáticos conocidos para resolver el problema (Fase: Antigua). 2º– Se ponen en marcha instrumentos nuevos. Aparece el "nuevo implícito" (Fase: Búsqueda). 3º– Se hacen explícitos los conocimientos construidos en la fase anterior (Fase: Explicitación). 4º– El docente descontextualiza el conocimiento dándole la categoría de «objeto matemático» (Fase: Institucionalización). 5º– Se da a los alumnos diversos problemas destinados a provocar el funcionamiento como instrumentos explícitos de lo que ha sido institucionalizado (Fase: Familiarización – reinversión). 6º– El nuevo objeto es susceptible de convertirse en antiguo para un nuevo ciclo de la dialéctica instrumento-objeto (Fase:

Complejidad de la tarea o nuevo problema).

Propuesta didáctica

Se indicarán sólo algunos de los problemas propuestos en cada una de las actividades que se elaboraron. En cada actividad el docente institucionalizará, en el momento adecuado, los conocimientos puestos en juego.

Se comienza con una actividad introductoria cuyo objetivo es que el alumno se familiarice con el manejo de desigualdades que contienen una sola variable, para ello se proponen ejercicios de simbolización de inecuaciones sencillas que figuran en avisos y/o artículos aparecidos en diarios y/o revistas locales, la representación e interpretación gráfica en la recta real y por último la contextualización mediante una situación real de una inecuación dada.

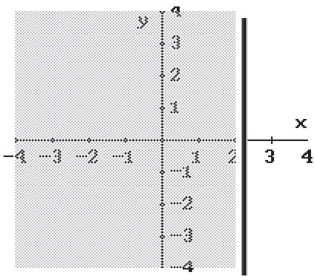
De la siguiente actividad se indican solo algunos de los ejercicios, en ella se incluyeron problemas abiertos a múltiples respuestas, para que el alumno se desprenda de la concepción de que un problema matemático tiene una respuesta única. También se pretende que el estudiante relacione inecuaciones con situaciones de la vida real.

Actividad

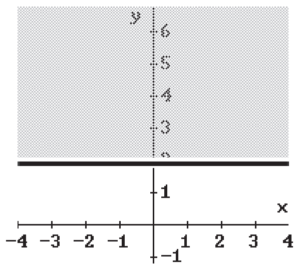
1. *El artículo más económico que produce una empresa tiene un costo de $2. a) Simboliza la desigualdad expresada en el enunciado, llamando C al costo de cada artículo. b) En un sistema de ejes coordenados cartesianos, en el eje horizontal se representan los costos de los distintos productos y en el eje vertical la ganancia correspondiente a cada producto, que siempre es positiva. Escribe las coordenadas de 5 posibles puntos que verifiquen la desigualdad dada en a) y luego represéntalos en dicho sistema. c) Mediante un sombreado, representa en el plano la desigualdad expresada en a).*

2. *Expresa mediante una inecuación cada una de las representaciones gráficas dadas*

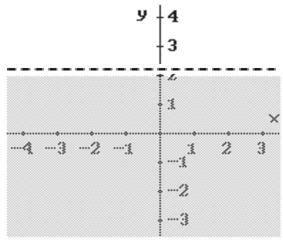
a)



b)



c)



3. *Representa en un sistema de ejes las siguientes inecuaciones:*

a) $x \geq 3$ *b)* $y \leq 1/2$ *c)* $x < -1$ *d)* $y \geq 0$

4. *Una heladería vende 2 tipos de helados A y B. La ganancia que obtiene por la venta de 1 Kg. de helado tipo A es de \$ 2 y la que obtiene por la venta de 1 Kg. tipo B es de \$ 3. El dueño de la heladería quiere obtener una ganancia de \$ 21.*

a) Simboliza el enunciado llamando ***x*** *a los Kg. de helados vendidos del tipo A e* ***y*** *a los del tipo B. b) Representa gráficamente en un sistema de ejes la ecuación obtenida en a). c) Si vende 7 Kg. de helado tipo A ¿cuántos Kg. de helado tipo B debería vender? d) Si vende 600 gr. de helado tipo B ¿cuántos Kg. debe vender del tipo A?*

