

## ENSEÑANZA Y COMPRENSIÓN DE ESTOCÁSTICOS EN TERCER GRADO DE SECUNDARIA

Orlando Vázquez Pérez; Ana María Ojeda Salazar  
DME. Cinvestav, IPN

México

kepler74@hotmail.com, amojeda@cinvestav.mx

Campo de investigación: Pensamiento relacionado con  
probabilidad

Nivel: Básico

**Resumen.** *Se presentan resultados de la aplicación de un cuestionario sobre estadística y el enfoque clásico de probabilidad, antes y después de la enseñanza, con el propósito de estudiar diferencias entre ambas aplicaciones de la comprensión de esos contenidos de 37 alumnos de 13-15 años de edad. La estrategia de enseñanza puso en juego una propuesta institucional (SEP, 2006; Filloy et al, 2006). Las dificultades de comprensión de ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) manifestadas por los alumnos señalan la necesidad de un seguimiento a lo largo de la educación básica y media superior sobre su enseñanza; asimismo, se requiere diseñar estrategias de enseñanza que presenten significativamente situaciones azarosas de manera sencilla y gradual. El término estocásticos se refiere a los temas de Probabilidad y Estadística.*

**Palabras clave:** Estocásticos, comprensión, enseñanza, secundaria

### Introducción

Estudios previos (Elizarraras, 2004; Vázquez, 2004) revelan que los alumnos de secundaria manifiestan dificultades de comprensión de los enfoques clásico y frecuencial de probabilidad aún para situaciones sencillas, lo cual augura más dificultades en los niveles educativos medio superior y superior (Ojeda, 1994). La presente investigación se interesó en la confluencia de ideas fundamentales de estocásticos, el uso e interpretación que dan los alumnos a medidas de tendencia central, a gráficas para organizar la información y a diagramas de árbol para identificar el espacio muestra de un fenómeno aleatorio y asignar probabilidades a sus eventos.

### Perspectiva teórica

Se consideran referentes en tres órdenes de ideas:

i) *Orden epistemológico*. Piaget e Inhelder (1951) afirman que la idea de azar no es innata y que el desarrollo mental operatorio pasa por tres etapas: preoperatoria (2 a 7 años), operaciones concretas (7 a 12 años) y operaciones formales (12 a 14 años) (pp. 212-245). Estos autores argumentan que la idea de azar se inicia cuando el infante accede a la etapa de las operaciones concretas. De sus estudios resulta que las operaciones combinatorias y la idea de proporción se desarrollan hasta el nivel del pensamiento formal, lo cual permite el inventario completo de posibilidades (espacio muestra) y la cuantificación de sus probabilidades. No obstante, Fischbein (en Colín *et al.*, 1993) critica estos resultados al señalar que no todos los sujetos de esta edad son capaces de descubrir el método de construcción de combinaciones y considera que, aún en el nivel de las operaciones formales, las técnicas combinatorias no se adquieren espontáneamente sino que su enseñanza es necesaria. Heitele (1975) denomina *modelo explicativo* al proporcionado por las ideas fundamentales, que son las que interesa enseñar al estudiante a lo largo de toda su educación. Estos modelos implican nociones, conceptos y sus interrelaciones; y se distinguen en los distintos niveles cognoscitivos no estructuralmente sino en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración. Son diez ideas las que propone: medida de probabilidad, espacio muestra, regla de adición, regla del producto e independencia, equidistribución y simetría, combinatoria, modelo de urna y simulación, variable aleatoria, ley de los grandes números, y muestra.

ii) *Orden Cognitivo*. La obra de Fischbein (1975) sobre fuentes de la intuición probabilística plantea que “La enseñanza en estocásticos no sólo es posible, sino necesaria en niveles educativos tan tempranos como lo son los básicos [preescolar, primaria y secundaria]. La ausencia de una enseñanza en tales niveles redundaría en el arraigo de intuiciones erróneas, que con la edad vienen a ser más y más difíciles de erradicar” (en Colín *et al.*, 1993, pp. 38-39). En tanto Frawley (1999), al considerar el tránsito del procesamiento de la información a la conciencia, alude al sujeto como máquina-humano, en cuya mente confluyen simultáneamente las partes interna y externa de la mente humana; plantea que

la experiencia subjetiva se presenta de tres formas. La primera, el procesamiento no consciente, ocurre cuando se proporciona una respuesta inmediata (contestación automática), sea o no correcta o que se haya comprendido (Frawley, pp. 155-156). La segunda, la conciencia, “ocurre cuando un sujeto parece estar interpretando sobre la experiencia” (op. cit. p. 157). La metaciencia, la tercera, se refiere a “la toma de conciencia y la organización deliberada de la experiencia” (p. 157); ésta cobra importancia pues establece el diálogo interno por medio del *habla privada o lenguaje para el pensamiento*.

