SINUSOIDES Y CIRCUNFERENCIAS: ANÁLISIS Y PROPUESTA DIDÁCTICA DE LA NATURALEZA PROPORCIONAL EN UN AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA

David Zaldívar Rojas, Lianggi Espinosa Ramírez, Luis Cabrera Chim
Cinvestav-IPN México
jzaldivar@cinvestav.mx, leanggi@gmail.com, lmcabrera@cinvestav.mx
Campo de investigación: Visualización Nivel: Superior

Resumen. *Se presenta un estudio y una propuesta didáctica que pretende atender las dificultades en la compresión de los estudiantes sobre las funciones sinusoidales. El objetivo es presentar una manera novedosa de abordar la construcción de la función seno a partir del uso de un programa de geometría dinámica, aprovechando sus posibilidades para realizar traslaciones y homotecias. Para lograr tal objetivo, se proponen actividades destinadas a evidenciar la naturaleza proporcional de los elementos que intervienen en la construcción de las funciones sinusoidales, principalmente el papel de la cuerda, el radio de la circunferencia, el arco, el cateto y el periodo.*
Palabras clave: geometría dinámica, visualización, naturaleza proporcional

Introducción

Este trabajo nació del desafío de elaborar una propuesta didáctica para introducir las funciones trigonométricas, el cual se presentó como parte de un seminario de investigación. Al inicio del trabajo nos percatamos de lo difícil de elaborar esta tarea. Esto debido a la diversidad de contenidos implícitos en la construcción geométrica de tales funciones, en particular la función seno. Para dicha construcción, el uso de la circunferencia unitaria es la estrategia didáctica más utilizada en los libros de clase así como en los recursos multimedia. Ella constituye *un recurso gráfico que logra un vínculo coherente entre las nociones y unidades de medida en la trigonometría y en la función trigonométrica* (Montiel, 2005, p. 117). Es gracias a su uso que la trigonometría pierde su carácter geométrico y adquiere su carácter funcional. Sin embargo, diversas indagaciones muestran grandes dificultades de aprendizaje cuando se usa esta estrategia. De Kee, Mura, y Dionne (1996) han reportado que la enseñanza de las funciones trigonométricas, utilizando la circunferencia unitaria, deja pocas huellas de comprensión en los estudiantes. Su uso no permite evidenciar la naturaleza proporcional de las razones trigonométricas, lo cual, como mencionan Jácome y Montiel (2007), es posiblemente una causa de la poca comprensión en los estudiantes.

Es a partir de ese momento que iniciamos con un análisis sobre la construcción de la función seno y de cada elemento que interviene en ella. Además, reflexionamos sobre la relevancia de la naturaleza proporcional en el significado de las razones trigonométricas y comenzamos a cuestionarnos cómo este significado se extendía a las funciones trigonométricas. Montiel (2005) explica que el elemento más importante en la construcción de las nociones trigonométricas es la proporción, no expresada como la relación entre dos catetos de un triángulo, sino como razón en su sentido abstracto. En efecto, las actividades que marcaron el surgimiento, así como los grandes aportes empíricos de la trigonometría, fueron esencialmente la medición y el estudio de los movimientos de los cuerpos celestes. Es importante notar que en ese entonces no se trabajó con los catetos de triángulos rectángulos, sino con cuerdas en circunferencias. La construcción de un modelo a escala con base en datos empíricos de una realidad macro *no manipulable* marcó las bases para la construcción del cuerpo teórico de la trigonometría (Montiel, 2005), donde la proporción jugaba un rol crucial.

Al analizar cómo esta naturaleza proporcional se encontraba en algunos libros de texto, nos percatamos de que el discurso escolar no hace explícita dicha naturaleza al presentar las razones trigonométricas. En la mayoría de ellos se muestra al seno como una razón, no haciendo explícita la naturaleza proporcional (Figura 2).

Posteriormente, cuando analizamos la construcción de la función trigonométrica en los libros de texto anteriores, encontramos que el descuido de la naturaleza proporcional se presenta nuevamente. Realizamos una revisión de libros de texto y sitios de Internet encontrado, en la mayoría de ellos, el mismo fenómeno: el uso de la circunferencia unitaria es común. Además la asumen como la única posibilidad de construir una función trigonométrica. Esto es tan explícito que, incluso en muchos casos, no se menciona que la circunferencia es unitaria. Por ejemplo, en el libro de Cálculo Infinitesimal de Spivak (2001) (Figura 1), no se hace explícito que el trabajo es con una circunferencia unitaria.

