SIGNIFICADOS ELEMENTALES Y SISTÉMICOS DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Luis E. Capace P., Mario Arrieche
Instituto Universitario de Tecnología de La Victoria. Universidad Pedagógica Experimental Libertador-Maracay | Venezuela
lcapace@cantv.net, marrieche@ipmar.upel.edu.ve
Campo de investigación: Pensamiento algebraico | Nivel: Básico

Resumen. *El presente trabajo consistió en caracterizar los significados elementales y sistémicos a los protocolos de respuestas dadas por un estudiante sobre ecuaciones de segundo grado y los puestos de manifiesto, en relación al mismo tema, por los autores del libro de texto que se utilizó de apoyo a la enseñanza y aprendizaje. Para tal fin aplicamos la técnica del análisis semiótico, generada del modelo ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2003 y Godino y Arrieche, 2001), que nos permitió determinar el significado institucional de referencia y el significado personal declarado. También se identificaron conflictos semióticos, es decir; discordancias entre los significados personales e institucionales.*

Palabras clave: análisis semiótico, enfoque ontológico-semiótico, ecuación de segundo grado, significado personal y significado institucional.

Introducción

El enfoque *semiótico-ontológico de la instrucción y cognición matemática* (Godino, 2003) es una marco teórico para investigaciones en Didáctica de la Matemática, en el cual se considera que en todo proceso de estudio de la Matemática, están presente seis dimensiones, a saber: Epistemológica, cognitiva, mediacional, docente, discente y emocional. El fundamento del enfoque son los significados institucionales y personales del objeto matemático en estudio. El presente trabajo es un ejercicio de aplicación de la técnica de *análisis ontológico-semiótico para determinar significados* (Godino, 2003). De acuerdo a Godino y Arrieche (2001), ésta nos permite caracterizar los significados elementales y sistémicos o praxeológicos de un objeto matemático, presente en cualquier acto de comunicación matemática. Por otra parte, permite identificar situaciones que pudieran generar conflictos semióticos en los textos empleados en un proceso de estudio o durante la interacción didáctica.

Las diferentes dimensiones en que se presentan las entidades emergentes de la actividad matemática, se pueden resumir en: *Lenguaje* (escrito, oral, gráficos), *situaciones-problema* (tareas, ejemplos, técnicas), *conceptos* (definiciones), *propiedades* (proposiciones) y *argumentos* (justificaciones y validaciones). Estas dimensiones pueden asumirse desde las siguientes facetas: *Persona* (lo cognitivo) e *institucional*, *ostensiva* (perceptible) y *no ostensiva* (mental /gramatical), *extensiva* (ejemplo) e *intensiva* (concreto – abstracto), *elemental* (unitaria) y *sistémica* (compuesta) y *expresión* (significante) y *contenido* (significado).

En este informe presentamos conflictos semióticos que se manifestaron en el análisis del protocolo de respuestas dadas a una prueba sobre ecuaciones de segundo grado y en el libro de texto Amelli, y Lemmon (1998). Es importante resaltar que este era el libro de texto de apoyo a la enseñanza y aprendizaje que utilizó el estudiante que formó parte de este estudio.

Determinación de significados institucionales

En esta sección se analizará el significado institucional de *Ecuación de segundo grado* en el libro de texto antes mencionado. Debido al número de páginas requeridas para este artículo, mostraremos el análisis de algunos de los contenidos que presenta el libro en relación a este tema.

U0	*ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCOGNITA*
U1	Como ya sabes, las funciones cuya variable es de grado 2, reciben el nombre de *funciones Cuadráticas.*
U2	Su forma general es *f(x)=ax2+bx+c,* donde *a,b y c* son constantes y $a \neq 0$.
U3	Trataremos ahora de desarrollar un método que nos permita encontrar los ceros (raíces) de la función cuadrática. Así se plantea *ax2+bx+c* = 0.
U4	Observamos que el doble signo de la raíz permite hallar los dos valores de la variable que hacen cero la función $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
U5	En general si el discriminante $b^2 - 4ac$ es: > 0; la función tiene dos soluciones reales diferentes. = 0; la función tiene dos soluciones reales iguales. < 0; la función cuadrática no tiene soluciones reales.