*iii) Orden social: la interacción en el aula.* Steinbring (1991) señala que la epistemología del conocimiento matemático está determinada principalmente por condiciones sociales; la participación del docente, las actividades que realiza el alumno y el conocimiento matemático determinan, con mucho, el proceso de enseñanza, en el cual interactúan tanto quien enseña como quienes aprenden.

### **Elementos de método y técnicas empleadas**

Esta investigación es cualitativa (Eisner, 1998). Participó un grupo de 37 estudiantes (14-15 años) de tercer grado de secundaria. El estudio se constituyó en dos fases: la primera se refirió a la enseñanza de estocásticos y su desarrollo; la segunda atendió a los antecedentes a la enseñanza y a los resultados en la comprensión de los estudiantes de los contenidos enseñados. Los criterios de análisis de los datos recopilados con los instrumentos aplicados (estrategia de enseñanza, guión de observación en el aula, hojas de control y cuestionario) fueron: ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos, recursos para organizar y tratar la información, términos utilizados, situación planteada y estructura.

*Fase 1: Caracterización de la enseñanza.* La propuesta institucional, plasmada en el *Plan y Programas de Estudio de Matemáticas* (SEP, 2006) y en un libro de texto (Fillooy et

al., 2006) que satisface los propósitos y contenidos del primero, se sometieron a escrutinio; se tuvo así un referente para considerar la enseñanza en el aula. Para ésta, uno de los presentes investigadores desarrolló la estrategia de enseñanza de manera directa con el grupo y con su profesor titular. Se utilizaron cuatro lecciones propuestas para estocásticos en tercer grado de educación secundaria del libro de texto citado. De las cuatro lecciones consideradas, tres se refirieron a los temas de presentación y tratamiento de la información y una a probabilidad. Cada sesión, de un total de cinco, tuvo una duración de 50 minutos y fue videograbada para su análisis posterior; en cada una se promovió la participación del grupo y se suministró a cada estudiante el material necesario para desarrollar las lecciones y hojas de control. Al término de cada sesión se solicitó que entregaran éstas para analizar sus respuestas a las preguntas ahí planteadas.

*Fase 2. El cuestionario y su aplicación.* Se diseñó un cuestionario de opción múltiple, presentado en hojas impresas, que contuvo cinco problemas sobre el enfoque clásico, uno sobre medidas de tendencia central y dos sobre estadística. Para obtener mayor información sobre la opción seleccionada, una de cuatro, se solicitó al estudiante que justificara la elección de manera escrita. Sin cambio alguno, el cuestionario se aplicó dos veces, cada una con duración de 60 minutos, antes de iniciar la enseñanza y cuatro meses después de la primera aplicación, periodo que contuvo el desarrollo de la enseñanza. El propósito fue identificar diferencias en el desempeño de los estudiantes.

La Figura 1 presenta a modo de ejemplo dos de los problemas planteados en el instrumento (problemas 3 y 7). La respuesta correcta se indica en negrita. Con las opciones propuestas en el problema 3 se buscó evidencia de si el estudiante consideró el espacio muestra, además de si aplicó el enfoque clásico de probabilidad; de este modo, el inciso **a** no establece los casos favorables al evento cuya probabilidad se demanda; el inciso **b** (correcto) consideró el evento que incluye todos los casos favorables en relación a los casos posibles; el inciso **c** previó la dificultad en la identificación de la variable aleatoria

en cuestión y el inciso **d** manifiesta el desconocimiento del espacio muestra del fenómeno implicado.

<p>3. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados, el <b>producto</b> de los puntos de las caras hacia arriba sea 12?</p> <p>A) <math>\frac{12}{36}</math> B) <math>\frac{4}{36}</math> C) <math>\frac{1}{36}</math></p> <p>D) Ninguna de las anteriores</p> <p>¿Por qué? _____</p>	<p>7. Traza un diagrama de árbol para 3 volados. Marca en el árbol lo que corresponda al evento “cayeron dos águilas”.</p> <p>a) En total, ¿Cuántos posibles resultados hay? _____</p> <p>b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener sólo águilas? _____</p> <p>c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener sólo sol? _____</p> <p>d) ¿Qué es más probable que caigan, sólo águilas o sólo soles? _____</p> <p>¿Cómo obtuviste las respuestas de los incisos b, c y d?</p> <p>_____</p> <p>_____</p> <p>¿Por qué? _____</p>
---	--

Figura. 1. Ejemplos de problemas propuestos en el cuestionario.

