

## Grupo Pensamiento Numérico Universidad de Granada.

### Objetivos e Hipótesis de Investigación de Tesis Doctorales hasta el año 1999

Dr. L. Rico.

#### DEFINICIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Componentes que estructuran el marco teórico del problema.

Tipo de estudio que se quiere realizar.

Racionalidad del estudio.

Conjeturas que se quieren contrastar.

Hipótesis de la investigación.

"Los objetivos de una investigación dan paso a los *interrogantes* que definen de forma precisa el Planteamiento de un problema de investigación. Estos interrogantes constituyen una guía para el enunciado de las *hipótesis de investigación* que son explicaciones posibles o provisionales que tienen en cuenta los factores, sucesos o condiciones que el investigador procura comprender. En éstas hipótesis se incluyen hechos que trascienden los elementos conocidos para dar explicaciones plausibles de las condiciones desconocidas. Al relacionar los hechos conocidos con las conjeturas formuladas acerca de las condiciones ignoradas, las hipótesis, tanto si son confirmadas como rechazadas, incrementan el conocimiento." (Segovia, 1995)

Las hipótesis de investigación dan forma al problema de investigación en términos del marco teórico y del marco metodológico con el que se aborda. Las hipótesis expresan conjeturas que proporcionan algún modo de explicación del fenómeno en estudio y cuya verificación o rechazo profundiza el conocimiento sobre el campo en estudio. La o las hipótesis expresan, en términos estrictos, la globalidad del problema que se quiere estudiar. Por tanto, deben avanzar interpretaciones sobre una cuestión cuya respuesta no se conozca y que tenga interés intrínseco, cualquiera que ésta sea, por razón de que se quiera aumentar el conocimiento sustantivo sobre el campo en estudio mejorando la información disponible sobre el mismo.

La o las hipótesis tienen que enunciar con claridad y precisión el problema que se quiere estudiar.

Deben evitarse:

- \* los enunciados circulares, imprecisos o mal redactados;
- \* los enunciados que manifiestan vinculación personal del investigador con alguna de las posibles opciones de respuesta al problema;
- \* los enunciados amplios que diluyen la cuestión planteada;
- \* la redacción de los enunciados con posterioridad a la realización del trabajo.

## TESIS REALIZADAS EN EL CRUPO PENSAMIENTO NUMÉRICO Y ALGEBRAICO

1 Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales” , realizada por D<sup>a</sup> Encarnación Castro, defendida el 13-VI-94.

2 “Niveles de Comprensión en Problemas Aritméticos de Comparación Multiplicativa”, realizada por D. Enrique Castro, defendida el 28-VI-94.

3 “El Campo Conceptual de los Números Naturales Relativos”, realizada por D. José Luis González Marí, defendida el 22-VI-95.

4 “Estimación de Cantidades Discretas: estudio de Variables y Procesos”, realizada por D. Isidoro Segovia Alex, defendida el 29- IX- 95.

5 “La Introducción al Número Real en Secundaria”, realizada por D<sup>a</sup> Isabel Romero Albadalejo, defendida el 27- X-95.

6 “Razonamiento Inductivo Numérico. Un estudio en Educación Primaria”, realizada por D. Alfonso Ortiz Comas, defendida el 17- X- 97.

7 “Evaluación de Competencias en Algebra Elemental a través de Problemas Verbales”, realizada por D. Francisco Fernández García, defendida el 3-XI-97.

8. Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación", realizada por D. Jose M<sup>a</sup> Gairín Sallán, defendida el 13 de marzo de 1999.'

9. "Marco conceptual y creencias de los profesores sobre evaluación en matemáticas", realizada por D. Francisco Gil Cuadra, defendida el 9- XII-99.

## OBJETIVO GENERAL Y OBJETIVOS PARCIALES

Encarnación Castro, EPN, Apdo. 16, Cp. 1:

"Hemos situado nuestro estudio dentro del campo de la innovación curricular y para ello hemos organizado nuestro trabajo considerando dos niveles de reflexión sobre el currículo:

\* actuación en el aula, con objetivos, contenidos, metodología y evaluación como componentes;

\* planificación del sistema, donde las componentes consideradas han sido alumnos, profesor, conocimiento y escuela; junto con las relaciones entre las componentes mencionadas del sistema currículo.

Tres son las relaciones que centran nuestro trabajo:

\* las **relaciones de comunicación profesor-alumno**, mediante las que se concreta el proceso de enseñanza y se presentan los conocimientos de una manera organizada que los dota de significado;

\* las **relaciones del profesor con el conocimiento matemático**, que se ponen de manifiesto en una determinada selección y planificación, en una adecuada organización y secuenciación de tareas, mediante las que ayudar a los alumnos a construir su conocimiento sobre el tópico estudiado;

\* las **relaciones del alumno con el conocimiento matemático**, que se manifiestan en cada caso por la comprensión alcanzada sobre los conceptos, hechos, procedimientos y representaciones del tópico estudiado.

Para precisar el marco conceptual con el que abordamos nuestro trabajo hemos comenzado señalando algunas prioridades en los cambios curriculares actualmente en curso, así como algunas incoherencias; una de estas incoherencias es la carencia de un sistema adecuado de representación para el estudio de las sucesiones y es esta idea la que sirve de punto de partida al trabajo.

La segunda aproximación se hace desde la psicología cognitiva y, más en particular, desde la teoría del procesamiento de la información. Nos hemos centrado en una revisión de los estudios hechos sobre cognición matemática relativos a modelos y sistemas de representación con los que se aborda el análisis de la enseñanza/ aprendizaje de las matemáticas y, muy en especial, los fenómenos de comprensión del conocimiento matemático y su valoración; no hemos pretendido, por supuesto, hacer una revisión exhaustiva de la cognición matemática, ni siquiera resumidamente.

Debido a la naturaleza del contenido con el que vamos a trabajar, destacamos la relevancia cognitiva de algunas nociones, tales como patrón, inducción, iteración y recursión y, muy en especial, la noción de modelo.

La revisión de estudios previos e investigaciones la hemos hecho en base a tres trabajos fundamentales: las investigaciones de Krutetskii, la tesis de Presmeg y la tesis de Suwarsono; aunque estos estudios se orientan al campo de la resolución de problemas realizan un análisis exhaustivo del pensamiento y la habilidad matemática, en especial de la visualización, que constituye una componente relevante para nuestro estudio.

Una tercera pieza en el marco que define este trabajo es la delimitación conceptual dentro de las matemáticas. Nuestro tema de trabajo pertenece al álgebra clásica y es un tópico que no se presenta en el currículo de ninguno de los niveles del sistema educativo español ni tampoco, por lo que conocemos, en ninguno de los países de la Unión Europea ni en los Estados Unidos; sí se encuentran referencias en libros de historia, de curiosidades matemáticas y en trabajos sobre resolución de problemas y pensamiento creativo.

Uno de los objetivos de este estudio es: hacer una propuesta curricular para alumnos de los dos primeros cursos de Secundaria (12-14 años) mediante la que trabajar los patrones numéricos y las sucesiones a partir de las configuraciones puntuales. Esto nos ha llevado a contemplar los números figurados como sistema simbólico estructurado para la representación de números y análisis de algunas propiedades. De nuevo tuvimos otra posibilidad: hacer un estudio de carácter semiótico de este nuevo sistema, posibilidad que no hemos abordado por no considerarla prioritaria en este momento y que, seguramente, podrá considerarse en algún próximo trabajo.

Al comenzar nuestro estudio no conocíamos en toda su extensión la riqueza de implicaciones que tiene el tema que hemos abordado; por ello, en más de una ocasión nos hemos tenido que esforzar por no abrir nuevas líneas de reflexión y estudio, manteniendo el proyecto de partida.

Nuestro proyecto de trabajo se resume en una propuesta de:

- \* integrar el sistema de representación de los números naturales, denominado configuración puntual, con el sistema decimal de numeración y con el desarrollo aritmético de estos números;
- \* trabajar con secuencias numéricas lineales y cuadráticas, analizando el patrón que las define mediante los modelos puntuales y los desarrollos operatorios;
- \* trabajar los procedimientos de continuar una secuencia, extrapolar términos, generalizar y expresar el término general y utilizar el término general en la obtención de términos concretos.

Las referencias de nuestro estudio están en:

- \* una teoría curricular y un marco de innovación y reforma del currículo de matemáticas;

- \* un marco de estudio e investigación sobre cognición matemática, en el que las nociones de modelo, visualización y comprensión son términos clave;
- \* un tópico matemático, delimitado por un sistema de representación ampliado, unos objetos matemáticos y unos procedimientos que delimitan, conjuntamente, la estructura matemática estudiada."

### Enrique Castro, NCPV, Apdo 1.8

"La finalidad de este trabajo es estudiar la comprensión de los niños en problemas verbales de comparación multiplicativa en los dos últimos años de Educación Primaria: 5º y 6º (10-12 años de edad).

