DIFICULTADES CONCEPTUALES Y PROCEDIMENTALES EN EL APRENDIZAJE DE FUNCIONES EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Jesús López Cahun, Landy Sosa Moguel
Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Yucatán México
jesus_2002mx@hotmail.com, smoguel@uady.mx
Campo de investigación: Gráficas y funciones Nivel: Medio

Resumen. *El presente reporte corresponde a una investigación realizada con el propósito de identificar cuáles son los factores que influyen en las dificultades de aprendizaje y los errores cometidos por alumnos del nivel medio superior al momento de manipular el concepto función. La identificación de los errores se realizó mediante la aplicación de instrumentos de carácter exploratorio elaborados a partir de un análisis epistemológico del concepto. Reportamos algunos factores de carácter cognitivo, epistemológico y didáctico que influyen en las dificultades que enfrentan los alumnos en el estudio de funciones en el ámbito escolar.*

Palabras clave: Funciones, ecuaciones, dificultades, errores

Introducción

Uno de los fenómenos que se repite en distintos cursos de matemáticas es la reducción de "aprendizajes" a la realización mecánica de procedimientos y algoritmos. Es decir, en el aula no se prioriza la comprensión de conceptos matemáticos y de sus significados, generando en los alumnos muchas concepciones que no son congruentes con las aceptadas por las matemáticas (Dolores, 2004). En cálculo, son diversas las dificultades y problemáticas en el estudio de funciones, pudiéndose observar un fenómeno como al que se hace referencia. Como menciona Artigue (1995), "…si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos (….) y a resolver algunos problemas estándar, se encuentran grandes dificultades para hacerlos entrar en el campo del Cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento…"

Los cursos de cálculo se desarrollan en torno al estudio de propiedades o aspectos asociados al concepto función, tales como: tipos de funciones, dominio, rango, derivada de una función, operaciones con funciones, etc.; siendo uno de los pilares más importantes para el cálculo y la modelación de situaciones y fenómenos en varios ámbitos profesionales y de la ciencia, de modo que los resultados y procesos en distintas ciencias pueden verse afectados por una inadecuada conceptualización y aplicación del concepto. Por lo tanto, se hace necesario conocer y entender las causas que propician la falta de comprensión del concepto para tener así un panorama general de cuáles son los puntos a atender si se pretende favorecer en los discentes su construcción a través de experiencias significativas.

La forma en que usualmente se suele transmitir el concepto en la escuela deja de lado el proceso de constitución del concepto función; las experiencias de aprendizaje en las aulas no favorecen apreciar la naturaleza y funcionalidad del concepto para entender, modelar y explicar fenómenos de carácter variacional, provocando dificultades de aprendizaje y concepciones erróneas en los estudiantes. Bajo este referente, nos propusimos identificar y clasificar los factores que influyen en las dificultades conceptuales y procedimentales asociadas al aprendizaje de funciones y los errores aunados a éstas.

Metodología

Para desarrollar la investigación implementamos la ingeniería didáctica como metodología, en su primera etapa: análisis preeliminar. La investigación se desarrolló en tres etapas fundamentales, a saber: revisión documental, exploración y diseño de instrumentos y análisis e interpretación de resultados.

La primera etapa consistió en una revisión documental en busca de las prácticas de enseñanza y la evolución del concepto función. En la segunda etapa se elaboraron dos instrumentos consistentes en una serie de reactivos a modo de cuestionario. La elaboración de estos instrumentos se basó en el análisis de errores reportados en algunas investigaciones y en las definiciones, nociones e ideas sobre función identificadas en el análisis epistemológico. Los instrumentos se aplicaron a veinte estudiantes del cuarto semestre de bachillerato, quienes ya habían estudiado funciones en la primera unidad de su curso de Precálculo. Mediante el primer instrumento indagamos cuáles son las concepciones de función que tienen los alumnos; a partir de sus respuestas identificamos y clasificamos dificultades para el aprendizaje de funciones. El propósito del segundo instrumento fue analizar los errores asociados a una de las dificultades identificadas: discernir entre funciones y ecuaciones. La tercera etapa consistió en analizar e interpretar los resultados obtenidos con la implementación de los dos instrumentos a alumnos de un Colegio de Bachilleres del Estado de Yucatán, en orden de clasificar y explicar las causas de las dificultades detectadas e identificar errores conceptuales y procedimentales.