TABLA 1. El texto y las unidades primarias

Praxis	*Lenguaje*	*Logos*
Situaciones: Búsqueda de una expresión que permita calcular los ceros o raíces de una ecuación de segundo grado. Cómo conocer la naturaleza de las soluciones de una ecuación de segundo grado sin resolverla. *Acciones:* Cálculo de las raíces de una ecuación de segundo grado. Determinar cómo son las soluciones de una ecuación de segundo grado sin resolverla.	*Términos y expresiones:* Función cuadrática, ecuación de segundo grado, ceros o raíces, soluciones reales, suma producto, expresión, construir. *Notaciones:* *f(x)=ax2+bx+c* *ax2+bx+c = 0* $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $b^2 - 4ac$	*Conceptos:* 1. Función cuadrática 2. Ceros o raíces de una función cuadrática. 3. Ecuación de segundo grado. 4. Discriminante de una ecuación de segundo grado. *Propiedades:* 2. *Si* $b^2 - 4ac$ *> 0, entonces x1, x2Є R y x1≠ x2* *3. Si* $b^2 - 4ac$ *= 0, entonces x1, x2* $\in$ *R y x1 = x2* *4. Si* $b^2 - 4ac$ *< 0, entonces x1, x2* $\notin$ *R y x1≠ x2* *Argumentaciones:* Las justificaciones en U3.

TABLA 2. Entidades matemáticas (unidades elementales)

Unidades U1 y U2: En el libro de texto se presenta el tema de *Ecuación de segundo grado* (ESG) con una breve introducción de la función cuadrática. De esta manera vincula el nuevo objeto con el estudiado en los apartes anteriores y justifica su estudio ya que se hace necesario para determinar los ceros o raíces de una función cuadrática de manera analítica.

Unidades U3 y U4: En el libro de texto no se deduce la fórmula resolvente de una ecuación de segundo grado. Sólo presenta ejemplos de cómo usarla para determinar las raíces en diferentes ecuaciones. Al estudiar U_3 se puede inferir que esta es la única vía para resolver una ecuación de segundo, no explora otras alternativas de resolución.

Unidad U_5: En el texto se define el discriminante de una ESG y se caracteriza lo que significa que sea "mayor que cero", "igual a cero" o "menor que cero" en relación a las soluciones de la ecuación. La notación es incorrecta y puede producir aberraciones en el uso del lenguaje matemático.

Significado institucional pretendido

El análisis muestra, que la noción de *Ecuación de segundo grado* está ligada a un sistema de prácticas operatorias y discursivas que progresa a medida que el estudio se profundiza en un campo de problemas. También el análisis nos permite caracterizar los elementos del significado institucional del contenido matemático pretendido, al estudiar el objeto en base al Libro de Texto seleccionado. A continuación se presenta una tabla con esos elementos

Lenguaje:	*Situaciones:*
1. Ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ 2. Resolvente $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 3. Discriminante b^2-4ac Raíces o ceros de una ESG x_1 y x_2.	1. El cálculo de las raíces o ceros de una función cuadrática. 2. En base al discriminante, conocer previamente al cálculo la naturaleza de las soluciones.
Acciones:	*Definiciones:*
1. Calcular las raíces de una función cuadrática. 2. Identificar la naturaleza de las raíces de una ESG sin resolverla.	1. Función cuadrática. 2. Ecuación de segundo grado. 3. La fórmula resolvente. 4. El discriminante.
Propiedades:	*Argumentaciones:*
De acuerdo a las soluciones de la ESG se puede conocer cómo corta al eje de las abscisas, la parábola que representa la función que conforma la ecuación.	Se deduce la fórmula o resolvente

Tabla 3

Determinación de significados personales

A continuación se analiza el protocolo de respuesta a una prueba sobre el objeto matemático estudiado.