Perseguimos cuatro objetivos particulares. El primero es examinar si distintos tipos de problemas verbales de comparación multiplicativa tienen igual índice de dificultad para los niños de 5º y 6º de Educación Primaria: 5º y 6º (niños de edad comprendida entre 10 y 12 años). Los problemas que hemos utilizado se diferencian en dos variables de tarea: la cantidad desconocida en el esquema de comparación y en la expresión lingüística utilizada para enunciar la comparación. La pregunta que hemos planteado al respecto es:

1. *¿Influyen las variables "cantidad desconocida en el esquema de comparación" y "expresión lingüística utilizada" en la dificultad de comprensión de los problemas verbales simples de comparación multiplicativa en niños de 5º y 6º de Educación Primaria?*

El segundo objetivo del estudio es hacer una descripción de los errores que cometen los niños de 5º y 6º de Enseñanza Primaria cuando resuelven problemas verbales de comparación multiplicativa. La pregunta que hemos planteado al respecto es:

2 *¿Qué errores cometen los niños de 5º y 6º de Enseñanza Primaria cuando resuelven problemas verbales simples de comparación multiplicativa?*

El tercer objetivo es describir la asociación entre los tipos de errores que cometen los niños y las variables de tarea utilizadas para definir los problemas. La pregunta que planteamos al respecto es:

3 *¿Cómo se asocian las variables de tarea "cantidad desconocida en el esquema de comparación" y "expresión lingüística" con los tipos de errores que cometen los niños de 5º y 6º de Enseñanza Primaria?*

El cuarto objetivo es categorizar a niños de 5º y 6º de Enseñanza Primaria en función de su comprensión de los problemas verbales simples de comparación multiplicativa definidos en función de las dos variables de tarea consideradas. La pregunta que nos hacemos al respecto es:

4 *¿Qué niveles de comprensión alcanzan los niños de 5º y 6º de Enseñanza Primaria en problemas verbales simples de comparación multiplicativa?"*

### José L. González, CCN, Apdo. 2.2

#### **2.2.1 Objetivo General**

El propósito general de la investigación es **clarificar, describir y organizar, a partir de las consideraciones epistemológicas, cognitivas, fenomenológicas y didácticas, el campo conceptual de los números naturales relativos.**

Mediante la consecución de este objetivo nos proponemos dar respuesta satisfactoria a los interrogantes planteados en el campo de aplicación de los números naturales relativos y números enteros, subsanar deficiencias detectadas tanto en el diseño y desarrollo curriculares como en los estudios sobre resolución de problemas aditivos de enunciado verbal e integrar los diferentes

planteamientos existentes, proporcionar un marco en el que se puedan formular explicaciones plausibles sobre el origen y condiciones de ocurrencia de los errores y dificultades en el aprendizaje que se han constatado en otras investigaciones, proponer fundamentos para un diseño curricular coherente y completo sobre el dominio organizado y, por último, aportar bases sólidas sobre las que desarrollar futuras investigaciones en Pensamiento Numérico Relativo.

### 2.2.2 Objetivos específicos.

Para la consecución del objetivo general, planteado en el apartado anterior, se han de cubrir una serie de objetivos específicos sobre diferentes aspectos puntuales, que contribuyen a la consecución de dicho propósito central.

Desde un punto de vista más concreto, la investigación pretende:

- a) Identificar, en el campo conceptual aditivo, los diferentes tipos de cantidades, números y medidas discretas y las relaciones que se establecen entre ellas.
- b) Poner de manifiesto la insuficiencia de los conceptos numéricos usuales para el tratamiento aditivo y ordinal de la totalidad de las situaciones y problemas del dominio.
- c) Establecer, con base en argumentos epistemológicos, cognitivos, didácticos y fenomenológicos, la necesidad de un tercer tipo de números que venga a cubrir carencias detectadas y definir tales números.
- d) Identificar y formular las diferencias estructurales y lógico-formales existentes entre los tres tipos de números (naturales, naturales relativos y enteros).
- e) Construir un modelo teórico (campo conceptual de los naturales relativos), que cumpla las siguientes funciones: integrar los elementos y relaciones en juego; ajustarse al dominio establecido; permitir una nueva clasificación de las situaciones y problemas considerados; explicar de forma plausible resultados de otras investigaciones; ser punto de partida para futuras investigaciones sobre el tema.
- f) Proporcionar evidencia empírica a favor del nuevo campo conceptual, la bondad del modelo construido y la idoneidad de las interpretaciones y clasificaciones que de él se derivan.

### 2.2.3 Objetivos complementarios

Como aspectos secundarios estamos interesados en:

Iniciar una línea de investigación sobre Pensamiento Numérico Relativo y sus implicaciones en Educación Matemática.

Experimentar y contrastar procedimientos y métodos de investigación adecuados al campo de estudio e indagar sobre los aspectos metodológicos específicos de la investigación en Educación Matemática.

Poner de manifiesto la importancia del análisis epistemológico como reflexión teórica fundamental para la realización de algunas investigaciones en Educación Matemática.

Isidoro Segovia, ECD. Apdo. 2.7.

#### "2.7.- Objetivos de la Investigación

El **propósito central** de esta investigación es **describir y caracterizar la resolución por parte de niños, en la etapa escolar de enseñanza obligatoria, de Primero a Octavo de Educación General Básica (6 a 14 años), de tareas de estimación de cantidades discretas, así como poner de manifiesto el carácter evolutivo de las estrategias de estimación utilizadas de acuerdo con el modelo de desarrollo propuesto por Case.** Las cantidades son inferiores a 100, están presentadas en formato lineal

y con un tiempo máximo de visualización de la cantidad de 8 segundos.

Para lograr el propósito central mencionado se hace necesario establecer y articular una serie de **objetivos parciales** que se relacionan con el objetivo central (Cohen y Manion, 1989, p. 132). Estos objetivos son:

a) **Caracterizar y estudiar la variable Porcentaje de Error en las respuestas cuantitativas de los niños a las diferentes tareas de estimación propuestas.**

b) **Caracterizar y estudiar la variable Tiempo de Respuesta en las diferentes tareas de estimación propuestas.**

c) **Identificar, caracterizar y estudiar las Estrategias que emplean los niños para resolver las distintas tareas de estimación.**

d) **Estudiar las relaciones entre las variables Porcentaje de Error y Tiempo de Respuesta y las Estrategias empleadas.**

Para la consecución de cada uno de los objetivos mencionados es necesario hacer un desglose de los mismos, identificando cuáles son las necesidades de información que se van a abordar en cada caso y las correspondientes conexiones entre ellas. En nuestro estudio, y en relación con los objetivos anteriormente enunciados, nos proponemos estudiar:

respecto al objetivo a):

**a<sub>1</sub>) la variación en la variable Porcentaje de Error con la edad y curso;**

**a<sub>2</sub>) la relación de las variables de tarea, Estructura y Tamaño, con la variable Porcentaje de Error;**

respecto al objetivo b):

**b<sub>1</sub>) la variación en la variable Tiempo de Respuesta con la edad y curso;**

**b<sub>2</sub>) la relación de las variables de tarea, Estructura y Tamaño, con la variable Tiempo de Respuesta;**

en relación con el objetivo c):

**c<sub>1</sub>) la variación en las Estrategias de resolución con la edad y curso;**

**c<sub>2</sub>) la relación de las variables de tarea, Estructura y Tamaño, con las Estrategias de resolución;**

finalmente, y en relación con el objetivo d):

**d<sub>1</sub>) la relación entre Estrategias y Porcentaje de error;**

**d<sub>2</sub>) la relación entre Estrategias y Tiempo de respuesta;**

**d<sub>3</sub>) la relación entre Tiempo de respuesta y Porcentaje de error.**

Isabel Romero, INR, Apd. 2.5.

### **"Objetivo General e Hipótesis**

Pasamos a precisar los supuestos que se derivan de las consideraciones realizadas hasta el momento para nuestra investigación y a partir de los cuales vamos a reenunciar el objetivo general de este estudio y explicitar la hipótesis en la que se sustenta.