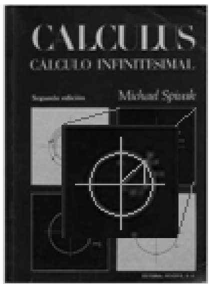


Figura 1

De acuerdo a lo anterior, es que decidimos desarrollar una propuesta didáctica que evidencie la naturaleza proporcional en la construcción de las funciones trigonométricas, en particular de la función seno.

Referencias teóricas

La interpretación de los grafismos en matemáticas no es algo trivial ni automático, es un complejo proceso de descodificación, interpretación y utilización de la información contenida en tal. Este proceso es conocido como Visualización en Matemáticas (Zimmerman y Cunningham, 1991). Espinoza (2007) revela la existencia de ciertos grafismos que articulan una visualización muy especial en matemáticas, llamadas representaciones genéricas. Estas son abstractas, en el sentido que muestra una situación matemática con cierto grado de generalidad. Una característica de estas es que incluyen algún tipo de parámetro. Para visualizarlas (descodificarla, interpretarla y utilizarla) se requiere mucho más que una lectura exacta de su contenido, se hace necesaria una interpretación abstracta de lo que se contempla. Llamamos visualización dinámica a la capacidad de visualizar este tipo de grafismos.

Un ejemplo de este tipo de grafismos es la figura 2. Aquí hay parámetros. Visualizar dinámicamente este grafismo implicaría entender que lo presentado es una familia de triángulos semejantes, en los cuales se cumple las razones explicitadas. Sin embargo este tipo de visualización no es automática ni inmediata (Espinoza, 2007). El no visualizar de esta manera hace que la naturaleza proporcional de las razones trigonométricas esté "escondida" de quienes observan.

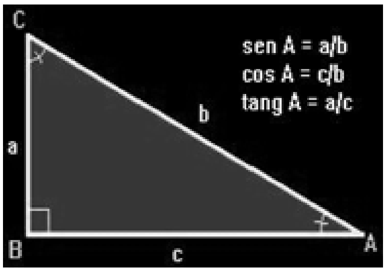


Figura 2

Tal problemática también se encuentra en el caso de la construcción geométrica de la función seno, al trazar el triángulo rectángulo inscrito en la semicircunferencia. En este caso, el considerar la circunferencia unitaria, puede inducir a considerar el valor de la razón trigonométrica como un valor fijo, a saber, la longitud de la mitad del arco de circunferencia trazado.

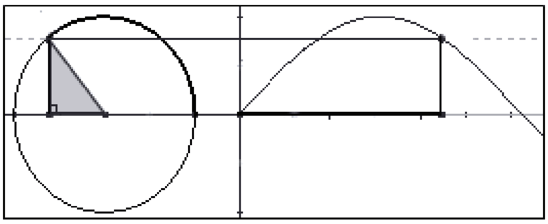


Figura 3

En base a esto nos cuestionamos ¿Podemos ofrecer una propuesta didáctica que propicie a los estudiantes a visualizar dinámicamente? Esta pregunta nos llevó a la geometría dinámica, por lo idóneo que es este contexto para impulsar este tipo de visualización. En efecto, como toda la experimentación que realiza el estudiante se rige por reglas de la geometría implícitas en el software, este permite una articulación más eficiente que con el papel y lápiz entre el dominio de los grafismos y las ideas teóricas de la geometría (Laborde, 2004). Esta articulación la consideramos como un mecanismo relevante propicio para estimular este tipo de visualización.

La propuesta didáctica

La propuesta didáctica que presentamos basa su lógica en la construcción de la función seno utilizando Cabrí-Geòmetré. Las construcciones que se realizan tienen la intención de presentar, de manera novedosa, aspectos escasamente tocados en la enseñanza tradicional. Además, permite dejar de centrarnos exclusivamente en las circunferencias de radio uno, además de mirar propiedades que podrían ser útiles en las explicaciones de algunas de las características de las funciones sinusoidales, tales como arco, radianes, proporcionalidad y la relación que guarda el radio de la circunferencia con la función sinusoidal obtenida.