Marco de referencia

En la investigación se consideraron los aspectos didácticos y epistemológicos como marco de referencia de las prácticas de enseñanza que inciden sobre las dificultades en el aprendizaje de funciones y en orden de analizar las situaciones, contextos y obstáculos en el proceso de constitución del concepto función.

Tratamiento en la enseñanza de funciones. Las problemáticas que presenta el aprendizaje de funciones en el aula responde a una serie de dificultades propias de la naturaleza misma del concepto y de la forma en que comúnmente es enseñado, por ejemplo, podemos mencionar el hecho de que durante su enseñanza suelen presentarse diversas formas de representar al mismo objeto matemático (diagramas sagitales, conjuntos, gráficas, etc.), pero estas representaciones se hacen de manera aislada y no siempre se dirigen hacia la conceptualización de función como relación de correspondencia entre los elementos de uno a otro conjunto ni como relación entre variables.

Así mismo, existe una secuencia casi dogmática de presentar el concepto en el aula, siguiendo tres pasos concretos:

1. Presentación del concepto función mediante conjuntos. Es común que el primer paso para definir “función” a los alumnos es por medio de la representación de dos conjuntos unidos por una flecha, la cual recibe el nombre de función y es denotada por la letra **f,** en la que el profesor dicta la definición dada por Dirichlet. En la enseñanza de funciones, suele tratarse solamente su definición como correspondencia entre dos conjuntos, con poco énfasis en la regla mediante la cual se establece dicha relación de correspondencia entre los conjuntos dados; su definición como relación entre variables y las ideas de variación no se desarrollan en el ámbito escolar.
2. Expresión analítica de una función. Después, se denota una función como una expresión algebraica de la forma “*f(x)* = …”
3. Gráfica de una función. La función es representada en el plano cartesiano, mediante pares ordenados de puntos, obtenidos a partir de la tabulación de los valores de las variables independiente y dependiente.

Evolución histórica y conceptual de función. El estudio de la historia y evolución de los objetos matemáticos nos permite observar aquellos elementos que hicieron posible la construcción de los diversos conceptos matemáticos, como bien mencionan Farfán y Hitt, (1983) citado en (Sastre, et. al., 2005).: *“Existen elementos que permiten, e históricamente hicieron posible, la construcción de un concepto: todos estos son andamios de los que se vale el sujeto en su acción sobre el objeto, para acceder al concepto en sí, andamiajes con vida efímera que, circunstancialmente, son las herramientas con las que se captan los primeros elementos del concepto y donde el ”error” y la sensibilidad a la contradicción desempeñan un papel importante*”. Por otra parte, un análisis histórico de los conceptos matemáticos nos permite tener una idea intuitiva de cómo se desarrollan en la mente de nuestros alumnos, dada la similitud entre el desarrollo cultural y científico que ha mostrado el ser humano como especie y el desarrollo cultural y científico que muestra un ser humano a lo largo de su vida (Sastre, et. al., 2005).

A lo largo de la historia evolutiva del concepto existieron momentos que marcaron la pauta para su desarrollo, hasta su definición formal. Algunas de sus transformaciones fueron:

- En un principio las cantidades se describían de manera verbal o gráfica y no existía una idea abstracta de variable. El conteo implica correspondencia entre un conjunto de objetos y una secuencia de números para contar; de modo que las cuatro operaciones aritméticas elementales son funciones de dos variables.
- Durante la Edad Media se estudiaron fenómenos naturales y las ideas se desarrollan alrededor de cantidades variables independientes y dependientes sin definirlas específicamente. Una función se definía mediante una descripción verbal de sus propiedades específicas, o mediante un gráfico, no utilizándose formulas (Sastre, 2005).
- Durante el periodo moderno, que comenzó a finales del siglo XVI, las funciones fueron consideradas como expresiones analíticas. Esto fue cuando Descartes y Fermat lograron que la aritmética y el álgebra superaran su subordinación de la geometría dando lugar a la construcción de nuevas curvas, mediante ecuaciones algebraicas, que antes no eran consideradas por no ser posible trazarlas con regla y compás.
- En 1692, Leibniz utiliza por primera vez el término función para referirse a cualquier cantidad que varia de un punto a otro en una curva, como la longitud de la tangente, la normal, subtangente y de la ordenada. Para él una curva estaba formada por un número infinito de tramos rectos infinitamente pequeños.
- En 1775, Euler define función como una expresión analítica "la función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de esa cantidad variable y de números o cantidades constantes".
- Dalembert, Euler y D. Bernoulli lograron que este concepto evolucionara y se enriqueciera cuando trataron de resolver el problema de la cuerda vibrante. En 1753,