*1.- La construcción del concepto de Número Real se asienta sobre dos familias de representaciones: notaciones numéricas -notaciones simbólicas, de carácter proposicional- y modelos geométricos -imágenes y representaciones gráficas-; es decir, en el concepto de Número Real intervienen sustantivamente representaciones digitales y analógicas.*

*A nivel estructural la imbricación e interdependencia de ambos tipos de representación se pone de manifiesto en el proceso histórico de la construcción del concepto de Número Real, especialmente en el planteamiento y resolución de los conflictos más significativos.*

*A nivel cognitivo los dos tipos de representación son, igualmente, necesarios y mutuamente complementarios. Sostenemos que la comprensión del concepto de Número Real pasa por el manejo de ambos sistemas de representación (notaciones numéricas y modelos geométricos) y de las conexiones y relaciones entre ellos, de forma complementaria y progresivamente más profunda y compleja.*

*2.- Consideramos que el tratamiento didáctico que se hace del concepto de Número Real, derivado esencialmente del programa de la Matemática Moderna, es inadecuado y pobre en significatividad para los alumnos. El problema de la irracionalidad es altamente complejo, y a esta complejidad se añaden las dificultades derivadas de las nociones de infinito implicadas.*

*Consideramos que el concepto de Número Real no puede abordarse de forma efectiva mediante un tratamiento convencionalmente formal, basado en representaciones proposicionales, y con referencias superficiales y pobremente conectadas en el terreno de las imágenes.*

*Del presupuesto anterior se deriva que la estrategia didáctica del curriculum de matemáticas convencional pretende solucionar problemas importantes de comprensión soslayándolos mediante un planteamiento formal que, al pasar de puntillas por las dificultades del Número Real, elude las cuestiones fundamentales que están en la raíz de la comprensión de este concepto.*

Bajo estos supuestos, reenunciamos con mayor precisión el Objetivo General de este estudio:

**Introducir el concepto de Número Real a escolares de 14-15 años para explorar dificultades y potencialidades que presenta, mediante una propuesta didáctica que se caracterice por:**

**-tener en cuenta la complejidad de dicho concepto y abrir vías para la presentación, comprensión y solución de problemas fundamentales en la construcción del mismo,**

**-basarse, de forma simultánea y complementaria, en los sistemas de representación digitales y analógicos propios del Número Real y esté basada en un conocimiento claro, preciso y riguroso de la red conceptual que sustentan,**

**-estimular la progresiva profundización en las componentes e interrelaciones de ambos sistemas de representación, con objeto de proporcionar una base consistente para una adecuada formación de los alumnos en este terreno,**

**-insertarse en un contexto curricular, y considerar las limitaciones y posibilidades que proporciona el aula como escenario natural complejo.**

Alfonso Ortiz, RIN. Apdo. 1.6

### **"Objetivo general**

Planteamos el objetivo general de este estudio en los siguientes términos:

**Analizar la naturaleza y la evolución del razonamiento inductivo numérico en los escolares de Educación Primaria**

### **1.6.2.- Objetivos específicos**

El objetivo general anterior se concreta en los siguientes objetivos específicos:

O1: Delimitar el razonamiento inductivo numérico dentro del marco general de la inducción.

O2: Caracterizar las interpretaciones inductivistas sobre el origen del número natural.

O3: Reconocer las interpretaciones inductivistas y convencionalistas en la transmisión escolar de la aritmética del número natural, determinando estrategias y procedimientos inductivos utilizados.

O4: Establecer un modelo teórico evolutivo de razonamiento inductivo numérico y comprobar con escolares de Educación Primaria la utilidad y eficacia del modelo para describir su comportamiento real en razonamiento inductivo numérico.

O5: Caracterizar cada uno de los diferentes estados de desarrollo en términos de estrategias y procedimientos inductivos propios de la aritmética escolar.

O6: Establecer la relación existente entre el desarrollo del currículum en aritmética y la evolución del razonamiento inductivo numérico en Educación Primaria.

O7: Confirmar los resultados ya obtenidos en la Memoria de Tercer Ciclo.

### **1.6.3.- Objetivos complementarios**

C1: Iniciar una línea de trabajo en Razonamiento Inductivo Numérico dentro de la línea de investigación "Pensamiento Numérico.

C2: Comprobar la utilidad del análisis didáctico para fundamentar y contextualizar investigaciones en Educación Matemática.

C3: Reafirmar la complementariedad de metodologías y su efectividad para este tipo de investigaciones."

### Francisco Fernández, ECAE. Apdo 2.6

"La finalidad de nuestro estudio está en la caracterización de un instrumento para la evaluación de las competencias algebraicas elementales, que tenga en cuenta la complejidad de las tareas propuestas y que permita reorientar, en su caso, la comprensión, por parte de los estudiantes, de los conceptos implicados.

Vamos a aplicar el instrumento de evaluación a estudiantes de último curso de Educación Secundaria Obligatoria (16 años) y a estudiantes universitarios que no han recibido instrucción en Álgebra en un período superior a 5 años. Trataremos de obtener valores grupales evaluativos que revelen cómo se desempeña globalmente toda la muestra a considerar. De este modo tratamos de conocer el poso o fondo de conocimiento algebraico que perdura en estudiantes que han madurado, pero que ya hace bastante tiempo que estudiaron matemáticas, y así compararlo con aquellos estudiantes que están recibiendo una instrucción sistemática sobre Álgebra Escolar.

En definitiva, tratamos de considerar qué relevancia tienen dos variables críticas en todo proceso de aprendizaje como son la práctica mediante la enseñanza y la maduración.

Pretendemos que el instrumento tenga un carácter explicativo sobre las cuestiones expuestas en el apartado 2.1 y, en particular, sobre las características de las tipologías de sujetos que aparecen cuando se relacionan éstos con los sistemas de representación con que abordan la resolución de los problemas.

También pretendemos que tenga carácter predictivo, de tal forma que nos permita establecer la pertenencia de un sujeto a una u otra de las tipologías establecidas y, así, conocer su competencia algebraica. De esta forma, el profesor podrá establecer un plan de actuación que conduzca a los sujetos, mediante la instrucción adecuada, a niveles más complejos del



conocimiento algebraico dentro de una evaluación continua y formativa.

Para ello pretendemos:

- Establecer variables mediante las que caracterizar tareas algebraicas adaptadas a los niveles de la Educación Secundaria Obligatoria. Crear una base de problemas verbales algebraicos, que contemplen diferentes opciones de resolución, según las variables establecidas.
- Seleccionar tareas mediante las que evaluar las competencias de los estudiantes en Álgebra Escolar, para construir un instrumento de evaluación.
- Tipificar el pensamiento algebraico que los estudiantes activan cuando resuelven problemas verbales algebraicos.
- Delimitar los sistemas de representación usuales movilizados por los estudiantes para la resolución de problemas verbales algebraicos. Caracterizar los grados de complejidad que implica el manejo de cada uno de estos sistemas.
- Estudiar las relaciones que se establezcan entre las competencias en Álgebra Escolar y los sistemas de representación elegidos y, también entre las competencia y las variables que caracterizan los enunciados de los problemas verbales algebraicos.
- Estudiar las relaciones entre los posibles estratos de la población estudiantil a la que va dirigido el estudio, en orden a determinar si hay diferencias significativas en las competencias en Álgebra Elemental.

En estos apartados subyace una finalidad global, que es la profundización en el estudio teórico y práctico del campo conceptual de la evaluación del conocimiento matemático."

Cp. 4 (127-310):

### **"3.1. Enfoque exploratorio de la investigación: Objetivos a cubrir.**

Consideramos adecuado que la definición de los objetivos de este trabajo se planifique en tres fases que, adaptando la propuesta de Colás y Buendía (1992, pp. 179-180), se pueden concretar en:

1ª Fase: precisar la finalidad general en un propósito central específico.

2ª Fase: identificar y articular los aspectos subsidiarios y tópicos que se derivan del objetivo principal.

3ª Fase: plantear la información específica necesaria para cubrir los tópicos propuestos.

Detallamos las tres fases señaladas.

#### **3.1.1. Propósito central.**

Nuestro objetivo principal es:

aportar elementos de juicio e instrumentos fiables para evaluar las competencias que sobre Álgebra Elemental tienen los estudiantes españoles, a través de la resolución de problemas verbales.

Para llevar a cabo este objetivo es necesario conocer previamente los criterios de evaluación que se van a tener en cuenta, así como determinar tipos de instrumentos válidos y fiables que permitan conocer las competencias que, sobre el tópico enunciado, un sujeto pone en juego cuando responde a las tareas propuestas en el instrumento.

Queremos saber cómo los estudiantes actúan y responden ante una serie de problemas verbales algebraicos elegidos convenientemente; también nos proponemos establecer si los resultados dependen del tipo de problemas, dentro de una variabilidad controlada. Conocer el sistema de representación que suelen utilizar los estudiantes en la resolución de estos problemas, por su elicitación, puede indicar al profesor el tipo de pensamiento algebraico o pre-algebraico movilizado por el estudiante en la realización de la tarea.

Determinar si en un aula hay grupos de sujetos que, ante los problemas verbales algebraicos, utilizan unos u otros sistemas de representación, dará una información panorámica acerca del nivel de comprensión del lenguaje algebraico elemental en la clase, y la ubicación de estos grupos en el camino que hay que recorrer desde la Aritmética al Álgebra.

De esta forma, este objetivo central se concreta en diversos niveles más específicos, que enunciamos:

- \* Construir un instrumento para evaluar las competencias en Álgebra elemental mediante la resolución de problemas verbales.

- \* Precisar criterios mediante los que relacionar los resultados de la administración del instrumento sobre toda la muestra.

- \* Encontrar y caracterizar agrupaciones o tipologías de resolutores de problemas verbales algebraicos, según el sistema de representación que utilicen en la resolución.

### 3.1.2. Objetivos subsidiarios.

Para lograr el propósito central específico antes mencionado, se hace necesario establecer y articular una serie de temas y tópicos subsidiarios que se relacionan con el objetivo principal. En nuestra investigación, para el logro del objetivo central, se hace necesario:

- a) Seleccionar un conjunto de problemas verbales algebraicos que respondan a los contenidos de Álgebra Escolar en la Educación Obligatoria y a una variabilidad controlada.