5. *Suponga, que en el problema anterior, ahora el dueño de la heladería quiere obtener una ganancia mínima de \$ 21.*

a) Simboliza ahora el enunciado del problema. b) Conteste los ítems c) y d) enunciados en el ejercicio anterior. c) Podría vender 5 Kg. de helado tipo A y 6 Kg. del tipo B?. d) Podría vender 1/2 Kg. de helado tipo A y 5 Kg. del tipo B?. e) Propone otra solución posible para la *venta de helados. f) Representa en un sistema de ejes, la región correspondiente a la desigualdad simbolizada en el inciso a).*

En la actividad recién enunciada, se incluye además una variada ejercitación donde, por ejemplo, el alumno debe identificar puntos cuyas coordenadas satisfagan inecuaciones dadas, decidir si un punto pertenece o no a una región, dada la representación gráfica obtener la inecuación que le corresponde, etc.

La siguiente actividad tiene por finalidad, por un lado, que el alumno aprenda a representar en el plano un sistema de inecuaciones lineales, identificando la región solución del sistema y determinando las coordenadas de los vértices de dicha región y por otro lado, que dada una región pueda plantear el sistema de inecuaciones cuya solución sea la región dada

Actividad

1. *Retoma el problema 5 de la actividad anterior y considera además que en la heladería se venden como máximo 5 Kg. de helado tipo B.*

a) Plantea la nueva desigualdad correspondiente al problema. b) ¿Podría vender 7 Kg. de helado tipo A y 1 Kg. de helado tipo B?. c) ¿Podría vender 2 Kg. de helado tipo A?. d) ¿Cuántos Kg. de helado de tipo A podría vender como mínimo? e) Realiza nuevamente el gráfico correspondiente al problema 6, y en el mismo sistema representa la inecuación hallada en el ítem a). f) Identifica la región del gráfico que corresponde a la solución del problema e indica 3 soluciones posibles, distintas a las ya vistas. g) Plantea un sistema con todas las inecuaciones que intervienen en el problema

2. *Dado el siguiente sistema de inecuaciones:* $y < 2 + x$; $y \geq -x - 4$

a) Representa la región solución del sistema. b) Indica si los siguientes puntos pertenecen o no a la región que corresponde a la solución del sistema dado: P_1 *(0 ,−5) ;* P_2 *(1, 2);* P_3 *(5,*

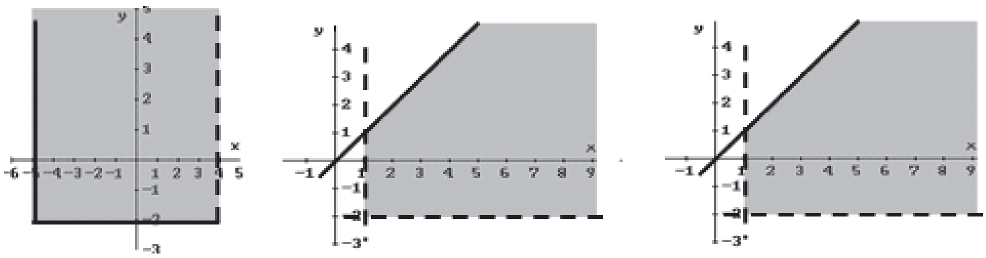
−9) ; P_4(8, 10) c) Completa el valor de x o y, según corresponda, para que los puntos indicados sean solución del sistema: P_1 (4 ,) ; P_2 (, −1.3) ; P_3 (, 9) ; P_4 (8.7 ,)

3. *Dado el siguiente sistema de inecuaciones: $x \leq 3$; $y + x > 0$; $2y + x \leq 10$*

a) Representa la región solución del sistema. b) Indica si los siguientes puntos pertenecen o no a la región que corresponde a la solución del sistema dado: P_1 (−4 , 3) ; P_2 (−2; 3) ; P_3 (3 , −3) ; P_4 (2, −1) c) Completa el valor de x o y, según corresponda, para que los puntos indicados sean solución del sistema: P_1(0 ,) ; P_2(, 1/2) ; P_3(−7.4 ,);P_4 (, 6.2)