	1. *Defina Ecuación de Segundo Grado*
U_1	Es una igualdad con una variable elevada al cuadrado y que se pueden calcular sus raíces que son los valores que anulan a $ax^2+bx+c=0$.
	2. *Geométricamente ¿qué representa las raíces de una Ecuación de segundo Grado?*
U_2	Si la expresión $ax^2+bx+c=0$ representa en el plano cartesiano una parábola entonces x_1 y x_2 representan un único punto de corte con el eje de las abscisas respecto a la ordenada.
	3. *Resuelve* $12x^2-8x=15$
U_3	$12x^2-8x=15$ Utilizando el método de la resolvente se obtienen las raíces reales $12x^2-8x-15=0$ que anulan al polinomio. $x=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4.12.(-15)}}{2.12}$ $x=\frac{8\pm\sqrt{784}}{24}$ $x_1=\frac{8-28}{24}=-\frac{5}{6}$ $x=\frac{8\pm\sqrt{64-(-720)}}{24}$ $x=\frac{8\pm 28}{24}$ $x_1=\frac{8+28}{24}=\frac{3}{2}$
	4. *Estudia la naturaleza de las raíces de la ecuación x^2- 2x +5 =0*
U_4	Al factorizar $x^2-2x+5=0$ mediante el método de la resolvente $x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4.1.5}}{2.1}$ $x=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}$ $x=\frac{2\pm\sqrt{4-4.1.5}}{2}$ $x=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}$ Al observarse la cantidad sub-radical del discriminante, es menor que cero, esto implica que la ecuación sólo tiene raíces complejas.
	5. *Dada la ecuación 4x^2 – 6x +3 =0 calcula la suma y el producto de sus raíces, pero sin resolver la ecuación.*
U_5	$\mathrm{P}=\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}=\frac{3}{4}$ $\mathrm{S}=-\frac{-6}{4}=+\frac{3}{2}$
	6. *Si x_1=2 y x_2= -1/3 construye la ecuación de segundo grado que tenga esas raíces.*
U_6	Construir la ecuación de segundo grado significa escribir el producto de dos factores binomiales para conseguir la expresión ax^2+bx+c=0 $(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)=0\Rightarrow x^2+\frac{1}{3}x-2x-\frac{2}{3}=0\Rightarrow x^2-\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}=0$

TABLA 4. Protocolo de respuestas de Pedro a una evaluación sobre ESG

Unidad U_1: La definición que Pedro da como respuesta a la primera pregunta, "Es una igualdad con una variable elevada al cuadrado", no está en sintonía con el significado institucional. Según lo que señaló Pedro $x^3+2x^2+1=0$ es una ecuación de segundo grado. Pedro no establece en esta definición la relación entre la ecuación de segundo grado y la función cuadrática.

Unidad U_2: En esta respuesta establece que la representación gráfica del polinomio que conforma la ecuación es una parábola y señala que x_1 y x_2 son los únicos puntos donde la parábola corta al eje de las abscisas. Este planteamiento se aproxima al significado institucional donde se asume que en x_1 y x_2 la parábola corta al eje de las abscisas.

Unidad U_3: Resuelve la ecuación por la misma vía (la fórmula) coincidiendo con el significado institucional manifestado en el libro de texto analizado. Pedro en ningún momento dudo en resolver la ecuación de esa manera ni comentó la posibilidad de hallar la solución por otros caminos. Parece que la utilización de la fórmula o resolvente presenta muy pocos conflictos semióticos, de allí que sea el método más utilizado para calcular las raíces de una ecuación de segundo grado.

*Unidad U_4***:** Pedro no presentó ningún tipo de conflicto al analizar el discriminante, al observar que éste es menor que cero, señaló que las raíces son complejas. Este término no esta presente en el texto debe provenir de la interacción con el profesor u otras fuentes.

Unidad U_5: Como lo presentó el libro texto, Pedro calculó la suma y el producto de las raíces de la ecuación $4x^2 - 6x + 3 = 0$, con las expresiones *S*=$-\frac{b}{a}$ y *P*= $\frac{c}{a}$ planteadas en el texto y que son consecuencia de la propiedad que existe entre los coeficientes de la ecuación y la suma y el producto de las raíces de la ecuación. En este sentido el significado que le dio pedro a esta actividad es coincidente con el institucionalizado.