- b) Estudiar la validez y fiabilidad del instrumento de evaluación constituido por el conjunto seleccionado de problemas verbales.

- c) Analizar estadísticamente la incidencia de cada una de las variables que intervienen en la resolución de los problemas verbales, y relacionarlas entre sí.

- d) Determinar tipologías de problemas por los sistemas de representación que se han utilizado para su resolución, caracterizando estas agrupaciones.

- e) Determinar tipologías de resolutores por el sistema de representación que han utilizado para resolver los problemas del instrumento de evaluación, caracterizando estas agrupaciones.

### 3.1.3. Objetivos específicos necesarios.

Para la identificación y articulación de cada uno de los objetivos subsidiarios, que se derivan del objetivo principal, se hace necesario explicitar qué necesidades específicas de información se identifican, así como las correspondientes relaciones entre ellas. En este trabajo, y en relación con los objetivos anteriormente enumerados, podemos señalar:

- a.1) Seleccionar problemas verbales algebraicos tipo, mediante revisión bibliográfica de la investigación en Álgebra elemental y mediante juicio de expertos, para elaborar un banco de ítems/problemas.

- a.2) Determinar las variables de tarea de los problemas y sus posibles combinaciones, en orden a establecer las posibles variantes en los problemas seleccionados.

- b.1) Estudiar la validez de contenido del instrumento de evaluación mediante juicio de expertos externos.

- b.2) Concretar la validez de constructo del instrumento de evaluación mediante análisis estadísticos.

- b.3) Determinar la fiabilidad del instrumento de evaluación a través de distintos índices de fiabilidad, obtenidos por medios estadísticos.

- c.1) Analizar los resultados de la fase de planteamiento en la resolución de los problemas

verbales algebraicos del instrumento de evaluación.

c.2) Analizar los resultados de la fase de ejecución en la resolución de los problemas verbales algebraicos del instrumento de evaluación.

c.3) Analizar los resultados de la fase de desempeño final en la resolución de los problemas verbales algebraicos del instrumento de evaluación.

c.4) Relacionar los resultados de las tres fases anteriores, planteamiento, ejecución y desempeño final, en la resolución de los problemas verbales algebraicos del instrumento de evaluación.

c.5) Aplicar la caracterización del pensamiento algebraico (Lins, 1992) a los resultados obtenidos en la resolución de los problemas verbales algebraicos del instrumento de evaluación.

c.6) Analizar los sistemas de representación utilizados en la resolución de los problemas algebraicos del instrumento de evaluación.

c.7) Estudiar la implicación que tiene la elección de un sistema de representación en la resolución correcta de los problemas verbales algebraicos del instrumento de evaluación.

d.1) Determinar, mediante análisis cluster, si existen tipologías entre los problemas verbales algebraicos del instrumento de evaluación, respecto a los sistemas de representación que se utilizan para su resolución.

d.2) Establecer las características de estos agrupamientos y obtener conclusiones.

e.1) Determinar, mediante análisis cluster, si existen tipologías de sujetos por los sistemas de representación que utilicen para abordar los problemas verbales algebraicos del instrumento de evaluación.

e.2) Caracterizar las distintas tipologías de resolutores que resulten del estudio de cluster de sujetos."

José María Gairín, NRP. Apdos. I.9 y III.5

## **Objetivos de nuestra investigación**

Recientes trabajos de investigación en didáctica de la matemáticas (Carpenter et al., 1993; Behr et al., 1993) han puesto de manifiesto la complejidad de conceptos, relaciones, operaciones y propiedades que conforman el aprendizaje y comprensión de los números racionales. En este sentido, y situados en el campo del Pensamiento Numérico, abordamos el estudio sobre la preparación de los futuros profesores, en su dimensión formativa, desde distintas reflexiones:

- Para incrementar la comprensión de los números racionales, los maestros en formación deben fortalecer sus conocimientos personales sobre los diferentes significados de la fracción y establecer conexiones entre los mismos: *"Si los estudiantes aprenden solamente la interpretación de la fracción como relación parte-todo, tienen serias limitaciones para una sólida comprensión de las fracciones"* (Kerslake, 1986). En este sentido se pretende lograr que estos estudiantes den pleno significado a la fracción como cociente.
- También debe incrementarse esta comprensión de los números racionales fortaleciendo las conexiones conceptuales entre las notaciones fraccionaria y decimal: *"Enseñar fracciones y decimales como tópicos separados sin proporcionar a los estudiantes oportunidades para establecer conexiones, empequeñece su desarrollo para la plena*

*comprensión de los números racionales"* (Sowder, 1995). Para ello, este trabajo articula estrategias de aprendizaje basadas en la utilización de nuevos sistemas de representación que faciliten la conexión entre las notaciones fraccionaria y decimal.

- Para que el proceso de construcción del conocimiento sea efectivo es preciso disponer de un medio físico y natural, utilizado como escenario idóneo para la formación de conceptos y, además, como área de aplicación de los mismos. Así, a partir de la imagen y combinando pensamiento con experiencia, la formación de ideas sobre los números racionales positivos aparece conectada.
- Ahora bien, para que los estudiantes incrementen sus conocimientos es necesario que los esfuerzos se centren en la resolución de situaciones problemáticas: *"es a través de la resolución de problemas como un concepto cualquiera adquiere sentido para un alumno. Este proceso de elaboración pragmática es esencial para la psicología y la didáctica, como es esencial para la historia de las ciencias"* (Vergnaud, 1990, pág. 135). Estas situaciones problemáticas deben tener sentido para dichos estudiantes y ser generadoras de conflictos que favorezcan el sentido del número y no que favorezcan habilidades rutinarias y reglas para su aplicación.
- Además, y para que esos estudiantes reflexionen sobre la adquisición de sus conocimientos, es necesario fomentar un "aprendizaje intencionado" (Scardamalia et al., 1989), o aprendizaje en el que la construcción del conocimiento sea un proceso abierto y que los estudiantes tomen responsabilidades sobre el mismo. Para alcanzar este aprendizaje se demanda la creación de un clima de trabajo en el que los estudiantes puedan examinar sus propios errores, que tengan oportunidades para el diálogo, que el clima de la clase esté libre de presiones externas y que los estudiantes acepten que la comprensión de los Números Racionales exige de un esfuerzo personal importante y de un tiempo amplio para la acomodación de los nuevos conocimientos con los que ya tenían (Hatano e Inagaki, citados por Sowder et al, 1993, pág. 258).

Además de la dimensión formativa, este trabajo también contempla el estudio de la preparación de los futuros maestros para el desempeño de tareas profesionales. Nuestro propósito es el de hacer indagaciones sobre el modo en que estos profesores en formación proyectan sus conocimientos personales en procesos instructivos con escolares, procesos que vienen determinados por la detección de errores, origen de los mismos, valoración de su importancia en el aprendizaje, modos de abordar la superación de dichos errores y por el diseño de actividades para proseguir el proceso instructivo.

En base a todas las consideraciones anteriores desglosamos el objetivo general que orienta nuestra investigación en los objetivos parciales que a continuación se enuncian:

### **OBJETIVOS ESPECIFICOS:**

En relación al primer objetivo general: *"Experimentar con estudiantes de la Diplomatura de Maestro de Primaria una propuesta curricular innovadora que contemple el análisis sintáctico y semántico de dos sistemas simbólicos de representación para los números racionales positivos"*, señalamos los siguientes

objetivos específicos:

- 1.a. Caracterizar un modelo para el aprendizaje de los números racionales positivos basado en la acción de repartir en partes iguales.**
- 1.b. Articular una secuencia de actividades sobre el modelo anterior en la que se dé prioridad a la fracción como cociente de números naturales.**
- 1.c. Mostrar los dos sistemas de representación que surgen al cuantificar el resultado del reparto igualitario realizado por fases y aplicando el criterio de la mayor parte (representación polinómica unitaria y representación polinómica decimal)**
- 1.d. Explicitar las características sintácticas y semánticas, específicas y diferenciadas, que tienen los dos sistemas de representación anteriores.**
- 1.e. Evaluar el mapa conceptual que sobre el concepto de número racional positivo han reelaborado los profesores de primaria en formación al integrar los dos sistemas de representación considerados.**

En relación al segundo objetivo general: "*Analizar los modos en que un nuevo dominio de los conocimientos sobre Números Racionales afecta a los futuros profesores en las tareas de planificación del proceso de enseñanza para escolares del sistema educativo y sobre el tópico mencionado*", señalamos los siguientes objetivos específicos:

- 2.a. Analizar cómo el nuevo dominio en los conocimientos de los futuros profesores condiciona la detección y valoración de los errores cometidos por los escolares.**
- 2.b. Estudiar si el nuevo dominio en los conocimientos influye en las explicaciones que los futuros profesores ofrecen a los escolares para que superen los errores previamente detectados.**
- 2.c. Analizar cómo el nuevo dominio en los conocimientos se proyecta cuando los futuros profesores elaboran tareas para el aprendizaje destinadas a los escolares,**

### **Capítulo III. Objetivos Generales e Hipótesis.**

Las consideraciones realizadas hasta el momento sobre nuestra investigación nos permiten volver a los objetivos generales, que ya se enunciaron en el Capítulo I, apartado I.9, y darles mayor precisión; también nos permiten explicitar las hipótesis que orientan este estudio.

