¿ES POSIBLE INNOVAR EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL? TRABAJAMOS CON LA DERIVADA

Adriana Engler
Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral (Argentina)
aengler@fca.unl.edu.ar

Resumen. El cálculo diferencial y, en particular, el estudio del comportamiento variacional de las funciones, es fundamental para analizar los cambios que ocurren en los fenómenos y, en consecuencia, para formular modelos. En este artículo se trabajan ideas para innovar en el aula universitaria cuando se desarrollan contenidos del mismo. A modo de ejemplo se presenta una propuesta didáctica para comenzar el estudio de la derivada. En ella se combina lo verbal, lo gráfico, lo numérico y lo algebraico y se ponen en un primer plano los aspectos conceptuales por sobre el aprendizaje de reglas a fin de establecer una dinámica de trabajo más activa y más próxima al quehacer matemático.

Se comparten ideas para la incorporación y utilización de diferentes recursos en la tarea diaria buscando que el trabajo desarrollado en didáctica del cálculo así como en los proyectos de innovación para su enseñanza refleje sus resultados al interior de las aulas.

Palabras clave: enseñanza, cálculo diferencial, innovación

Abstract. Differential calculus and, in particular, the study of variational behavior of functions, is essential to analyze the changes occurring in the phenomena and therefore to model. This article shows ideas for innovative work in the university classroom when working contents of calculus. As an example we present a didactic proposal to begin the study of the derivative. It combines verbal, graphic, numeric and algebraic and brought up the conceptual aspects of the learning of rules to establish a workflow more active and closer to the mathematical tasks.

Different ideas are shared for the incorporation and use of different resources in the daily task so the work done at teaching calculus as well as innovation projects in education reflects the results inside the classroom.

Key words: teaching, differential calculus, innovation

El aula de matemática

En el ámbito de la Educación Matemática resultan conocidas las investigaciones en relación a las dificultades en el aprendizaje. A principios de los noventa, los investigadores comienzan a considerar que en el estudio de las circunstancias que permiten construir conocimiento no se pueden dejar de lado aspectos sociales y culturales. Surgen una serie de trabajos con una orientación común: la necesidad de analizar la relación de los conceptos con prácticas socialmente compartidas y con sentidos y significados extra matemáticos (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza, 2003). La actividad humana juega un papel importante ya que es considerada como la fuente principal de la reorganización de la obra matemática que implicará el rediseño del discurso matemático escolar en todos los niveles. La matemática es una producción cultural. Sadovsky (2005, p.22) expresa: "Cultural, porque sus producciones están permeadas en cada momento por las concepciones de la *sociedad* en la que emergen, y condicionan aquello que la *comunidad de matemáticos* concibe en cada momento *como posible y* *como relevante*". Además manifiesta "La matemática es también un *producto social*, porque es resultado de la interacción entre personas que se reconocen como pertenecientes a una misma comunidad" (p.23).

Todo esto hace que la actividad matemática en el aula no pueda ser abordada de una manera sencilla. Su enseñanza debe contribuir a que el estudiante desarrolle sus potencialidades y logre la formación de un pensamiento productivo, creador y científico. La enseñanza entonces no puede quedar aislada de la realidad en la que surge. Es importante crear en el estudiante la necesidad de aprender y generar un ambiente donde se posibilite y se motive la exploración del significado personal de los conceptos.

La enseñanza del cálculo diferencial

El cálculo diferencial y, en particular, el estudio del comportamiento variacional de las funciones, es fundamental para analizar los cambios que ocurren en los fenómenos así como para formular modelos. Debido a la complejidad de los procesos que intervienen en el cálculo (abstracción, demostración, generalización, visualización, entre otros), las investigaciones relacionadas se ubican dentro del campo denominado "Pensamiento Matemático Avanzado". En este marco, la línea de investigación del *Pensamiento y Lenguaje Variacional* estudia la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos (Cantoral y Farfán, 2000). Los conceptos básicos sobre los cuales se construye la matemática de la variación y el cambio son el de variable y el de función. Dolores (2007) recomienda:

> (…) ubicar como eje rector de todo el curso de Cálculo Diferencial al estudio de la variación, de modo que la derivada no sea un concepto matemático abstracto sino un concepto desarrollado para cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica (p.198).

En general los investigadores proponen que el primer contacto que los alumnos tengan con las nociones y conceptos del cálculo sea enfrentarlos con aquellas situaciones problemáticas que favorezcan de una manera natural su construcción. Sin embargo aún se nota una gran brecha entre la realidad del aula (innovación) y las investigaciones científicas (Moreno, 2005, c. p. Zaldívar, 2006).