Para el problema 7, la justificación de los incisos informa de si los estudiantes han tenido un acercamiento con el trazado de diagramas de árbol, por consiguiente, cada uno de los incisos anticipa si el estudiante establece el espacio muestra del fenómeno (lanzamiento de tres volados) y si aplica la regla del producto.

### Resultados generales del cuestionario

**Fase 2.** La Figura 2 muestra los resultados obtenidos con las dos aplicaciones del cuestionario. En general, el cuestionario fue difícil para los estudiantes, pues sólo para cuatro problemas se obtuvo 60% o más de respuestas correctas. Por ejemplo, en la primera aplicación, para el problema 3 sólo un estudiante eligió la respuesta correcta, pero no justificó su elección. En la segunda aplicación del cuestionario cuatro estudiantes (13.51%) contestaron correctamente, pero sin justificar su elección; de forma

inconsistente, el estudiante que eligió la opción correcta en la primera aplicación no lo hizo en la segunda.

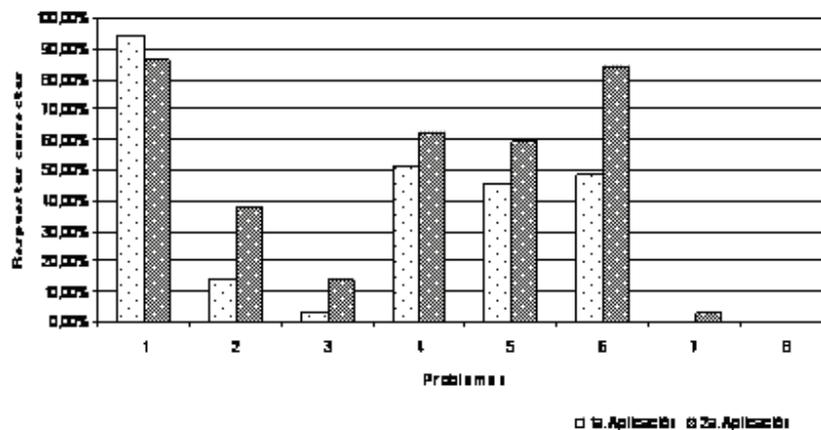


Figura 2. Resultados obtenidos en la primera y segunda aplicación del cuestionario.

En cuanto al problema 7, en la primera aplicación nadie lo contestó correctamente. En la segunda, sólo un estudiante contestó correctamente los incisos *a* y *d*, pero de modo incorrecto los otros incisos. De acuerdo con Frawley (1999), en este caso hubo una transición del procesamiento no consciente a la conciencia (ver Figura 3). Además, diez respuestas otorgadas a este problema revelaron una interpretación literal (ver Figura 4); todas las respuestas dadas aludieron al enfoque frecuencial; dos se refirieron a la “suerte” para justificar su respuesta (ver Figura 5); diez estudiantes no contestaron.

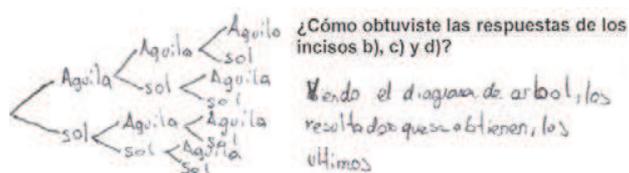


Figura 3. Del procesamiento no consciente a la conciencia.

¿Cómo obtuviste las respuestas de los incisos b), c) y d)?  
 Viendo el diagrama de árbol, los resultados que se obtienen, los últimos



Figura 4. Algunos trazos de diagrama de árbol de manera literal.

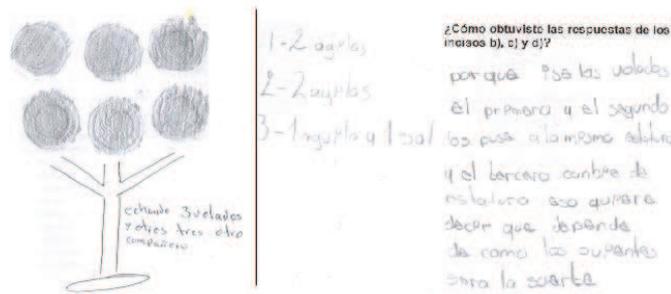


Figura 5. Alusión al enfoque frecuencial de probabilidad y a la “suerte”.