En ella evidenciamos, entre otras cosas, que la naturaleza proporcional se encuentra tanto en las razones trigonométricas como en las unidades de medida. En efecto, al realizar la construcción geométrica de la gráfica de la función seno con Cabri, en función de dos circunferencias, podemos evidenciar lo siguiente: en la Figura 4a se puede mirar como el teorema de Thales, pero también la Figura 4b puede verse de esa manera, pero para trazos curvos. Es más, el teorema de Thales es un caso particular de una homotecia, donde su centro coincide con el centro de la circunferencia.

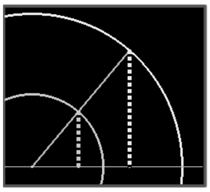


Figura 4a

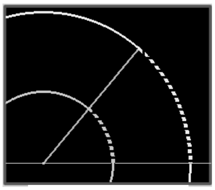


Figura 4b

La propuesta está diseñada para alumnos que ya vieron todos los contenidos curriculares sobre las funciones trigonométricas, en especial la transformación de funciones trigonométricas. Esto es debido a que una de nuestras intenciones es que los estudiantes universitarios profundicen en sus conocimientos de las funciones trigonométricas. En particular para que adquieran elementos que le permitan entender y argumentar sobre el paso razón-función. En la propuesta se considera una etapa previa de familiarización con el software de geometría dinámica para inducir una instrumentalización del estudiante con este (Trouche, 2005).

A continuación presentamos la propuesta que consta de tres actividades, en las cuales se utilizará la dinamicidad e interactividad del software con una intencionalidad didáctica para la conjetura y la prueba matemática.

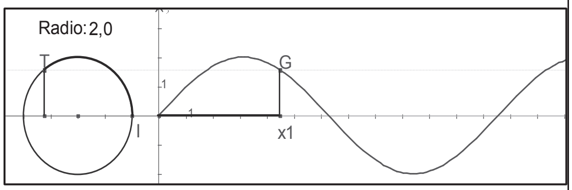
<table>
<tr>
<td>Actividad 1: Construye geométricamente una sinusoide a partir de una circunferencia de radio cualquiera (ver Anexo A). Varía el radio de la circunferencia y observa el comportamiento de la gráfica. ¿Cuál es la función que representa a la gráfica?</td>
<td>

Figura 5</td>
</tr>
</table>

En esta primera actividad, al variar el radio de la circunferencia varía la amplitud y el periodo de la función sinusoidal construida. La variación de estas está descrita por la función $f(x) = r\ sen\left(\frac{x}{r}\right)$, considerando r el radio de la circunferencia. Nuestra intención con la actividad es poner a los estudiantes en una situación de conjetura, en la cual puedan experimentar y encontrar la relación descrita, utilizando sus conocimientos sobre transformaciones de funciones. Esto puede hacerse verbalmente, describiendo la relación en papel o presentando la función descrita (Figura 5).

Actividad 2: Considerando f(x)=Sen(x), realiza:

a) una construcción geométrica de manera que permita variar la amplitud de la sinusoide sin variar su periodo (Figura 6)*;*

b) Una construcción de manera que permita variar el periodo de la sinusoide sin variar su amplitud (Figura 7)*.*

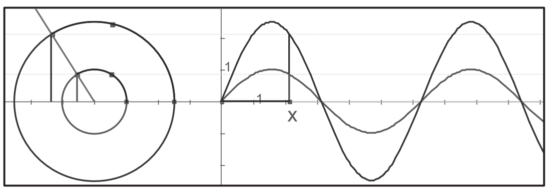


Figura 6

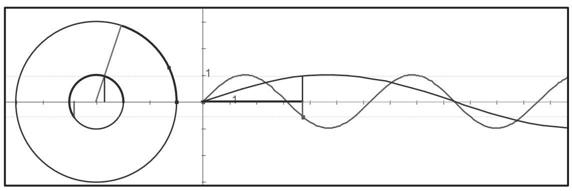


Figura 7

La argumentación de la relación encontrada en la actividad uno no es trivial. Esta se basa en la naturaleza proporcional de la razón y los ángulos de medida (Figuras 4a y 4b), lo cual se trata en esta segunda actividad. Para esto es importante que los estudiantes puedan identificar qué debe variar y qué debe permanecer invariante en ambos incisos.