Incorporación de la informática en el ámbito escolar

No cabe duda de que los avances tecnológicos deben ser adoptados a los fines educativos y adaptados a la filosofía de la educación, así como a sus necesidades y derivaciones pedagógicas y didácticas. Duart y Sangrá (2000), expresan que la educación no puede estar ajena al potencial que los nuevos espacios de relación virtual aportan. Ante la rapidez de la evolución tecnológica, ahora más que nunca, la educación debe manifestarse claramente y situar a la tecnología en el lugar que le corresponde: el de medio eficaz para garantizar la comunicación, la interacción, la información y, también, el aprendizaje.

La informática educativa juega un papel importante en el aula, puesto que resulta un instrumento facilitador y motivador del proceso de enseñanza y permite considerar la singularidad del alumno en su ascenso cognoscitivo. Incorporar los avances tecnológicos implica adoptar, adaptar e integrar las nuevas herramientas al trabajo cotidiano, a fin de tornarlo más eficaz y productivo atendiendo al progreso y a las transformaciones sociales.

Numerosas investigaciones muestran además que el surgimiento de la computadora en el campo educativo ha potenciado la posibilidad de la explotación de las distintas representaciones en la enseñanza de la matemática.

¿Es posible innovar en el aula universitaria?

En este contexto, y para dar respuesta a la pregunta planteada en este trabajo se torna necesario compartir algunos considerandos interesantes en relación a la idea de innovación. En este sentido Balbuena (1996) expresa:

> Como punto de arranque, considero la innovación aplicada a nuestro campo, como aquellas experiencias que suponen acciones prácticas y sistemáticas por medio de las cuales se intenta producir y promover ciertos cambios tanto en la forma de aprender y de enseñar matemáticas, como para conseguir actitudes más positivas en torno a nuestra disciplina.
>
> (…) conseguir que los estudiantes se acerquen a las matemáticas de una forma distinta a como suele hacerse, que se superen ciertos tabúes e ideas preconcebidas, que la vean y la consideren como una amiga. (p.35)

También, en ese sentido, Cebrián (2007, p.21) manifiesta:

> (…) nuestro trabajo en el campo de la innovación está animado por la búsqueda de *cambios* que provoquen una mejora en las instituciones y en las prácticas educativas. (…). No podemos comprender que se persiga una innovación en educación que no busque, a la vez, un cambio y mejora en las conductas, en los pensamientos y planteamientos pedagógicos, en los procesos y la organización, en las metodologías, en las técnicas y recursos, en las normativas y legislación, etc.

Bajo estas premisas, los docentes debemos hacer esfuerzos para crear entornos de enseñanza donde la innovación esté mediada por propuestas que, a través de diferentes tipos de materiales educativos y/o cambios metodológicos, faciliten la adquisición y construcción de conocimiento de manera flexible y autónoma. La experiencia de años de trabajo en la universidad nos lleva a afirmar que estamos "*obligados a pensar que podemos y debemos innovar en el aula universitaria*". Ponernos en marcha para lograrlo es parte del rol profesional y un desafío cotidiano. Si, como docentes ocupados en la formación de futuros profesionales nos preocupa el aprendizaje, debemos lograr que los alumnos encuentren distintos caminos y formas de acercarse a la matemática perdiéndole el miedo y ayudándolos a que puedan vencer la barrera que creen que los separa de ella. La innovación debe ser algo propio del quehacer docente, sin embargo debemos prestar atención a una serie de considerandos que se deben tener en cuenta para no convertirla en una improvisación. Es importante revalorizar el trabajo en el aula y saber utilizar la experiencia y la trayectoria de muchos docentes-investigadores que comparten sus innovaciones y logros a través de numerosos artículos y presentaciones en congresos para animarnos a emprender esta tarea que, en muchos casos, no está lo suficientemente valorada.

Al comenzar a pensar en una innovación debemos convertirnos en "investigadores" que pretendemos mejorar nuestra tarea en el aula. Para poder desarrollarla adecuadamente no debemos descuidar la planificación rigurosa y la programación detallada de por qué, para qué, cuándo y cómo la vamos a llevar adelante. Tendremos que asegurarnos de que estarán dadas todas las condiciones institucionales para realizar la propuesta así como que contaremos con los materiales, recursos de infraestructura y tecnológicos que permitirán concretarla completamente. Debemos garantizar la calidad de nuestro trabajo innovador buscando producir cambios en el aula de manera inmediata.