A través de estas precisiones contemplamos la doble vertiente que anima nuestro trabajo: la vertiente de formación personal de los futuros maestros y la vertiente profesional, en cuanto a la implicación que tienen los conocimientos personales de los futuros profesores sobre las tareas escolares que deberán realizar.

En consecuencia, mantenemos los dos objetivos que guían la presente investigación: hay un primer objetivo que persigue delimitar las consecuencias que, para incrementar el conocimiento personal de los estudiantes para maestros, produce una determinada propuesta didáctica; el segundo objetivo pretende indagar acerca de las consecuencias que tiene en la orientación de tareas profesionales el dominio alcanzado en

el conocimiento personal sobre números racionales por parte de estos futuros profesores de Educación Primaria.

En el cuadro siguiente se concretan los dos objetivos que se persiguen con nuestro trabajo de investigación:

- 1. Explorar dificultades y potencialidades que presenta el trabajo en los Números Racionales positivos para estudiantes de Maestros, en la especialidad de Educación Primaria, utilizando una propuesta didáctica caracterizada por:**
  - 1.1. Contemplar los objetivos específicos ya señalados en el Capítulo I: caracterizar un modelo para el aprendizaje; priorizar la fracción como cociente de números naturales; construir los sistemas de representación polinómicos unitario y decimal; y explicitar las características sintácticas y semánticas de estos dos sistemas.**
  - 1.2. Reelaborar los conocimientos personales de los estudiantes sobre las relaciones y sobre las operaciones entre números racionales positivos, redefiniendo los conceptos a partir de los dos sistemas simbólicos de representación construidos.**
  - 1.3. Potenciar las conexiones de estos dos sistemas de representación con las notaciones fraccionaria y decimal de los números racionales, poniendo de manifiesto que las fracciones admiten una representación polinómica similar a la que subyace en nuestro sistema de numeración.**
  - 1.4. Emplear una metodología que prioriza el trabajo personal de los estudiantes y que potencia el aula como espacio natural para la construcción del conocimiento.**
- 2.- Establecer relaciones entre los conocimientos personales de los futuros profesores sobre la propuesta didáctica y el desempeño de determinadas tareas como profesionales, a través de:**
  - 2.1. El cumplimiento de los objetivos específicos marcados en el capítulo I: detección y valoración de los errores producidos por los escolares; explicaciones que ofrecen a dichos escolares; y elaboración de tareas para el aprendizaje.**
  - 2.2. El uso de los modelos sobre los que construir el conocimiento matemático de los escolares.**
  - 2.3. El tratamiento de las relaciones sintácticas y semánticas de los sistemas de representación utilizados por los escolares.**

Francisco Gil, MCyCP. Apdo. 1.10, Apdos. 3.1 y 3.2.

Apdo. 1.10. El propósito central de este estudio es interpretar y describir la estructura de ideas y valoraciones que sustentan el conocimientos que sobre evaluación y enseñanza y aprendizaje de las matemáticas tienen los profesores de matemáticas de secundaria de Andalucía. Se trata de establecer las concepciones y creencias de estos profesores y hacerlo de manera sistemática.

### **3.1 Propósito de la investigación**

El objeto general de este trabajo es estudiar las concepciones y creencias de los profesores de matemáticas de educación secundaria obligatoria sobre la evaluación, en general, y sobre la evaluación de su asignatura, en particular. Este estudio se lleva a cabo en un momento en que estos profesores están implicados en un proceso de renovación del currículo y de cambio en el sistema educativo español (como se ha visto en los apartados 1.1, 1.4, 1.8 y 1.9), que tiene implicaciones importantes para todos los componentes del currículo (apartado 2.2.4), en especial para la evaluación (apartados 2.3.7 y 2.3.8).

Conocer mejor el pensamiento de los profesores de matemáticas es objetivo central para caracterizar el conocimiento profesional del profesor, para determinar sus componentes y tipologías, para diseñar planes para su formación inicial y permanente. Cualquier estudio que aporte información útil para mejorar la práctica profesional es siempre interesante; además resulta oportuno en situaciones de reforma, como la actual. El conocimiento de las concepciones y creencias de los profesores de matemáticas sobre evaluación ante la reciente situación de cambio curricular, aporta información útil sobre la adecuación del pensamiento del profesor a los nuevos planteamientos curriculares y, por ello, tiene implicaciones para la práctica.

El interés por la visión que tienen los profesores de matemáticas sobre la evaluación es significativo ya que las actuaciones profesionales de los profesores proceden de su interpretación y valoración sobre cómo se produce el aprendizaje (Webb,1992). Una comprensión de las ideas que los profesores tienen sobre evaluación proporciona una base para estimar su aceptación de posibles estrategias de evaluación alternativas (como las incluidas en los nuevos planteamientos curriculares de la Secundaria) (Trotman, 1997); este conocimiento permite diseñar procesos de innovación curricular realistas y viables, tomando las medidas oportunas para evitar los bloqueos y frustraciones del profesorado que los tienen que poner en práctica.

La práctica de la evaluación se sostiene sobre un marco de conceptos, intuiciones y creencias sólido y bien trabado; pretender la modificación de esas prácticas impone conocer la estructura conceptual y actitudinal sobre las que se sostienen. Como Ernest (1989) señala, las reformas en la enseñanza solo se llevan a cabo cuando aquellas creencias sobre enseñanza y aprendizaje firmemente sostenidas se confrontan y modifican. Webb (1992) sostiene esta idea sugiriendo que, como los profesores están implicados en actividades de evaluación durante un alto porcentaje de su jornada laboral, los cambios en la práctica de la evaluación tendrán un fuerte impacto sobre el aprendizaje de los estudiantes.

Siguiendo el planteamiento de Goetz y Lecompte (1986), nos preguntamos por:

a) el propósito de la investigación: foco o fin del estudio y cuestiones de

investigación,

b) el diseño de la investigación, es decir, diseño general, participantes y contextos, rol del investigador, estrategias de recogida de datos, instrumentos y técnicas de recogida, tratamiento e interpretación de los datos.

Un segundo propósito general de esta investigación se encamina a establecer un sistema diferente para la elección de preguntas adecuadas en el estudio de las concepciones y creencias de los profesores de matemáticas.

### **3.2 Objetivos de la investigación**

Dentro de este marco general, y en relación con el profesorado de matemáticas de secundaria en el Sistema Educativo Andaluz, nos hemos propuesto:

1. Reunir, organizar y analizar una amplia muestra de la diversidad de juicios y valoraciones que sostienen los profesores de matemáticas en ejercicio sobre evaluación, y sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

2. Generar inductivamente los conceptos que sobre evaluación y evaluación en matemáticas, y sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas utilizan estos profesores, mediante la reducción y clasificación de los juicios recogidos.

3. Interpretar los diferentes conceptos inferidos y sus relaciones mediante marcos teóricos convencionales y elaboraciones de carácter técnico sobre evaluación, y sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

4. Establecer el estado de opinión relativo a cada concepto y su grado de aceptabilidad, interpretando la valoración asignada a cada uno de los conceptos de evaluación y de enseñanza y aprendizaje inferidos.

5. Detectar y caracterizar factores en el sistema de conceptos establecidos, sobre evaluación y sobre enseñanza y aprendizaje, teniendo en cuenta las valoraciones hechas por los profesores de la muestra.

6. Detectar factores en el sistema de conceptos global teniendo en cuenta las valoraciones hechas por los profesores de la muestra.

7. Caracterizar tendencias del pensamiento de los profesores de matemáticas mediante la delimitación de sistemas de ideas y conceptos diferenciados en relación con la evaluación y en relación con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (y sobre la base de las valoraciones emitidas).

8. Determinar las relaciones entre las tendencias de pensamiento sobre enseñanza y aprendizaje y las tendencias de pensamiento sobre evaluación.



## HIPÓTESIS DE LAS INVESTIGACIONES

Encarnación Castro, EPN. Apdo. 1.6

### *Hipótesis General*

La carencia actual de una representación figurativa en la enseñanza/aprendizaje de los números y las relaciones numéricas, constituye una limitación para:

- a) la comprensión del concepto de número como estructura de relaciones aritméticas,
- b) el dominio y aplicación de tales relaciones.

Alternativamente, proporcionar un sistema simbólico de representación para los números y estudiar los patrones a los que se ajustan estas representaciones:

- \* mejora la comprensión de los conceptos numéricos;
- \* proporciona significado a las diferentes relaciones que se pueden considerar en cada número;
- \* permite representar relaciones entre números así como cambios en esas relaciones;
- \* facilita reconocer patrones a los que se ajustan los números de una sucesión;
- \* ayuda a probar/refutar propiedades de los números.