En la segunda aplicación, ocho estudiantes no contestaron el problema 7; diez contestaron de manera literal, uno de los cuales aludió a la “suerte”, mientras cuatro justificaron su respuesta refiriéndose a la realización de los volados (ver Figura 6); dos intentaron trazar el diagrama de árbol pero no lo completaron; cinco lo trazaron correctamente pero contestaron de manera incorrecta los incisos *a*, *b*, *c* y *d*.

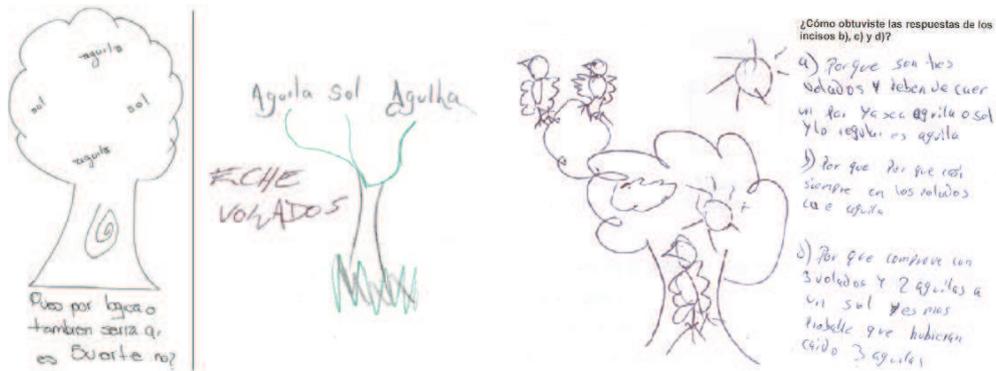


Figura 6. Requerimiento de realizar el ensayo y alusión a la suerte.



## Resultados de la caracterización de la enseñanza

**Fase 1.** El estudio documental de la propuesta institucional para probabilidad proporcionó un marco para considerar la práctica docente. La obra de Filloy *et al.* (2006), utilizada en la enseñanza, está constituida por 5 bloques, de los cuales siete se refieren a estadística, principalmente con el uso de tablas de frecuencia absoluta y relativa, así como de gráficas de barras y circulares. Respecto a probabilidad, dos lecciones tratan sobre combinatoria, cinco lecciones se refieren al enfoque clásico y sólo dos implican tanto al enfoque clásico como al frecuencial. Algunas lecciones consideran problemas distintos, pero en general prevalece una sola situación; no proponen ejemplos ni ejercicios complejos; el uso de notaciones simbólicas es escaso. Plantean tablas de doble entrada y gráficas tanto para los temas de estadística como para los de probabilidad.

La enseñanza se desarrolló con sólo cuatro lecciones en cinco sesiones. Antecedió a éstas el desconocimiento de los estudiantes de contenidos de probabilidad. Se les plantearon dos preguntas abiertas: ¿te han enseñado temas de probabilidad y estadística?, ¿te han enseñado el tema de diagrama de árbol? A la primera pregunta, 17 estudiantes contestaron por escrito que no se les habían enseñado y nueve contestaron que sí. A la segunda pregunta, 18 estudiantes contestaron que no y nueve señalaron que sí se los habían enseñando en primero y segundo de secundaria.

*Dificultades de enseñanza.* Se diseñó una actividad (Carrera con dados) según la sugerencia presentada en la lección 94 (Filloy *et al.*, 2006). La situación planteada en la actividad consistió en considerar del lanzamiento de dos dados ordinarios la suma de números (de puntos) en las caras que quedan hacia arriba; la lección implicó los enfoques frecuencial y clásico de la probabilidad. Se le consideró apropiada para la enseñanza pues, de acuerdo a Steinbring (1991), “la relación fundamental entre azar y regularidad entre fenómenos aleatorios, irregulares por un lado, y las ideas matemáticas de su modelaje y descripción de una manera regular y formal, por el otro, permiten una base intuitiva para la ley de los grandes números” (p. 504) Sin embargo, para los alumnos fue difícil la

discriminación entre el espacio muestra y el conjunto de valores posibles de la variable aleatoria, y la de medida de probabilidad (distribución de probabilidades). La Tabla 1 resume el análisis de la actividad.

Tabla 1. Criterios de análisis.

