

MODELOS DE ENSEÑANZA SOBRE RAZÓN Y PROPORCIÓN

Elena Fabiola Ruiz Ledesma, Marta Elena Valdemoros Álvarez

ESCOM. IPN Cinvestav. IPN

México

efruiz@ipn.mx, mvaldemo@cinvestav.mx

Campo de investigación: Números racionales y proporcionalidad

Nivel: Básico

Resumen. *En el presente taller se trabajan algunos modelos pertenecientes a una secuencia de enseñanza que fue validada con dos grupos de sexto grado en dos escuelas primarias de la Ciudad de México. Esta propuesta de enseñanza corresponde al sustrato más elemental de razón y proporción, hace un recorrido partiendo de la revisión y el enriquecimiento del pensamiento cualitativo de los alumnos, se hace el tránsito de lo cualitativo a lo cuantitativo hasta llegar a la cuantificación. El marco teórico que sustenta a ese taller parte de lo que acompaña a la producción del conocimiento mediante la forma en cómo los estudiantes enfrentan un problema de proporcionalidad y lo que piensan en torno a él, (es el caso de los trabajos de Piaget, 1978), así el uso de estrategias de solución a problemas sobre razonamiento proporcional. Se retoman los resultados obtenidos al trabajar estos modelos con estudiantes.*

Palabras clave: razón, proporción, pensamiento proporcional cualitativo, cuantitativo

Introducción

El taller fue pensado para una duración de 4 horas, en donde se abordaron tres aspectos fundamentales: el primero radica en el trabajo que se desarrollaría con los docentes que en esta Reunión Latinoamericana tomarían el taller, este trabajo radica en el desarrollo de algunos modelos de enseñanza provenientes de una secuencia didáctica, la cual surge de una problemática planteada como punto fundamental en una tesis doctoral (Ruiz 2002), el segundo está relacionado a la fundamentación teórica y didáctica de la secuencia, el tercer aspecto se refiere a algunos resultados que se encontraron al trabajar la secuencia didáctica con estudiantes de sexto grado y que serían mostrados a los docentes que participarían en este taller.

Marco Teórico

Algunos investigadores que se incluyen en este marco se enfocaron en todo lo que acompaña a la producción del conocimiento, en las que se exhibe cómo los estudiantes se enfrentan a un problema y lo que piensan en torno a él (es el caso de los trabajos de Piaget, 1978). Otros estudios examinaron la realización o los logros de los estudiantes y el uso de estrategias de solución a problemas sobre razonamiento proporcional como lo reportado en Noelting (1980); Karplus, Pulos y Stage (1983); Hart (1988); Lesh, Post y Behr (1988), etc.

Algunas investigaciones han llegado a ser extendidas a maestros en formación y maestros de la escuela elemental, en servicio.

Otros investigadores como Verganud, (1991), se interesó en las estructuras aditivas y multiplicativas y en el uso de la tabla para el reconocimiento del operador escalar y el operador función.

Los estudios de Kieren (1983) dan un amplio panorama en el trabajo de las fracciones y es él quien señala los distintos subconstructos de la fracción.

Enseguida se muestra el soporte didáctico:

Freudenthal: Razones internas y razones externas

Freudenthal, (1983), designa a las razones como entidades numéricas vinculadas a las proporciones y hace referencia al estatuto lógico de razón como una función de pares ordenados de números o valores de magnitud, marco en el que tienen una relación de equivalencia.

Para Freudenthal, en la enseñanza es preciso tomar en cuenta a las razones internas y a las razones externas, definiendo a las primeras como relaciones establecidas entre distintos valores de la misma magnitud y a las segundas, como relaciones entre valores de diferentes magnitudes.

Esto último es fundamental para la secuencia de enseñanza.

Se hace referencia a la didáctica de la matemática como la actividad fundamental para la enseñanza de razón y proporción, así como la importancia que tienen las herramientas didácticas desarrolladas por el diseñador y sobre esto, se menciona la Fenomenología Didáctica de Freudenthal junto con otros antecedentes considerados para la construcción realista de las matemáticas.