Actividad 3: Justifica por qué la ecuación de la función sinusoidal que se genera con la circunferencia de radio r, es de la forma:

$$f(x) = rsen\left(\frac{x}{r}\right)$$

En la actividad dos se discute sobra la naturaleza proporcional de la razón trigonométrica y de las unidades de medidas en la construcción de la función sinusoidal. Esta tercera actividad es de síntesis, y pretende que los alumnos utilicen los conocimientos anteriormente mencionados para argumentar la relación requerida en la actividad uno.

Finalmente, esta secuencia permite situar al estudiante en un ambiente de discusión sobre los elementos que intervienen en la construcción de la función seno, permitiéndole reflexionar sobre la naturaleza proporcional existente en ella.

Consideraciones finales

Con el uso de la circunferencia unitaria, la naturaleza proporcional que subyace a la idea del seno (como razón trigonométrica) queda oculta. Esto genera que los alumnos tengan una percepción limitada sobre su significado. La revisión bibliográfica realizada nos señala que lo anterior es un problema desatendido. Por lo cual consideramos que nuestra propuesta aporta un eslabón para superar las dificultades que presentan los alumnos al estudiar las funciones trigonométricas.

La propuesta que realizamos en este trabajo permite al alumno plantearse diferentes preguntas: sobre las alteraciones que sufre la gráfica de la función seno cuando se emplea una circunferencia de radio distinto a uno; las relaciones entre las gráficas anteriores y la producida por la circunferencia unitaria; el rol que juegan el ángulo y el arco correspondiente en la elaboración de las gráficas; las consideraciones que hay que realizar para generar a partir de cualquier circunferencia a la gráfica de la función seno; entre otras. Las ideas que surgen durante la resolución de la secuencia proporcionan al alumno mayores elementos para dar sentido a los conceptos de radian y de la función seno. Además, la propuesta requiere poner en juego conocimientos previos sobre las razones trigonométricas, permitiendo incorporarlos o modificarlos, ayudando al alumno a realizar la transición de razón a función. Nuestro próximo paso es la puesta en escena y análisis de resultados para analizar los alcances de la propuesta y el rediseño de la misma.

Referencias bibliográficas

De Kee, S., Mura, R. y Dionne, J. (1996). La comprensión des notions de sinus et de cosinus chez des élèves du secondaire. *For the Learning of Mathematics 16(2)*, 19-22.

Espinoza, L. (2007). Diferencias en la comprensión de las traslaciones para distintos tipos de representaciones visuales. En Red de Cimates (Eds.) *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, (pp. 603- 614). México: Red de Cimates.

Jácome, G. y Montiel, G. (2007). Estudio socioepistemológico de la razón trigonométrica. Elementos para la construcción de su naturaleza proporcional. En Red de Cimates (Eds.) *Memorias de la X Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. México: Red de Cimates.

Laborde, C. (2004). The hidden role of diagrams in students´ construction of meaning in geometry. En J. Kilpatrick, C. Hoyles y O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in mathematics education*, (pp. 1-21). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de las funciones trigonométricas*. Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.

Spivak, M. (2001). *Calculus. Cálculo Infinitesimal* (Segunda Edición). España: Reverté.

Trouche, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques. *Recherches en didactique des matematiques 25(1)*, 91-142.

Zimmerman, W. y Cunningham, S. (1991). What is mathematical visualization?. *Visualization in teaching and learning mathematics,* 1-8.

Anexo a

Pasos para la construcción de la función sen (x) en Cabrí:

- Muestra los ejes; Escribe un número cualquiera (llamado “R” de radio);
- Traza con un compás una circunferencia de manera que su centro esté en el eje de las abscisas, en el lado negativo y su radio sea R; dibuja el punto I en la intersección entre la circunferencia y el eje de las abscisas (lado derecho);
- Dibuja un segmento en el eje de las abscisas partiendo del origen (hacia el lado positivo); Dibuja un punto (llamado “x_1”) sobre el segmento;
- Calcula la distancia entre el origen y el punto; transfiere esta medida a la circunferencia a partir del punto inicial (nuevo punto llamado “T” de transferencia de medida);
- Construye una recta que pase por T y sea perpendicular al eje de las ordenadas; Construye una recta que pase por x_1 y sea perpendicular al eje de las abscisas, dibuja el punto de intersección entre estas dos rectas (llamado “G” de punto de la gráfica);
- Marca la traza de G; mueve el punto x_1 y observa que es lo que sucede; Borra la traza (CTRL+F) y construye el lugar geométrico de el punto G cuando se mueve x_1.