Lección	Situación planteada	Ideas fundamentales	Otros conceptos	Términos utilizados	Recursos para tratar y organizar la información
Carreras con dados	Trece corredores, compiten avanzando una casilla, en una pista de 11, según la suma de los resultados del lanzamiento de dos dados ordinarios.	Medida de probabilidad, espacio muestra, regla de adición, independencia, equidistribución y simetría, combinatoria.	Números naturales, su orden, adición, parejas ordenadas.	Azar, mayor número de posibilidades, menos posibilidades, imposible, casi seguro, mismas posibilidades, imposible, probabilidad.	Lengua natural, figuras, tablas, símbolos numéricos.

Cuando se realizó la actividad, ganó el número (corredor) 7 (no hubo empates); se registraron todas las posibilidades para cada suma y se les organizó en una tabla, donde fue aparente que la suma 7 tenía la mayor probabilidad de obtenerse. No obstante, la coincidencia de este resultado con el de la realización efectiva de la actividad no fue suficiente razón para que los alumnos aceptaran la suma como más probable, pues ante la pregunta “*Si volvieras a jugar, ¿Qué número de corredor elegirías?*”, 15 estudiantes contestaron que elegirían el número 8, sólo siete optaron por la elección del corredor 7, el resto eligieron otros números de corredores. Este tipo de respuesta es similar al otorgado por docentes al presentárseles la misma actividad (Vázquez, 2004, pp. 98-99). A este respecto, Frawley (1999) señala que “los niños y los adultos se desempeñan de manera muy semejante” (p. 46).

### Comentarios generales

Los resultados obtenidos permiten afirmar que para el eje de tratamiento de la información, los estudiantes no tienen dificultades para completar gráficas, ni para calcular el promedio de una cantidad. Sin embargo, con los temas de probabilidad el escenario es distinto; aunque la enseñanza pudo haber contribuido para que en la segunda aplicación del cuestionario se hubiera obtenido un porcentaje mayor de respuestas correctas que en la primera, la diferencia no fue significativa. Un factor a considerar aquí es que el número de lecciones fue insuficiente para erradicar dificultades de comprensión provenientes de una ausencia de enseñanza. Aun cuando en el aula se dio un solo ejemplo de trazado del diagrama de árbol, no se esperaban los desempeños manifiestos en el cuestionario. Por otro lado, las expresiones utilizadas en las justificaciones proporcionadas revelaron una introducción gradual y sistemática de los términos referidos a estocásticos. Destacó el uso de la palabra “suerte”, como “ocurrencia de un evento poco probable” o como coincidencia de la anticipación de un resultado posible con su ocurrencia. Se propone el uso sistemático de tablas, gráficas y diagramas que *prefiguren* (Fischbein, 1975) la distribución de probabilidades para tratamientos sencillos de fenómenos aleatorios, a los que otorguen sentido los estudiantes para renunciar a la simple atribución al azar como causa de la ocurrencia de eventos y dar paso a un análisis de las posibilidades.

Una limitante en este estudio fue que sólo se desarrollaron cuatro lecciones con el libro de texto citado. Se requieren más sesiones para aliviar los efectos de una ausencia de la enseñanza de temas de estocásticos en la educación básica.

## Referencias bibliográficas

Colín, J., Garnica, I. & Ojeda, A. M. (1993). Intuición y Probabilidad desde el punto de vista de Fischbein. *Cuadernos de Investigación* No. 26 Año VII. PNFAPM, Cinvestav del IPN. México.

Eisner, E. (1998). *El ojo ilustrado. Indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa*. Paidós, España.

Elizarraras, S. (2004). *Enseñanza y comprensión del enfoque frecuencial de la probabilidad*. Tesis de maestría. DME, Cinvestav-IPN, México.

Fillooy, E., Rojano T., Figueras, O., Ojeda, A. M. & Zubieta, G. (2006). *Matemática Educativa. Primer Grado*. McGraw Hill, México.

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Reidel Publishing Company, USA.

Frawley, W. (1999). *Vygotsky y la ciencia cognitiva*. Paidós, España.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6 pp. 187-205. Reidel, Holland.

Ojeda, A. M. (1994). *Understanding Fundamental Ideas of Probability at Pre-university Levels*. Ph. D. Thesis. King's College London. U. K..

Piaget, J. & Inhelder, B. (1951). *La génesis de l'idée de hasard chez l'enfant*. PUF. Paris.

SEP. (2006). *Programas de estudio 2006*. México.

Steinbring, H. (1991). The Concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowledge. *Educational Studies in Mathematics* 22, pp. 503-522. Kluwer Academic Publishers. Holland.

Vázquez, O. (2004). *Enseñanza y comprensión del enfoque clásico de la probabilidad en primer grado de secundaria*. Tesis de maestría. DME, Cinvestav IPN. México.