Los sujetos en edad escolar, en especial aquellos en los que predominan los procedimientos visuales, mejoran significativamente su trabajo con números al utilizar representaciones figurativas.

### **II. 17. Formulación de Hipótesis.**

La implementación de un modelo de enseñanza, basado en el uso de configuraciones puntuales y desarrollos aritméticos como facilitador del aprendizaje de las sucesiones numéricas, es susceptible de evaluación a nivel de producto. Al efecto, conjeturamos hipótesis plausibles que pueden poner de manifiesto un efecto diferencial del modelo de enseñanza sobre dominios de aprendizaje o aptitudinales. Estas hipótesis son:

**1ª. Hipótesis de investigación.** El uso de configuraciones puntuales facilita un progreso en la capacidad aritmética de los alumnos que reciben tal modelo de enseñanza.

**2ª. Hipótesis de investigación.** El uso de configuraciones puntuales facilita el dominio de un tópico matemático cual es sucesiones numéricas.

Enunciamos estas hipótesis de modo alternativo, asumiendo la producción de *efectos significativos* en variables dependientes de interés (aptitud numérica y dominio de las sucesiones numéricas) a partir, como causa, de la implementación de un modelo de enseñanza (variable independiente) basado en el uso de configuraciones puntuales. En el caso de que tal presunta relación causal no sea verosímil, habrá que asumir, con todas las limitaciones posibles, que el

uso de configuraciones puntuales es una práctica informal que los alumnos incorporan naturalmente sin necesidad de apelar a su formalización didáctica.

Enrique Castro, NCPV.

## **Capítulo 4 Análisis General de los datos. Estudio del Rendimiento**

### **4.1. Análisis de las puntuaciones totales**

Con cada uno de estos análisis contrastamos las siguientes hipótesis nulas, para la muestra utilizada:

- (1) *No hay diferencias significativas debidas al factor COLEGIO.*
- (2) *No hay diferencias significativas debidas al factor CURSO.*
- (3) *No hay diferencias significativas debidas al factor CUESTIONARIO.*
- (4) *No hay efecto significativo de interacción de dos vías entre los factores COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO.*
- (5) *No hay efecto significativo de interacción de tres vías entre los factores COLEGIO, CURSO y CUESTIONARIO.*

## **Capítulo 5 Análisis del índice de dificultad de los problemas**

### **5.2. Efecto del factor R sobre la dificultad de los problemas**

- (6) *No hay efecto significativo del factor R sobre el índice de dificultad de los problemas.*

### **5.4. Efecto del factor Q sobre la dificultad de los problemas**

hipótesis nula: (7) *No hay efecto significativo del factor Q sobre el índice de dificultad de los problemas.*

### **5.6. Análisis de las interacciones entre R y Q**

hipótesis nula: (8) *No hay interacción entre las variables R y Q.*

## **Capítulo 6 Análisis de la distribución de errores**

Sobre el conjunto de los doce tipos de problemas que quedan determinados por ambas variables de tarea hemos planteado la siguiente hipótesis:

*Si un alumno produce una respuesta incorrecta, el error o la dificultad de comprensión que produce esa incorrección depende del término relacional, de la cantidad desconocida y de la interacción mutua de ambas variables.*

### **6.2. Predicciones**

A raíz de los resultados anteriores hemos enunciado una serie de hipótesis o predicciones que desarrollan la naturaleza de la asociación existente entre las variables de tarea R y Q y las tipos de error cometidos por los niños.

Predicción 1. *Los errores que cometen los niños se ajustan a la tipología que hemos establecido previamente.*

Predicción 2. *El tipo de error más frecuente es el ERROR<sub>2</sub>, cambio de estructura.*

Predicción 3. *Los problemas tipo Q<sub>1</sub> provocan un porcentaje muy bajo de error, excepto el problema R<sub>2</sub>Q<sub>1</sub>*

Predicción 4. *Los errores en los cuatro problemas tipo Q<sub>2</sub> son debidos fundamentalmente al cambio de estructura.*

Predicción 5. *Los cuatro problemas tipo Q<sub>3</sub> provocan el error de inversión de la relación, no obstante los dos problemas R<sub>1</sub>Q<sub>3</sub> y R<sub>2</sub>Q<sub>3</sub> provocan también el error de cambio de estructura con*

*un porcentaje muy similar al de inversión de la relación.*

*Predicción 6. Los problemas que incorporan las expresiones  $R_1$  y  $R_2$  provocan el error de cambio de estructura.*

## **Capítulo 7 Análisis de niveles de comprensión**

### **7.4. Predicciones**

A continuación exponemos las predicciones que hemos formulado para cada categoría de sujetos. Mediante la entrevista pretendemos confirmar si estas predicciones son o no acertadas. Esperamos que los niños seleccionados para las entrevistas se ajusten a las siguientes normas por categoría de sujetos:

#### Categoría 1

- Fracasan en todos los problemas.
- Cometen el error de cambio de estructura en todos los problemas.

#### Categoría 2

Esperamos que el niño acierte en el problema  $R_1Q_1$  y que fracase en el resto.

Que cometa los errores de:

- cambio de estructura en  $R_2Q_1$ .
- error distinto del error de inversión de la relación, en los problemas de referente desconocido.

#### Categoría 3

Esperamos que el niño:

- acierte en el problema  $R_4Q_1$ , y
- fracase en los problemas  $R_2Q_1$ ,  $R_2Q_3$  y  $R_3Q_3$ .

Los errores esperados son:

- error distinto del de inversión (e.j., cambio de estructura) en  $R_2Q_1$  y  $R_2Q_3$ .
- inversión de la relación en  $R_3Q_3$ .

#### Categoría 4

Esperamos que el niño:

- resuelva correctamente los problemas de comparación de referido desconocido,
- fracase en los problemas de escalar desconocido
- fracase en los problemas de referente desconocido

Los errores esperados son:

- cambio de estructura en los problemas de escalar desconocido
- inversión de la relación en los problemas de referente desconocido

#### Categoría 5

Esperamos que el niño fracase sólo en los problemas de escalar desconocido, tipo Q2

Los errores esperados son sólo de cambio de estructura en los problemas tipo Q2.

#### Categoría 6

Los sujetos de la Categoría 6 resuelven correctamente todos los problemas de comparación.

Comprenden la relación existente entre los datos y expresan el resultado con la unidad correcta.

No esperamos ningún error.

## José Luis González, CCN, Apdo. 2.3.2

### **2.3.2 Enunciado de las hipótesis**

Los planteamientos generales se concretan, a continuación, en las siguientes hipótesis de investigación:

I En el dominio de aplicación concreta usual de la estructura aditiva y ordinal de los números naturales y los números enteros, existe un subdominio caracterizado por la intervención de un tipo de medidas discretas relacionadas con la comparación de medidas naturales y a las que llamaremos *medidas naturales relativas*, entre las que se puede establecer una estructura de orden parcial y una ley de composición interna aditiva específica.

II Existe un conjunto de números a los que llamaremos *números naturales relativos* que, con la adición y el orden convenientes, es isomorfo al conjunto de *medidas naturales relativas*.

III El conjunto de los números naturales relativos con la adición y el orden definidos, presenta cinco diferencias estructurales básicas con respecto al grupo aditivo y ordenado de los números enteros. Estas diferencias son: 1) orden total / orden parcial con inversión en la "región negativa"; 2) Sin primer elemento / con primer elemento; 3) Conexión / desconexión entre las regiones "positiva" y "negativa"; 4) Cero único / cero doble; 5) Adición entera / anulación-compensación aditiva (adición natural relativa).

IV Los números naturales relativos abren una nueva vía de extensión aditiva y ordinal de los números naturales a los números enteros, integrándose junto a ellos en un modelo teórico que relaciona entre sí a todos los elementos del dominio, regulando las estructuras aritméticas aditivas correspondientes.

V El modelo mencionado permite establecer una clasificación lógico-semántica de los problemas y situaciones del dominio, que amplían y precisan otras ya realizadas sobre los problemas aditivos de enunciado verbal.

VI Individuos con estudios superiores a los de Enseñanza Obligatoria dan un tratamiento semántico diferenciado a los números naturales relativos y a los números enteros cuando se presentan en situaciones elementales de comparación de medidas discretas, sobre la base de la primera de sus diferencias ordinales.

## Isidoro Segovia, ECD, Apdo. 3.1

### **3.1.1.- Hipótesis**

En el capítulo anterior enunciamos los objetivos de nuestra investigación que son los *interrogantes* que definen de forma precisa el Planteamiento del Problema de la investigación (Bisquerra, 1989). Estos interrogantes constituyen una guía para el planteamiento de las *hipótesis de investigación* que son explicaciones posibles o provisionales que tienen en cuenta los factores, sucesos o condiciones que el investigador procura comprender. En estas hipótesis se incluyen hechos que trascienden los elementos conocidos para dar explicaciones plausibles de las condiciones desconocidas. Al relacionar los hechos conocidos con las conjeturas formuladas acerca de las condiciones ignoradas, las hipótesis, tanto si son confirmadas como rechazadas, incrementan el conocimiento (Van Dalen y Meyer, 1983).