Streefland recupera las definiciones de Freudenthal sobre razones internas y externas, en donde Freudenthal (1983) señala y Streefland (1991) ratifica que la distinción entre los dos tipos de razones se debe, originalmente, a dos diferentes tipos de procesos cognitivos en el sujeto:

Objetivos generales

- ❖ Trabajar dos modelos de enseñanza con los profesores para que reconozcan las estrategias que emplean al resolver las situaciones que se les presentan de razón y proporción con la finalidad de que realicen reflexiones en torno a su trabajo escolar.
- ❖ Mostrar a los profesores la secuencia de enseñanza llevada a cabo con estudiantes de sexto grado las estrategias que usa el estudiante al resolver problemas de razón y proporción simple y directa, para poder reconocer componentes cualitativos y cuantitativos del pensamiento ligado a estos tópicos y sus diversos modos de representación.

Metodología

Docentes integrantes del taller

Los participantes del taller son docentes que dan clases en nivel primaria y/o secundaria, dos de ellos tienen maestría en matemática educativa.

Diseño de la propuesta de enseñanza

La propuesta de enseñanza estuvo integrada por ocho modelos de enseñanza, los cuales se retoman en diferentes sesiones ya que así fue conveniente para los fines que se perseguían.

En todas las sesiones se realiza una planeación previa en cuanto a los siguientes aspectos: Trabajo del estudiante. Dinámica del trabajo (individual, en equipos de trabajo y/o a nivel de todo el grupo escolar). Intervención, por parte de la profesora-investigadora, en los distintos momentos de la dinámica del trabajo. Retroalimentación de lo trabajado con los alumnos.

Modelos de Enseñanza

A continuación se muestran los modelos que se utilizaron en la secuencia didáctica y los propósitos que se persiguen.

Tabla 1 Organización de la propuesta de Enseñanza

Modelo	No.	Propósito(s)
Diseño de salones de fiesta	2	Reconocimiento cualitativo de la noción de proporcionalidad.
El Mundo de Blanca Nieves y los 7 enanos	7	Profundización de la indagación y enriquecimiento de las nociones de "reducción" y ampliación (ideas de la fotocopidora o del dibujo a escala).
El mundo de Blanca Nieves y los siete enanos		Verificar la reducción de una figura usando algún instrumento de medida, para hacer comparaciones de naturaleza cuantitativa.
Elaboración de marcos para fotografías	2	Definir a la razón como una relación.
El gran problema de la huella	1	Utilizar la proporción a través de estimaciones.
Establecer proporciones	3	Definir la proporción como una relación de igualdad entre razones.
Torneo de fútbol	2	Usar diferentes razones al trabajar la proporción.

Construye tu propia cancha	1	Poder trabajar un problema en donde use la razón para determinar las medidas. Usar diferentes modos de representación al trabajar la proporción.
La fotografía de tu equipo.	2	Trabajar con razones decimales, si llegara a darse el caso, al determinar proporciones. Usar diferentes modos de representación al trabajar la proporción.

Progresión de las tareas de enseñanza planeada para los docentes del Taller.

Para este taller sólo se emplearon los dos primeros modelos de enseñanza que aparecen en la tabla 1.

Se inició tomando las ideas de “reducción” y “ampliación” apoyadas en modelos del tipo de la experiencia del dibujo a escala y de la fotocopidora, donde se maneja la situación de semejanza. Se continúa trabajando lo correspondiente a la medición de figuras para llegar a establecer relaciones con cantidades. Ahora las comparaciones son numéricas. Se llega al reconocimiento de razones como la comparación por cociente de dos magnitudes. Se trabaja la notación de la razón como una fracción a/b , con $b \neq 0$. Se utiliza la tabla como un modo de representación para la determinación de razones internas y externas. Se trabajan problemas de variación proporcional, en donde la obtención de cantidades no es sólo a través del uso del operador, sino estableciendo relaciones entre razones.