Tan importante como la planificación es la evaluación que permitirá comparar, de alguna manera, los logros en relación a nuestro trabajo habitual o con otras innovaciones ya realizadas por nosotros mismos o por otros colegas. Es necesario tener en cuenta que no siempre los resultados van a ser buenos, mas allá de que la planificación y todas las condiciones sean las adecuadas para su implementación. En ese caso no tendremos que "darnos por vencidos" y esta situación tendrá que servirnos de estímulo para seguir innovando. Teniendo en cuenta todo lo manifestado hasta aquí, la respuesta contundente a la pregunta es SÍ. Pensar en innovaciones en la enseñanza del cálculo significa:

- animarnos a realizar modificaciones en el "contenido tradicional",
- realizar cambios metodológicos tendientes a ver cómo hacemos para que el estudiante se apropie de los conocimientos,

- lograr "alejarnos" de la organización de los contenidos indicados en los programas donde predomina un enfoque abstracto con escasa relación con fenómenos de variación,
- preguntarnos si los conceptos, procesos, objetos deben ser introducidos en forma verbal, numérica, gráfica o de una manera simbólica y cómo influyen una y otra de estas representaciones en las imágenes que los estudiantes se forman de los conceptos,
- poner en un primer plano los aspectos conceptuales por sobre el aprendizaje de reglas,
- realizar acciones tendientes a que los estudiantes construyan sus conocimientos en forma progresiva y su contacto con los mismos sea cada vez más profundo,
- incorporar en nuestra actividad docente los recursos que nos brindan las nuevas tecnologías de la comunicación y la información,
- desarrollar propuestas didácticas que favorezcan la construcción de significados y
- propiciar actividades que favorezcan el desarrollo de los procesos y conceptos propios del cálculo (función, límite, continuidad y derivada) en base a ideas variacionales.

A continuación, y teniendo en cuenta lo expresado en los apartados anteriores se presenta, sólo a modo de ejemplo y de manera incompleta, una propuesta de aula para comenzar el estudio de derivada. En ella se combina lo verbal, lo gráfico, lo numérico y lo algebraico y se ponen en un primer plano los aspectos conceptuales por sobre el aprendizaje de reglas de cálculo a fin de establecer una dinámica de trabajo más activa y más próxima al quehacer matemático.

La propuesta: Actividades para favorecer la comprensión de la derivada

- Con esta propuesta buscamos lograr que el alumno:
- Revalorice la idea de que los cambios relativos se miden por medio de razones o cocientes entre cambios.
- Se familiarice con el concepto de razón de cambio media y razón de cambio instantánea.
- Establezca relaciones entre razones de cambio y pendientes.
- Defina derivada de una función en un punto.

Fue diseñada para tratar los siguientes contenidos del Cálculo Diferencial:

- Razón de cambio media y su relación con la pendiente de la recta secante.

- Razón de cambio instantánea y su relación con la pendiente recta tangente.
- Derivada de una función en un punto.

Para el enunciado de las actividades se tuvieron en cuenta las concepciones previas de los alumnos acerca de problemas en los que se distinguen cambios destacando las ideas variacionales. La idea fue que utilicen los conocimientos previos para construir nuevos y que estos sirvan para aclarar ideas en relación a los anteriores. Las actividades permitieron organizar la enseñanza en torno a situaciones conocidas y cotidianas donde existe la necesidad de estudiar cambios entre magnitudes en fenómenos presentados en diversas representaciones (algebraica, numérica, gráfica y verbal). A lo largo de las tareas se propusieron interrogantes para explorar cómo la pendiente de una recta se relaciona con una razón de cambio.

Teniendo en cuenta la importancia de la interacción en la construcción de los conceptos, se propuso que los alumnos resuelvan las actividades en grupos de a dos y respondan claramente a los interrogantes e inquietudes planteados al finalizar cada actividad o grupo de actividades. Se logró cambiar el ambiente de la clase propiciando una dinámica de interacción social. La tarea del profesor fue de apoyo a los equipos, atendiendo a las preguntas pero intentando que ellos mismos encuentren las respuestas. En la última parte de la clase se realizó la puesta en común y una discusión grupal, revisando las distintas actividades y aprovechando las respuestas para formalizar los conceptos. Por supuesto que, en concordancia con este tipo de actividades, se planificó también la evaluación. En este caso la innovación está presente en el diseño de los materiales y en la forma de abordar el trabajo en el aula. Se desplaza la clase magistral por el taller de trabajo.

Actividad 1. Los datos de la tabla muestran los valores de la temperatura T de cierto volumen de agua tomadas en los tiempos t señalados.