La formulación de las hipótesis para esta investigación las hacemos, teniendo en cuenta:

a) las apreciaciones realizadas en torno al desarrollo de la estimación de cantidades discretas, descritas en el capítulo anterior y que están fundamentadas en la teoría de desarrollo formulada por Case,

- b) las investigaciones relacionadas con este trabajo, descritas también en capítulos anteriores,
- c) diversas exploraciones experimentales que hemos realizado, que se expondrán posteriormente,
- d) las variables que se definen en el apartado 3.1.2, y
- e) las intuiciones que surgen de la reflexión sobre el conjunto de todas las consideraciones anteriores.

Una primera hipótesis de investigación se refiere al desarrollo o evolución que experimentan los niños a lo largo del tiempo en la resolución de tareas de estimación de cantidades discretas, en las condiciones de nuestra experiencia. Esta hipótesis la enunciamos así:

**I) El porcentaje de error cometido evoluciona con el desarrollo y las estrategias empleadas en las tareas de estimación de numerosidad pueden interpretarse de acuerdo con el subestadio de desarrollo, en el marco de la teoría de Case, en que se encuentra el sujeto considerado.**

En base a los apartados 2.5 y 2.6 del capítulo anterior, se pueden establecer hipótesis de investigación más precisas para cada uno de los subestadios de desarrollo en los que están comprendidos los sujetos de nuestro estudio, niños de 1° a 8° de EGB:

**I.1. En el subestadio uno del período dimensional las estrategias que emplea el niño son de carácter global, sin tener en cuenta las partes, y sus procedimientos de cuantificación se basan en el conteo. Cometan errores considerables en la estimación de cantidades. Los tiempos de respuesta son más bajos que los empleados en los subestadios superiores.**

**I.2. En el subestadio dos del período dimensional el niño puede considerar una parte de la cantidad para extraer conclusiones acerca del total y sus procedimientos de cuantificación se basan en la comparación además del conteo (a mayor longitud mayor número). Sus errores de estimación son importantes, aunque inferiores a los del subestadio anterior.**

**I.3. En el subestadio tres del período dimensional el niño emplea la reiteración de la longitud de una parte como medio de obtención del total y emplea el conteo en grupos o la suma como procedimiento de cuantificación. Sus errores de estimación deben disminuir en relación al subestadio anterior.**

**I.4. En el subestadio uno del período vectorial el niño puede descomponer la cantidad en partes, contar una de ellas y multiplicar el resultado por el número de partes, o bien contar una parte, determinar la relación de esa parte con el todo y multiplicar. En situaciones de mayor complejidad recurrirá a estrategias más simples. Sus errores de estimación disminuyen en relación al subestadio anterior.**

**I.5. En el subestadio dos del período vectorial el niño puede emplear en todas las situaciones la descomposición y multiplicación como medio de cuantificar la cantidad total. Sus errores de estimación son menores que los de los subestadios anteriores.**

Una segunda hipótesis se refiere a la relación entre las variables de tarea (variables independientes) y las variables dependientes:

**II) Las variables de tarea Tamaño y Estructura influyen significativamente en las variables dependientes Porcentaje de Error, Estrategia empleada y Tiempo de Respuesta; existe correlación entre las variables dependientes.**

Dando precisión a esta hipótesis la podemos desglosar en:

**II.1. La variable Estructura, a partir del subestadio dos, influye significativamente en las variables de proceso. Las estructuras cerradas presentan mayor dificultad que las abiertas y las no descompuestas "a priori" mayor dificultad que las descompuestas.**

**II.2. La variable Tamaño, a partir del subestadio dos, influye significativamente en la variable Porcentaje de Error. Mayores tamaños producen mayores errores.**

**II.3. Existe correlación entre las variables dependientes Porcentaje de Error, Estrategia y Tiempo de Respuesta.**

Isabel Romero, INR, Apdo 2.5.

Bajo los anteriores supuestos, objetivo y caracterizaciones, la Hipótesis de nuestro estudio es:

**Sostenemos que**

**1° es viable una propuesta didáctica con las condiciones enunciadas para la introducción del Número Real a escolares de 14-15 años;**

**2° el desarrollo en el aula de la propuesta elaborada permitirá recoger información relevante de la comprensión de los escolares de 14-15 años sobre el concepto de Número Real.**

En los capítulos que siguen nos proponemos desarrollar nuestro objetivo y aportar evidencias que delimiten y concreten la Hipótesis.

Alfonso Ortiz, RIN. Apdo. 1.7

### **1.7.- Hipótesis**

Para la formulación definitiva de las hipótesis se han tenido en cuenta:

- a) Los objetivos de la investigación;
- b) El planteamiento del problema de investigación;
- c) El marco metodológico así como los diseños empíricos, que se van a exponer en los capítulos correspondientes;
- d) Las indagaciones históricas en epistemología de la inducción;
- e) Una revisión histórica de libros de texto y manuales clásicos de matemáticas;
- f) Las indagaciones en propuestas didácticas sobre aritmética escolar;
- g) Los resultados del estudio exploratorio y de los estudios empíricos que se expondrán posteriormente;
- h) Nuestra experiencia y conocimientos en Didáctica de la Matemática.

Con la primera hipótesis queremos plantear la importancia de la Epistemología en Educación Matemática, intentando mostrar que los posicionamientos didácticos están enmarcados en ciertas corrientes científicas que condicionan en los escolares sus perspectivas de la matemática y por

tanto sus creencias y concepciones sobre lo que son las matemática y como se elaboran. En concreto, nosotros ponemos en evidencia una de tales corrientes estudiando su influencia en el currículum escolar. La hipótesis que hemos contrastado en este sentido es la siguiente:

**H1: "Existe una corriente epistemológica y matemática que considera que la aritmética tiene un origen exclusivamente inductivo. Los planteamientos didácticos y curriculares de la aritmética escolar en España han participado de esta tendencia al tener un marcado signo inductivista"**

Nuestra segunda hipótesis se refiere a la evolución del razonamiento inductivo numérico en los escolares de Educación Primaria dentro del contexto al que hacemos referencia en la hipótesis anterior. El origen de esta hipótesis está en las tareas de continuar series que hemos propuesto a los escolares. El análisis de los resultados nos ha posibilitado observar que a la hora de intentar descubrir los patrones o regularidades los escolares aplican diferentes estrategias, procedimientos y conceptos, que de acuerdo con las investigaciones expuestas anteriormente, tienen unas connotaciones cognitivas de carácter evolutivo. Este hecho nos ha permitido enunciar nuestra segunda hipótesis:

**H2: "Las diferentes estrategias inductivas que permiten completar con éxito tareas de continuar series de números naturales se pueden organizar en un modelo teórico de desarrollo que explica y describe, en seis niveles diferenciados, la evolución del razonamiento inductivo numérico en los escolares de 6 a 12 años"**

El carácter evolutivo del razonamiento inductivo numérico nos plantea que no solo depende de la instrucción recibida y, por tanto, que un logro en aritmética no significa un avance inmediato en razonamiento inductivo numérico. Para contrastar este hecho nos hemos restringido a los cálculos algorítmicos, comparando los resultados obtenidos por los escolares en cálculo y en tareas de continuar series en la que se deben aplicar dichos cálculos. En vista a los resultados obtenidos podemos enunciar con precisión nuestra tercera hipótesis:

**H3:"El dominio del algoritmo de una operación no se traduce de manera inmediata en una nueva competencia en razonamiento inductivo numérico. En los escolares de Educación Primaria existe un desfase de al menos dos años desde que aprenden un procedimiento, propiedad o concepto aritmético hasta que lo integran en sus capacidades de razonamiento inductivo numérico"**

#### **Hipótesis complementaria**

Con carácter complementario, y como consecuencia del estudio realizado para la Memoria de Tercer Ciclo (Ortiz, 1993), enunciamos una cuarta hipótesis. Al detectar el efecto tope en una muestra significativa de alumnos de Educación Primaria, nos hemos planteado que tal efecto pueda ser sistemático y, por tanto, que se vuelva a producir en situaciones análogas. Ello nos plantea una hipótesis complementaria de investigación, que hemos enunciado como sigue:

**Hc "El efecto tope no es un efecto casual y local. Se produce en cualquier muestra importante de escolares de Educación Primaria que realice una prueba de continuar series preparada intencionadamente con tal fin".**

Francisco Fernández, ECAL, Apdos 3.2 y 3.3.

### **3.2. Enfoque confirmatorio de la investigación: Hipótesis a contrastar.**

La resolución de problemas verbales algebraicos elementales por parte de sujetos de una población estudiantil, en distintos niveles de estudios, que sólo han recibido instrucción en Álgebra Elemental durante el período escolar (hasta 16 años), puede verse influenciada por el tiempo transcurrido desde han recibido dicha instrucción.

Utilizaremos un diseño comparativo-transversal para contrastar las hipótesis que se refieren a la comparación entre grupos de sujetos.