4. *Dados los siguientes gráficos:*

i) ii) iii)



a) Escribe un sistema de inecuaciones que tenga como solución la región sombreada.

b) Determina las coordenadas de los vértices de cada una de las regiones

La secuencia continua con una actividad que incluye problemas concretos de programación lineal. Si bien el alumno explícitamente no sabe que está usando una función objetivo y resolviendo un problema de programación lineal, podrá reconocer que hay una función en la que intervienen dos variables que se debe optimizar.

Actividad

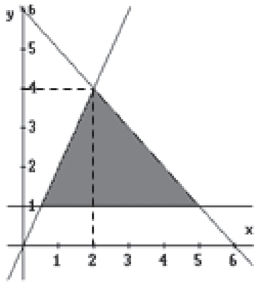
1. *Estela recibe $ 11 para comprar lapiceras y carpetas, con la consigna de que no necesariamente gaste toda la plata. En la librería de su barrio le ofrecen las lapiceras a $2 cada una y las carpetas a $3 cada una.*

*a) ¿Podría con ese dinero y en esa librería, comprar**:** i) 1 carpeta y 1 lapicera? ; ii) 2 lapiceras y 3 carpetas? ; iii) 4 lapiceras y 1 carpeta? b) Plantea un sistema con las desigualdades involucradas en el enunciado, para ello llama **C** al número de carpetas y **L** al número de lapiceras. c) Representa la región correspondiente al sistema y marca en el gráfico sus soluciones. d) Lista todas las soluciones del problema.*

2. *Un negocio vende mermelada de frutilla y de naranja. La estadística muestra que se vende como mínimo el doble de mermelada de frutilla que de naranja. Ahora, por razones de espacio, a lo sumo pueden tener un stock de 15 frascos, de los cuales por lo menos 5 deben ser de frutilla y 2 de naranja.*

a) Escribe el sistema de restricciones del problema. b) Grafica la región factible. c) Si hay 10 frascos de frutilla, ¿cuántos frascos de mermelada de naranja puede haber? d) En el gráfico donde representaste la región factible, marca todos los puntos correspondientes a las soluciones posibles y luego escribe las coordenadas de dichos puntos. e) Si la ganancia que se obtiene por la venta de la mermelada de frutilla es de $ 0,40 por cada frasco y de $0,50 por la de naranja, escribe una fórmula que exprese la ganancia, en función de los frascos vendidos de ambas mermeladas. f) Indica cuál será la ganancia para cada una de las soluciones posibles. g) Determina cuántos frascos de cada una de las mermeladas se deben vender para que la ganancia sea máxima. h) Observa el gráfico e indica dónde se ubica el punto que corresponde a la cantidad de frascos vendidos que producen la ganancia máxima.

3. *El siguiente gráfico, representa la región factible correspondiente a un sistema de restricciones. Considerando que x e y son enteros:* *a) Encuentra el sistema de restricciones. b) Determina todas las soluciones del sistema y marca, en el gráfico, los puntos correspondientes. c) Si la función objetivo es f (x, y) =x+ y , indica el valor de dicha función para cada solución del sistema. d) Determina cuál de todas las soluciones minimiza la función objetivo y cuál la maximiza. e) Observa el gráfico e indica dónde se ubica el/los puntos que corresponden a la solución que minimiza la función y dónde se ubica el o los puntos que corresponden a la solución que maximiza la función.*



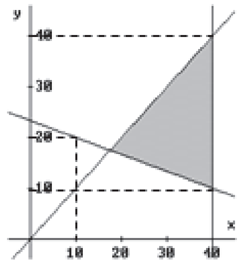
4. *Una industria vinícola produce vino y vinagre. El doble de la producción de vino es siempre menor o igual que la producción de vinagre más cuatro litros. Por otra parte, el triple de la producción de vinagre sumado con cuatro veces la producción de vino se mantiene siempre menor o igual a 17 litros. Sabiendo que cada litro de vino deja un beneficio de $2,5 y cada litro de vinagre $1,4:*

a) Plantea el sistema de restricciones. b) Grafica la región factible. c) Determina todas las soluciones posibles y marca en el gráfico los puntos correspondientes. d) Determina el beneficio para cada una de las soluciones. e) Halla el número de litros de cada producto que se deben producir para alcanzar un beneficio máximo. f) Observa en el gráfico e indica dónde se ubica el punto que corresponde al beneficio máximo.