Tiempo t en minutos	0	5	10	15	20	25
Temperatura T en ºC	15	25,5	55,7	95	85	62

Complete la siguiente tabla:

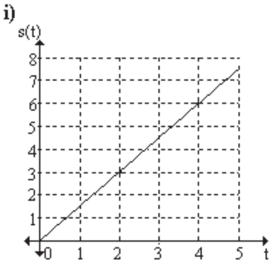
Intervalo de tiempo Δt	Cambio de temperatura (en ºC) $\frac{\Delta T}{\Delta t}$	Cambio de la temperatura con respecto al tiempo $\frac{\Delta T}{\Delta t}$
De t = 0 a t = 5		
De t = 5 a t =10		
De t = 10 a t =15		
De t = 15 a t =20		
De t = 20 a t =25		

Lea atentamente el problema. A partir de los datos de la tabla:

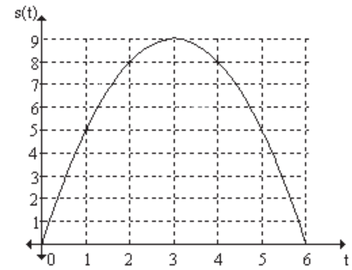
a) Realice la interpretación geométrica en un intervalo. *b)* ¿Qué significado tienen las mediciones hechas en cada columna de la tabla? *c)* ¿Es posible que algunos valores de la tercera columna sean positivos y otros negativos? ¿Qué interpretación le da a esta situación? *d)* Defina a que llamaría usted razón de cambio media.

Actividad 2. Las gráficas muestran la posición de dos partículas (en metros) en cada instante de tiempo t medido en segundos. Obtenga la velocidad media de cada partícula en intervalos de un segundo.

i)



ii)



Para reflexionar: ¿Qué diferencia observa con respecto al problema 1 en cuanto a la obtención de la información? Esboce las gráficas correspondientes a la velocidad media de cada partícula. Analice desde la Física el movimiento de cada partícula y explique el comportamiento de las gráficas de la velocidad media de cada una.

Actividad 5. La cantidad de calor h (en joules) que se necesita para convertir 1g de agua en vapor es función de la temperatura t (en ºC) de la atmósfera según la ley $h(t) = \dfrac{-8t + 7520}{3}$.

Complete la tabla. Encuentre las razones de cambio promedio de la cantidad de calor h con respecto a la temperatura t de la atmósfera, para $0 \le t \le 60$, en intervalos de 15º de amplitud.

Encuentre $\dfrac{\Delta h}{\Delta t}$ en forma analítica a partir de la ley que define la función.

Intervalos de temperatura (en ºC)	Cambio de la cantidad de calor Δh (en joules)	Cambio de la cantidad de calor con respecto a los cambios de la temperatura. $\dfrac{\Delta h}{\Delta t}$
$0 \le t \le 15$	$h(15) - h(0)$	
$15 \le t \le 30$		
$30 \le t \le 45$		
$45 \le t \le 60$		

Actividad 6. Un globo esférico se infla con un gas. Encuentre analíticamente la razón de cambio media del volumen con respecto al radio cuando éste cambia de 2m a 2,5m y cuando cambia de 2,5m a 3m. Complete las tablas. ¿Es posible calcular la variación del volumen cuándo el radio es exactamente 2,5m?

Intervalos	Cambio del volumen con respecto al cambio del radio. $\frac{\Delta V}{\Delta r}$
$2{,}4 \leq t \leq 2{,}5$	
$2{,}49 \leq t \leq 2{,}5$	
$2{,}499 \leq t \leq 2{,}5$	
$2{,}4999 \leq t \leq 2{,}5$	
$2{,}49999 \leq t \leq 2{,}5$	
$2{,}5 \leq t \leq 2{,}6$	
$2{,}5 \leq t \leq 2{,}51$	
$2{,}5 \leq t \leq 2{,}501$	
$2{,}5 \leq t \leq 2{,}5001$	
$2{,}5 \leq t \leq 2{,}50001$	

Para reflexionar: Después de leer, analizar y resolver las actividades 5 y 6 responda:

a) ¿Qué diferencia fundamental puede observar entre estos problemas? b) ¿Qué sucede si los intervalos son cada vez más pequeños? c) ¿Por qué se hace necesario calcular la razón de cambio en un instante particular? ¿Cómo calcularía la razón de cambio en un momento particular en cada problema? d) ¿Qué objetivo se quiere alcanzar al completar las tablas del problema 6? e) ¿Qué otros conocimientos están en juego en el problema?