Enunciamos a continuación las hipótesis específicas que vamos a contrastar.

Hipótesis 1. Existen diferencias significativas en el planteamiento en la resolución de problemas verbales algebraicos dependiendo del grupo de edad/nivel académico al que pertenecen los estudiantes.

Hipótesis 2. Existen diferencias significativas en la ejecución en la resolución de problemas verbales algebraicos dependiendo del grupo de edad/nivel académico al que pertenecen los estudiantes.

Hipótesis 3. Existen diferencias significativas en el desempeño final en la resolución de problemas verbales algebraicos dependiendo del grupo de edad/nivel académico al que pertenecen los estudiantes.

La elección de unos u otros sistemas de representación facilitan o dificultan la resolución correcta de las tareas algebraicas. La complejidad de algunas variantes de las tareas suelen ser obstáculo para el éxito en la aplicación de algunos sistemas de representación. La utilización de sistemas de representación económicos y potentes favorecen una resolución correcta de los problemas verbales algebraicos. Por lo tanto, podemos contrastar las siguientes hipótesis también mediante un diseño comparativo-transversal:

Hipótesis 4. Existen diferencias significativas en el planteamiento en la resolución de problemas verbales algebraicos dependiendo de la tipología de resolutor.

Hipótesis 5. Existen diferencias significativas en la ejecución en la resolución de problemas verbales algebraicos dependiendo de la tipología de resolutor.

Hipótesis 6. Existen diferencias significativas en el desempeño final en la resolución de problemas verbales algebraicos dependiendo de la tipología de resolutor.

La determinación de posibles tipologías de resolutores a través de un estudio de clusters, tomando como referencia el sistema de representación con se abordan los problemas, implicará la descripción de las características comunes a los sujetos que componen cada una de las tipologías. La confirmación de que esas características son adecuadas a cada una de las tipologías que se obtengan nos llevará a formular la siguiente hipótesis, que confirmaremos mediante un estudio de casos:

Hipótesis 7. Se confirma que los casos procedentes de las tipologías/clusters de resolutores se ajustan a las características de cada una de las tipologías obtenidas.

### **3.3. Racionalidad de las hipótesis: sentido y lateralidad.**

#### **3.3.1. Diferencias entre los grupos de edad/nivel académico.**



En las tres primeras hipótesis tratamos de verificar si los estudiantes, con el paso del tiempo, han mantenido un cierto poso o fondo de competencias acerca de una actividad, como es la aplicación del razonamiento algebraico en la resolución de un problema verbal.

Es evidente que cuando ha pasado un período de tiempo suficiente en el que no se ha practicado una actividad, como en nuestro caso son las tareas de tipo algebraico, se pueden haber olvidado algunas rutinas y procedimientos memorísticos que se utilizaron en la época escolar.

Entonces tenemos, por un lado sujetos que están recibiendo enseñanza específica sobre Álgebra Escolar y resolución de problemas algebraicos y, por otro, sujetos que después del período de Secundaria no han vuelto a recibir enseñanza sobre matemáticas.

También tendremos en cuenta que los sujetos de los grupos de más edad/ nivel académico que contemplamos están en el circuito estudiantil, bien porque no lo han abandonado, continuando los estudios en niveles superiores, bien porque al cabo de cierto tiempo han vuelto a la Universidad para elevar su nivel académico inicial (caso muy frecuente entre los estudiantes de los dos últimos cursos de Pedagogía, que provienen de Diplomados en Magisterio, quienes incluso han ejercido o están ejerciendo como Profesores de Primaria).

Esta circunstancia nos permite conjeturar que, en los grupos de estudiantes universitarios, tiene que haberse producido también un proceso lógico de maduración de pensamiento y capacidad de razonamiento, que pueda compensar de alguna forma el olvido debido al paso del tiempo. Esta maduración, junto con la memoria a largo plazo de los aprendizajes significativos de los conceptos algebraicos más elementales, en la etapa escolar, deberá de ponerse en juego para abordar y resolver las tareas algebraicas propuestas.

Las Hipótesis 1, 2 y 3 suponen que existen diferencias significativas entre los grupos de sujetos, tomados por el tiempo transcurrido desde que recibieron instrucción algebraica, en cada una de las fases que se consideran en un problema verbal algebraico.

Nuestra intuición inicial es que deben existir diferencias significativas entre los grupos de edad/ nivel académico, en el sentido de que la cercanía a la instrucción algebraica producirá mejores resultados en cualquiera de las fases de la resolución de los problemas algebraicos.

Abrazamos una hipótesis inequívocamente unilateral, en el sentido de que el grupo de sujetos que está finalizando la Enseñanza Secundaria Obligatoria, por estar recibiendo una instrucción permanente y sostenida sobre los contenidos de Álgebra Elemental y poniendo en práctica casi a diario el lenguaje algebraico aprendido para la resolución de problemas verbales algebraicos, debe tener mayor dominio sobre las tareas propuestas en nuestro estudio. Tales tareas, que pueden considerarse como continuación de la actividad de enseñanza del Álgebra en la E.S.O., como una actividad más dentro de contexto, no deben suponer mayor dificultad.

Sin embargo, los sujetos de los grupos de estudiantes universitarios para los que han transcurrido más de 3 años sin recibir instrucción algebraica explícita, que no han seguido estudiando matemáticas puesto que han elegido estudiar humanidades, pueden encontrar mayores dificultades en resolver las tareas algebraicas propuestas. En efecto, el Álgebra puede considerarse como un lenguaje matemático y, como tal lenguaje, si no se practica se llega a olvidar. Como su práctica suele darse en el ámbito escolar o en la enseñanza superior, y no es habitual en situaciones extra-escolares, los estudiantes “de letras” no han vuelto a ejercitar sus conocimientos algebraicos. Sólo queda un poso o fondo de conocimientos, debido básicamente al aprendizaje significativo previo, pero también efecto de la madurez propia del desarrollo intelectual y de la adquisición de niveles culturales y académicos superiores. Estas diferencias pretendemos confirmarlas mediante contrastes de las tres primeras hipótesis enunciadas.

José María Gairín, NRP. Apdo. III.5

Con los supuestos anteriores se configuran las **Hipótesis** que se pretenden contrastar en nuestro estudio:

**Sostenemos que:**

- Uno:** Es viable una propuesta con las condiciones enunciadas que nos permita profundizar en el conocimiento del conjunto de los **Números Racionales** con un grupo de estudiantes de la **Diplomatura de Maestro**, en la especialidad de **Educación Primaria**. Además, el desarrollo en el aula de la mencionada propuesta permitirá recoger información relevante de la comprensión de estos estudiantes sobre el conjunto de los **Números Racionales**
- Dos:** Existen relaciones entre los conocimientos personales sobre los **Números Racionales** de los estudiantes para maestros y el conocimiento personal profesional de esos mismos estudiantes, que se expresan en las decisiones y orientaciones que adoptan ante determinadas tareas escolares.

Francisco Gil, MCyCP. Apdo. 3.3.

### **3.3 Hipótesis**

Con las hipótesis avanzamos en la representación de nuestro problema de investigación en términos del ámbito de investigación presentado en el primer capítulo, del marco teórico presentado en el segundo capítulo y del marco metodológico que presentamos en este capítulo.

A partir de los dos propósitos iniciales y los ocho objetivos anteriores, damos forma a nuestro problema de investigación con las hipótesis que pasamos a enunciar. Pretendemos expresar conjeturas que proporcionen algún modo de interpretación o explicación del fenómeno en estudio. Con las hipótesis también tratamos de dar rigor y claridad al problema que queremos estudiar.

*Hipótesis General:* Las concepciones y creencias de los profesores sobre evaluación en matemáticas son un constructo complejo, conectado con las concepciones y creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina; ambos constructos están determinados por un número considerable de factores que, no obstante, se aglutinan en torno a un factor general sobre evaluación y un segundo factor general sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Ambos constructos están relacionados y permiten determinar tendencias en el pensamiento de los profesores.

Esta hipótesis general la desglosamos en las siguientes hipótesis parciales:

\* Las creencias y concepciones de los profesores de matemáticas sobre evaluación y

sobre enseñanza y aprendizaje, recogidas mediante encuesta de opinión, pueden estructurarse en un sistema de categorías.

\* La determinación empírica de tales categorías proporciona un conjunto adecuado de variables y factores para establecer y estudiar los constructos: creencias y concepciones de los profesores de matemáticas sobre evaluación y concepciones y creencias de los profesores de matemáticas sobre enseñanza y aprendizaje.

\* Las valoraciones de los profesores de matemáticas sobre cada uno de los componentes del constructo evaluación y sobre cada uno de los componentes del constructo enseñanza y aprendizaje, recogidas mediante una escala de actitud permiten establecer un estado de opinión sobre ese constructo y determinar tendencias de pensamiento entre los profesores.

\* Los constructos concepciones y creencias del profesor sobre evaluación y concepciones y creencias sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas guardan relación de dependencia, que se puede caracterizar y describir.