La secuencia prosigue con una actividad cuyo objetivo es que el alumno se familiarice con la aplicación de programación lineal y aprecie la diversidad de problemas donde se puede utilizar. Hay problemas que tienen soluciones múltiples, otros cuya región factible es una región no acotada y otros donde intervienen tres variables, que luego se reducen a dos, lo que lo hace de una complejidad mayor. Para esta actividad sería conveniente que el profesor forme grupos y distribuya uno o dos problemas a cada uno de ellos y luego, en una puesta en común, cada uno de los grupos comunique a sus compañeros las resoluciones.

Para finalizar la secuencia, se incluye una actividad de familiarización (se indican solo algunos de los ejercicios)

Actividad



1. *El siguiente gráfico representa la región factible de un sistema de restricciones.*

a) Escribe el sistema de restricciones. b) Plantea un problema donde el sistema de restricciones sea el indicado en a). c) Indica tres soluciones posibles al problema planteado. d) Determina las coordenadas de los vértices del triángulo correspondiente a la región factible.

2. *Representa, siempre que sea posible, la solución del siguiente sistema de restricciones:* $y \leq 2x + 6$; $y \leq -x$; $x \geq 0$; $y \geq 1$

3. *En el sistema de restricciones del ejercicio anterior, elimina sólo una de las inecuaciones para que tenga solución no vacía.*

4. *Dado el siguiente sistema:* $x + 4y \leq 16$; $x + 2y \leq 10$; $2x + y \leq 14$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

a) Represéntalo gráficamente. b) Con las restricciones anteriores encuentra el máximo de la función $f(x, y) = 3x + 5$. *c) Discute si el resultado obtenido en el apartado b) seguiría siendo el mismo al añadir la condición* $x \leq 5$

Conclusión

Las actividades diseñadas responden a las "condiciones del buen problema" ya enunciadas. En toda la secuencia se enfrenta a los alumnos a un conjunto de problemas que evolucionan de manera tal que el conocimiento que se quiere que aprendan es el único medio eficaz para resolverlos, al mismo tiempo las variables didácticas se hacen variar para que el conocimiento evolucione en niveles crecientes de complejidad.

En la implementación del diseño se observó que la mayoría de los alumnos mostraron mayor entusiasmo y compromiso con la tarea, y que algunos otorgaron valor al hecho de implicarse en una construcción que les permitió otorgar significado al conocimiento

Referencias bibliográficas

Artigue, M., Douady, R. y Moreno, L. (1999). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. D. F., México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bixio, C. (1998). *Enseñar y aprender*. Buenos Aires, Argentina: Homo Sapiens.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*. Córdoba, Argentina: FAMAF.

Carione, N., Carranza, S., Diñeiro, M., Latorre, M. y Trama, E. (1995). *Matemática 3*. Buenos Aires, Argentina: Santillana

Davini, M. (1997). *La formación docente en cuestión: política y pedagogía*. Buenos Aires, Argentina: Paidos.

Larson, R.; Hostetler, R. y Neptuno, C. (2000). *Algebra Intermedia* (2ª ed.). D.F., México: McGraw–Hill.

Macnab, D. S. y Cummine, J. A. (1992). *La enseñanza de las matemáticas de 11 a 16.* Madrid, España: Visor.

Santaló, L. (1995). *Matemática 3*. Buenos Aires, Argentina: Kapelusz.

Seveso de Larotonda, J. Wykowski, A. y Ferrarini, G. (1998). *Matemática 9*. Madrid, España: Kapelusz.