Para tener más claridad en lo trabajado con los modelos en este taller, se muestran algunos de ellos junto con lo realizado por los docentes:

Modelo 1. Diseño de Salones de Fiesta. En este modelo se debe dividir un espacio determinado para tres salones que serían destinados a niños pequeños, niños más grandes y adultos, así también tendría que destinar el mobiliario que le correspondería a cada salón, el cual tiene que ser proporcional al tamaño de las personas. El propósito del modelo es el reconocimiento cualitativo de la noción de proporcionalidad, para lo cual se trabaja sobre la integración del tamaño y la forma de los dibujos.

Modelo 2. El Mundo de Blanca Nieves y los siete enanos

En el segundo modelo se empleó el cuento de la literatura clásica “Blanca Nieves y los siete enanos”. Este modelo permitió ser trabajado a la luz de diferentes nociones; una de ellas es la noción de “reducción”, apoyada en la experiencia del dibujo a escala y de la fotocopidora, para lo cual se solicitó a los maestros (al darles el material que consistía en una figura que representaba la cama de Blanca Nieves y 6 figuras para elegir la cama de los enanos), que hicieran una comparación entre la cama de Blanca Nieves con respecto a la cama de los enanos, usando argumentos de carácter cualitativo. De esta forma se trabajó la noción de reducción a través de tres vías: escrita, oral y empleando el dibujo.

Posteriormente se utilizó este modelo al abordar la noción de ampliación, también apoyado en la idea de la fotocopidora y del dibujo a escala. En este caso se empleó otro mobiliario de la casa de los enanos que es la mesa, y los maestros debían seleccionar de entre cuatro opciones la mesa que correspondiera a Blanca Nieves. En esa selección emplearon argumentos de carácter cualitativo.

Posteriormente los profesores verificaron la reducción y la ampliación de las figuras usando algún instrumento de medida para hacer comparaciones de naturaleza cuantitativa. Se introdujo la tabla como un recurso para organizar datos. Se emplearon las frases “cuántas veces cabe.” o “qué parte representa de .”, al hacer referencia a la mitad y al doble de una magnitud. Después de comentar, tres equipos llegaron a seleccionar la cama correcta, mientras que dos equipos eligieron una cama diferente, la cual tiene el respaldo más pequeño y la otra tiene el respaldo más alto. Comentaron el por qué de sus elecciones.

Resultados análisis del trabajo con los profesores del taller

Ubicándose únicamente en el plano visual, algunos profesores tuvieron confusión al elegir la cama reducida, tres equipos seleccionaron la que estaba reducida mientras que dos equipos eligieron la que tenía el respaldo más pequeño, (ver figura 1 y 2, respectivamente). Después hicieron reflexiones sobre sus elecciones y emplearon, primero, la superposición, para determinar cuál es la figura reducida, posteriormente emplearon una regla como instrumento de medida, concluyendo que es la figura 1, ya que linealmente está reducida a la mitad en todos sus lados.

Emplearon una tabla para anotar los datos obtenidos de las mediciones, también usaron la notación de fracción ($1/2$) para representar la razón en la que se encuentra el largo del respaldo de la cama reducida con respecto a la original, el largo de la cama reducida con respecto al largo de la cama original; el ancho del respaldo de la cama reducida en relación al largo del respaldo de la original.

Cuando los profesores trabajaron con la figura de las mesas hicieron la selección correcta de la ampliación solicitada. Y procedieron de la misma forma que con la figura de las camas, es decir, emplearon la superposición, la regla como instrumento de medida, la tabla para vaciar los datos y la escritura de las razones como fracciones.

En la misma tabla determinaron las proporciones al establecer las equivalencias.

Por lo observado en el trabajo desarrollado con los profesores y por los comentarios que realizaron puedo decir que la mayor parte de ellos están muy acostumbrados a trabajar en lo numérico, no así en lo visual. Además de que el uso que se le dio a la tabla es diferente al que ellos le dan en sus clases. Comentaron que en la tabla se pueden leer las razones y las proporciones, por lo que concluyeron que es un registro de representación de las razones y proporciones más que una herramienta.