Bernoulli formula la siguiente definición: "llamamos función a las diversas cantidades dadas de alguna forma por una (cantidad) indeterminada *x*, y por constantes, ya sea algebraicamente o trascendentemente"

- En 1829, Dirichlet definió función como: "*y* es una función de la variable *x*, definida en el intervalo $a < x < b$, si para todo valor de la variable *x* en ese intervalo, le corresponde un valor determinado de la variable *y*. Además, es irrelevante como se establece esa correspondencia".
- La teoría de conjunto iniciada por Cantor (1845-1918) produce una nueva evolución del concepto de función, extendiéndose esta noción para incluir en su definición: *"toda correspondencia arbitraria que satisfaga la condición de unicidad entre conjunto numéricos o no numéricos".*

La naturaleza cognitiva de esta investigación nos llevó a enmarcarla en la teoría de los campos conceptuales, al permitir localizar filiaciones y rupturas entre conocimientos desde el punto de vista de su contenido conceptual. Esta teoría nos permitió tener una perspectiva amplia de las filiaciones entre ecuación y función, en cuanto a conocimientos y conceptos se refiere.

Resultados

Con base en el análisis y la interpretación de las respuestas de los estudiantes en la aplicación del primer instrumento, identificamos las siguientes dificultades en el estudio de funciones.

- Distinguir entre variable e incógnita
- Enunciar fenómenos o situaciones que involucren una relación funcional entre variables

- El manejo operacional arbitrario con funciones, como si fueran ecuaciones, en el desarrollo del tema por parte del profesor
- Discernir entre funciones y ecuaciones
- Que el estudiante enuncie la regla de correspondencia que relaciona los elementos de dos conjuntos sobre los que se define una función
- Que el estudiante obtenga la inversa de una función y su gráfica
- Utilizar diferentes representaciones de funciones
- Obtener una expresión analítica o gráfica de una función que modele un fenómeno
- No se hace explicito el carácter unívoco de las funciones
- Analizar el comportamiento e interpretar la gráfica de una función

En la tabla siguiente, se reportan algunos factores de naturaleza cognitiva, epistemológica y didáctica que influyen en ciertas dificultades identificadas.

Dificultad	Cognitivo	Epistemológico	Didáctico
Obtener una expresión analítica o gráfica de una función que modele un fenómeno	Esquemas que responden a situaciones muy similares	La enseñanza el concepto ha tomado una dirección contraria a la génesis del mismo	Los ejercicios planteados suelen ser rutinarios o algorítmicos, excluyendo aquellos problemas o situaciones de variación
Confusión entre función y ecuación	Similitud de gráficas	Función como puente entre la geometría y el álgebra	Operar y manejar funciones como cualquier expresión algebraica. Sintaxis utilizada

A continuación reportamos los errores asociados a la dificultad para discernir entre funciones y ecuaciones, detectados según las respuestas que dieron los estudiantes en el segundo instrumento. Cada uno, se ejemplifica mediante alguna de las respuestas dadas por los alumnos (en cursiva) a los reactivos diseñados.

Error: Concebir una función como ecuación

Ejemplo. *"Es una ecuación que se puede expresar en una gráfica. Como* $f(x)=2$*, su grado es cero y es una lineal (la más fácil) o* $f(x)=(x^2+2)-3=0$*"*

Observación. Se puede apreciar como definen a las funciones como una ecuación con gráfica; de igual manera se puede mirar que estos conceptos parecen estar siendo asociados por medio de la representación analítica y la idea de ecuación.

Error: Identificar una expresión algebraica como una función por la notación típica o usual al representar esta última.