Unidad U_6: En esta unidad Pedro construye la ecuación con el producto $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, a pesar de que escribe $(x \pm x_1)(x \pm x_2) = 0$. Aparentemente le genera menos conflictos desarrollar el producto y reducir los términos semejante para obtener la ecuación, que utilizar directamente la expresión $x^2 - Sx + P = 0$ previamente calculado *S* y *P*. En el libro se plantean los dos caminos con significado institucional. El significado que Pedro le da a la actividad es el mismo significado institucional.

Síntesis de conocimientos personales de Pedro sobre la ecuación de segundo grado.

A partir del análisis anterior, se pueden inferir algunas características del significado personal que Pedro atribuye a la ecuación de segundo grado. Es importante considerar lo delicado de esta inferencia ya que se hace en base a una evaluación escrita que presenta ciertas limitaciones. A continuación se presenta una tabla con esos elementos

Lenguaje:	*Situaciones:*
A excepción de la respuesta a la pregunta 1, donde señaló que una ESG "es una igualdad con una variable al cuadrado" en el resto de la evaluación uso un discurso matemático y un buen uso de los términos, notaciones y expresiones.	Conoce que la ESG permite calcular los puntos de corte de una parábola con el eje de las abscisas. Resolvió una ecuación con la fórmula. Analizó como son las soluciones de una ecuación de segundo grado dada, sin resolverla.
Acciones:	*Conceptos:*
Calcula las raíces de una ecuación utilizando la fórmula. Determina la suma y el producto de las raíces de una ecuación dada, sin la necesidad de conocer las raíces. Al construir la ecuación cuyas raíces le había sido dadas, no dudó en desarrollar el primer miembro de la expresión $(x- x_1)(x- x_2)=0$. De tal forma que Pedro tiene un significado del objeto ecuación de segundo grado que proviene de un sistema de prácticas y que en a veces no coincide con el significado institucional pretendido en el texto.	El concepto de ecuación de segundo grado que expone no lo tiene muy claro, ya que no está en correspondencia $ax^2+bx+c=0$. Tiene clara la idea que las raíces son los valores donde la parábola que representa la función se anula.
Propiedades:	*Argumentación:*
Hace buen uso de las propiedades del discriminante. Construye la ESG conociendo sólo sus raíces.	Argumenta geométricamente que representan las raíces de una ecuación de segundo grado. Argumenta en U_4 que por el hecho que el discriminante es menor que cero las raíces son complejas.

Tabla 5

Conclusiones

1. La dialéctica entre significados institucionales y personales en el análisis de las respuesta de Pedro a las preguntas de la evaluación, nos mostró las complejidades semióticas de las relaciones didácticas entre los significados institucionales (manifiesto en el libro de texto) y los significados personales (lo

que el sujeto aprende), esto sin considerar la actividad más rica en información como es la actividad de clase.

2. La dependencia entre los significados personales e institucionales se percibe, porque el significado de las expresiones e identidades que el sujeto debe apropiarse son consecuencia de la información y actividades propuestas por el profesor y las que se presentan en el libro de texto. Por ejemplo en libro de texto analizado, no se consideran otros métodos diferentes al uso de la fórmula lo que generará esa deficiencia en los estudiantes.
3. Por otra parte el orden de presentación de las informaciones y tareas debe adaptarse a los conocimientos del aprendiz que progresivamente ha venido adquiriendo. De alguna forma entonces los significados del estudiante condicional a los significados pretendidos. En el texto analizado se presenta primero la definición de ecuación de segundo grado, antes de presentar las prácticas que constituyen las razones de tal definición.
4. Con este pequeño ejemplo; el análisis de dos textos involucrados en un proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática como son las respuestas dadas a una prueba escrita por un estudiante y el libro de texto utilizado de apoyo, se pretende ejemplificar las bondades de está técnica en la caracterización de los significados personales e institucionales sobre un objeto matemático dentro de un proceso de estudio.

Referencias bibliográficas

Amelii, M., Lemmo, J. (1998). *Matemática 9*. Caracas: Salesiana.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Trabajo de investigación presentado para optar a la cátedra de universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, Granada.

Godino, J. D., Arrieche, M. (2001). *El análisis Semiótico como Técnica para Determinar Significados*. Recuperable escribiendo a jgodino@ugr.es