Los profesores señalaron la utilidad de este modelo para trabajar la razón 1 a 2 y dos a uno. Y comentaron que ellos podrían elaborar otras figuras para trabajar otras razones.



Figura 1. Cama seleccionada por tres equipos de profesores, cuyo argumento fue que es la reducida.



Figura 2. Cama seleccionada por dos equipos, señalando que tiene el respaldo más pequeño.

Finalmente, se les mostró a los profesores las respuestas que habían dado los estudiantes de sexto grado al finalizar el modelo de Blanca Nieves y los siete enanos con la finalidad de hacer comentarios sobre ello. Por lo que muestro dos preguntas con sus respuestas dadas por los alumnos de sexto grado a quienes se les aplicó este modelo:

- 1) *¿En qué te basaste para elegir la cama de los enanos y cuál de ellas elegiste?*
- 2) *Al comparar la cama de los enanos con la de Blanca Nieves ¿qué puedes decir?*

En cuanto a lo común de las respuestas dadas a la primera pregunta, se encontró lo siguiente:

En la forma y el símbolo.

En comparar tamaño y forma de las camitas con la de Blanca Nieves.

En las características que tiene la cama de Blanca Nieves.

Elegí la cama C

Elegí la cama D

Respecto a la segunda pregunta se encontró:

La cama de Blanca Nieves es más grande pero son iguales en el diseño y la forma del símbolo.

Son iguales en la forma, sólo de diferente tamaño.

Son las mismas camas sólo que una es más chica y la otra grande.

Es más pequeña la de los enanos, pero igual.

Es idéntica, pero más pequeña.

Comentarios de los maestros sobre lo realizado por los alumnos de sexto grado

Los profesores del taller realizaron los siguientes comentarios:

- *“Los alumnos usan un lenguaje más común que técnico”,*
- *“No tienen desarrollado el aspecto visual”.*
- *“Cometimos el mismo error que ellos al seleccionar la cama D (la del respaldo más pequeño”.*
- *“Tienen buenas nociones de lo que es la reducción.”*
- *“ Son observadores, más que nosotros, pero debido a que no tienen ampliamente desarrollado el aspecto visual, eligieron la cama incorrecta”.*

Conclusiones

Los profesores muestran la necesidad de trabajar en el pensamiento proporcional cualitativo antes de abordar el algoritmo. Señalaron que: El estudio de razón y proporción en sexto grado, debe partir de reconocimientos cualitativos para llegar hasta la cuantificación, pues de esta manera los alumnos primeramente encuentran el significado de términos que posteriormente rebautizarán con nombres empleados en el lenguaje de la matemática, lo que los conducirá a darles el sentido que tienen hasta llegar a la generalización de conceptos.

Referencias bibliográficas

- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*: Holand D., Dordrecht: Reidel Publishing Company. 28-33, 178-209.
- Hart, K. (1988). Ratio and proportion. En: J. Hiebert y M. Behr (Eds.). *Concepts and operations in the Middle Grades, 2*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics. 198-219.
- Kieren, T. (1983). Partitioning, equivalence and the Construction of Rational Number Ideas. En: Zweng et al. (Eds.). *ICME Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education, (506-508)*. Birkhauser Boston.
- Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. K. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. En: R. Lesh y M. Landau (Eds.). *Acquisitions of Mathematics Concepts and processes (45-90)*. New York: Academic Press.
- Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En: J. Hiebert y M. Behr. (Eds.). *Concepts and operations in the Middle Grades, 2*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics. 93-139
- Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part. I *Educational Studies in Mathematics, 11-2*. 217-253.
- Piaget, J. (1978). *Psicología del Niño*. Madrid: Ediciones Morata.
- Ruiz, E. F. (2002). *Estudio de estrategias de solución y una propuesta de enseñanza de razón y proporción*. Tesis Doctoral. Cinvestav, IPN. México.
- Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education*. Tesis Doctoral publicada por Kluwer Academia Publishers.
- Vergnaud, G. (1991). *El niño las matemáticas y la realidad*. México: Trillas.