Ejemplo. "$3x^4+2x=-3$ *no es una función, porque no tiene nada que lo identifique como una función, no tiene f(x)*". "$c(m)=2m+1$, *es una función porque* $c(m)$ *representa una función"*

Observación. Parece ser que los alumnos han asociado el concepto función a la presencia de una notación tal como $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, etc.

Error: Considerar que el dominio de una función siempre es el conjunto de números reales.

Ejemplo. Dominio: *"Son todos los que se encuentran en el eje de las x"*

Observación. Este tipo de error puede ser el causante de que los alumnos no consideren a las funciones de dominio discreto como tales.

Error: Identificar variables dependientes como independientes, y viceversa, en un fenómeno, problema o expresión analítica de una función.

Ejemplo. En uno de los casos en los que se les pedía identificar lo que varía e indicar cuál es la variable dependiente y la independiente, dos de los estudiantes respondieron:

E1:

i. La cantidad de dinero recibida en una tienda de telas por la venta de lino, si cada metro cuesta $25.
Variables: ancho de la tela
Variable dependiente: cada metro
Variable independiente: cantidad de tela vendida.

E2:

Variables: 1m = 25
Variable dependiente: x
Variable independiente: y

Observación. El alto porcentaje de respuestas de este tipo obtenidas, nos da la pauta para creer que esto no es casual, sino más bien resultado de prácticas en el aula en las que el lenguaje simbólico y el uso de variables carecen de sentido para los estudiantes. Sin importar su naturaleza u origen, los estudiantes no atribuyen algún significado a las variables.

Conclusiones

El análisis epistemológico y la identificación de las dificultades de aprendizaje y errores cometidos por los estudiantes, nos permitió establecer aspectos a tomar en cuenta en el diseño de actividades didácticas sobre funciones, como son:

- Los alumnos no son capaces de percibir, por si solos, el carácter unívoco de las funciones, por lo que esta característica tiene que hacerse explicita, ya sea por medio de actividades, problemas o por el profesor mismo.
- Las literales empleadas tanto en las ecuaciones como en las funciones suelen ser las mismas, por lo que es necesario presentar problemas en los que el uso de las literales tengan significados distintos, como variables en unos y como incógnitas en otros.
- La diversidad de elementos y representaciones en la enseñanza de funciones (dominio, contradominio, gráficas, tablas, diagramas, etc.) de forma aislada o sin

conexión, no favorece la construcción del concepto, dada la confusión que esto causa en el estudiante al mirar muchos objetos ahí donde el matemático no ve más que uno (Ruiz, 2000).

- La enseñanza del concepto función actualmente gira alrededor del registro algebraico, la interacción de este registro con otros, como el gráfico, suele ser limitado a una simple ejemplificación. Por ello, se sugieren tratamientos alternativos del concepto, como el numérico, geométrico, etc., con especial énfasis en el aspecto discursivo para la resolución de problemas y modelación de fenómenos.
- La "definición" mediante conjuntos con la que se parte la enseñanza de funciones, limita y esconde el carácter variacional que poseen.
- La génesis histórica del concepto función debe ser referente sobre cómo se construye éste en la cognición de los alumnos y de la estructura del concepto.
- En ocasiones, los alumnos son capaces de reconocer las variables que intervienen en un fenómeno, sin embargo no pueden describir un fenómeno de carácter variacional.

En síntesis, es necesario considerar los aspectos cognitivos, epistemológicos y didácticos para el aprendizaje de funciones, en actividades y experiencias que promuevan el lenguaje y pensamiento variacional, la visualización y la modelación de situaciones o fenómenos.

Referencias bibliográficas

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C., Valero, M. (2004). Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en la situación escolar. *Epsilon, THALES*, 58, 20(1), 45-73.

López, J. (2007). *Dificultades conceptuales y procedimentales asociadas al concepto función*. Tesis de Licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Yucatán, México.

Ruiz, L., Rodríguez, J. (2000). La didactificación de un objeto matemático. El caso de la noción de función en enseñanza secundaria. En Cantoral, R. (Ed.). *El futuro del cálculo infinitesimal* (pp. 265 - 290). Sevilla, España: Grupo Editorial Iberoamérica.

Sastre, P., Boubée, C., Rey, G., Maldonado, S., Villacampa, Y. (2005). Evolución histórica de las metáforas en el concepto de función. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame, México. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 19(1), 22-27.