Actividad 7. Un cuerpo se mueve de modo que su posición después de t segundos está dada por la ley $s(t) = 2t + 2$ metros. Determine la razón media de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo transcurrido, durante los primeros 5 segundos, en intervalos de 1 segundo de amplitud. Analice gráficamente. ¿Cuál es la razón de cambio del desplazamiento a los 2 segundos de iniciado el movimiento?

Actividad 8. Un cuerpo que es lanzado hacia arriba se mueve de modo que su posición después de t segundos está dada por la ley $s(t) = -2t^2 + 12t + 9$ metros. Determine la razón de cambio media del desplazamiento con respecto al tiempo transcurrido, durante los primeros 5 segundos, en intervalos de 1 segundo. Represente gráficamente. ¿Cuál es la razón de cambio del desplazamiento a los 2 segundos de iniciado el movimiento?

Para reflexionar: Después de resolver los problemas 7 y 8. Encuentre las razones de cambio en forma analítica. ¿Qué conexión puede realizar entre los resultados de la tabla, las expresiones analíticas y las representaciones gráficas? ¿Qué conceptos puede resaltar a partir de esta conexión?

Actividad 9. Un científico encontró que si calienta cierta sustancia, la temperatura en grados centígrados después de t minutos donde $0 \leq t \leq 5$, está dada por $g(t) = 2t^2 + 4t + 10$.

a) Encuentre la razón media de cambio de la temperatura durante el intervalo [1, 2]. Muestre gráficamente que dicha razón de cambio coincide con la pendiente de la recta que une los puntos de abscisa 1 y 2 respectivamente. *b)* Encuentre la razón de cambio en t = 1,5. Muestre gráficamente que dicha razón de cambio coincide con la pendiente de la recta tangente a la curva en t = 1,5.

Para reflexionar: ¿Es posible establecer alguna relación entre razón de cambio promedio, razón de cambio instantánea, recta secante y recta tangente?

Para finalizar discuta e intercambie ideas con sus compañeros, a modo de resumen, con relación a todos los aspectos considerados en la guía resaltando los conceptos más importantes: razón de cambio media, razón de cambio instantánea, pendiente recta secante, pendiente recta tangente y derivada de una función en un punto.

A modo de reflexión final quiero compartir lo siguiente:

> Desafiar a un alumno supone proponerle situaciones que él visualice como complejas pero al mismo tiempo posibles, que le generen una cierta tensión, que lo animen a atreverse, que lo inviten a pensar, a explorar, a poner en juego conocimientos que tiene y probar si son o no útiles para la tarea que tiene entre manos, que lo lleven a conectarse con sus compañeros, a plantear preguntas que le permitan avanzar (…). Se necesita -claro- *creer* que es posible lograr que los alumnos se ubiquen en esa posición, pero esa creencia no se puede inventar, es necesario sustentarla en conocimientos que permitan pensar por dónde se puede empezar a actuar. (Sadovsky, 2005, p.13).

Las ideas manifestadas sobre la incorporación y utilización de diferentes recursos en la tarea diaria así como el cambio en la metodología utilizada buscan que el trabajo desarrollado en la didáctica del cálculo así como en los proyectos de innovación en su enseñanza refleje sus resultados al interior de las aulas.

Referencias bibliográficas

Balbuena, L. (1996). Innovación Educativa: un reto profesional. En Alsina, C.; Alvarez, J; Hodgson, B.; Laborde, C. y Pérez, A. (Eds.). *8º Congreso Internacional de Educación Matemática. Selección de Conferencias*. (pp.31-42). Sevilla: S.A.E:M. Thales.

Cebrián, M. (2007). Innovar con tecnologías aplicadas a la docencia universitaria. En Cebrián, M. (Coord.). *Enseñanza Virtual para la Innovación Universitaria.* 2ª Edición. Madrid: Nancea.

Cantoral R. y Farfán, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME-8*. (pp. 69-91). Sevilla: Grupo Editorial Ibero América.

Cantoral, R.; Farfán, R., Cordero, F., Alanís, J.; Rodríguez, R. y Garza, A. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México, D.F, México: Trillas.

Dolores, C. (2007). La derivada y el Cálculo. Una mirada sobre su enseñanza por medio de los textos y programas. En C. Dolores, G. Martínez, R. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (Eds.). *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula.* (pp.169-204). México: Universidad Autónoma de Guerrero y Ediciones Díaz de Santos.

Duart, J. y Sangrá, A. (comp.). (2000). *Aprender en la virtualidad.* Barcelona: Gedisa, S.A.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Zaldívar, J. (2006). *Un estudio sobre elementos para el diseño de actividades didácticas en Cálculo.* Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Yucatán. México.