LAS IDEAS PREVIAS SOBRE EL CÁLCULO INTEGRAL EN LOS ALUMNOS DE PRIMER AÑO DE LA UNIVERSIDAD

Liliana Milevicich
Universidad Tecnológica. Facultad Regional General Pacheco, Buenos Aires Argentina
lmilevicich@ciudad.com.ar, liliana_milevicich@yahoo.com.ar
Campo de investigación: Pensamiento algebraico, Pensamiento geométrico, Pensamiento matemático avanzado, Visualización Nivel: Superior

Resumen. *La algebrización del cálculo diferencial e integral fue un producto de la corriente formalista en el siglo XX que rechazaba la visualización como herramienta de demostración y análisis. En la enseñanza universitaria, se ha puesto de manifiesto a través de un enfoque algebraico y reduccionista de la enseñanza del cálculo, que se basa en las operaciones algebraicas con límite, derivadas e integrales, pero que trata de una forma simplista los conceptos específicos del análisis, tales como las razones de cambio o la integral definida.*

Nuestro objeto de estudio han sido varias comisiones de alumno de primer año de la carrera de ingeniería. Los estudios exploratorios implementados sobre los conocimientos previos que estos alumnos poseen acerca del cálculo integral, un análisis detallado del material bibliográfico que utilizan los docentes en las escuelas de nivel medio con orientación técnica y de los escritos de los alumnos, permiten inferir que se enseña el concepto de integral como una antiderivada, poniendo el acento en los aspectos algebraicos.

Creemos que las dificultades que presenta el aprendizaje del cálculo integral en primer año de la universidad, son fundamentalmente atribuibles a esta situación de contexto, dado que estas ideas previas, fuertemente arraigadas, condicionan la adquisición de un nuevo conocimiento.

Palabras clave: cálculo integral, ideas previas, algebrización, visualización

Descripción del problema

Obstáculos epistemológicos en la enseñanza del cálculo

Uno de los fenómenos didácticos que se considera fundamental dentro de la enseñanza del Análisis Matemático es el de la algebrización del cálculo diferencial. Artigue(en Contreras, 2000: 72) habla de un “enfoque algebraico y reduccionista del cálculo” que se basa en las operaciones algebraicas con límites, derivadas e integrales, pero que trata de una forma simplista las ideas y técnicas específicas del Análisis, como son la idea de razón de cambio instantáneo, o el estudio de los resultados de esas razones de cambio.

Explica Contreras (2000) que cuando el profesor explica una determinada noción matemática y, no aborda (o lo hace de forma superficial) los problemas característicos del Análisis, deslizándose hacia posturas algorítmicas más fáciles de gestionar y evaluar, produce una verdadera ruptura del contrato didáctico, denominado por Brousseau "efecto Topaze".[5]

Concepciones erróneas de los alumnos

La perspectiva de las concepciones de los alumnos es de fundamental importancia. A la hora de diseñar una propuesta de enseñanza aprendizaje del cálculo integral, estos aprendizajes previos pueden condicionar el logro de los objetivos propuestos. Llorens y Santonja (1997) realizan valiosas consideraciones acerca de las concepciones erróneas en los alumnos.

a) En primer lugar argumentan que frecuentemente*, los estudiantes identifican integral con primitiva*. En este sentido, en el cálculo de la integral, para ellos, no interviene ningún proceso de convergencia ni tampoco ningún aspecto geométrico. Es, por tanto, un proceso puramente algebraico, más o menos complicado y, siempre, autocontenido, de modo que un alumno puede conocer distintos métodos de integración e, incluso, saber aplicarlos con cierta soltura (integrales por partes, de funciones racionales o trigonométricas, etc.) y, al mismo tiempo, no ser capaz de aplicarlos al cálculo de un área o ignorar por completo que son las sumas de Riemann.

b) En segundo lugar, los alumnos identifican *las integrales definidas con la regla de Barrow,* incluso cuando ésta no pueda aplicarse. El caso más habitual es el de las integrales impropias con uno o más puntos intermedios con discontinuidad esencial.

[5] En una situación de aprendizaje, las respuesta que debe dar el alumno está determinada de antemano. El profesor escoge la pregunta acorde a la respuesta que desea obtener y si ésta no aparece, el profesor elegirá cada vez preguntas más sencillas hasta que el conocimiento buscado aparezca. En este sentido, se sugiere la respuesta haciéndola cada vez más transparente. Esto implica un fracaso completo del acto de enseñanza dónde el profesor toma a su cargo lo esencial del trabajo. Brousseau (1986)

c) Una tercer problema tiene su origen en *la falta de asociación entre la integral definida y el análisis de la convergencia*. En general, cuando específicamente se estudian las integrales impropias, a la mayoría de los estudiantes le parece muy sorprendente que una integral pueda ser divergente.

d) Finalmente, *no se integra el concepto de área con el de integral*. Es probable que los alumnos hayan advertido que existe una relación entre las integrales definidas y el área, pero no se trabaja con los alumnos sobre estos aspectos, de modo que persiste una interpretación puramente algebraica de la integral. De hecho, es muy frecuente que esa interpretación de la integral como área sólo se utilice cuando expresamente se pida en ejercicios que típicamente empiezan con el enunciado: “Calcular el área encerrada por la gráfica de f(x)=.".

El alumno utiliza el contexto algebraico-formal en vez del visual-geométrico sencillamente porque no los ha integrado.

Consideraciones sobre la bibliografía

Una revisión de los libros de texto cálculo de los niveles pre-universitario y universitario, correspondientes a primer año, puede aportar pautas esclarecedoras sobre el origen de los obstáculos en el proceso de enseñanza aprendizaje. Se describen brevemente los modos de introducir el concepto abordado por tres autores diferentes cuyos textos son muy habituales en los cursos básicos de precálculo y cálculo.

1) Repetto (1981:136) introduce concepto de integral con una breve referencia al problema del cálculo del área para luego presentar los símbolos: $\int_a^b f(x)dx$, nombra a cada elemento constitutivo pero llamativamente no hace mención a dx.

La definición de integral definida pareciera ser independiente del significado geométrico. No se explicita la relación entre el área y el proceso de sumación y tampoco se muestran las etapas sucesivas en que la suma de los rectángulos se aproxima “geométricamente” al área.

Por otra parte, la definición de integral no es inducida a partir del límite de sumatorias y esto la convierte en una definición no algorítmica.

2) Sadosky y Guber (1980: 356-357), a diferencia del caso anterior “construye” la definición de *integral* como límite de una suma, pero lo hace en un contexto de fundamentación teórica, sin ningún auxilio gráfico. Por otra parte tal fundamentación teórica es muy débil ya que no introduce el teorema que garantiza la existencia de la suma, (Tall, 1986, en Turégano, 1998). Cabe señalar que, en general, el abordaje de las series numéricas y el estudio de su convergencia es muy posterior en la mayoría de las currículas.

3) De Simone y Turner (1996: 235) construyen el concepto de integral a partir de la aproximación mediante sumas superiores e inferiores de rectángulos. No solamente se prescinde del estudio de la convergencia de las respectivas series sino que:

a) no se explicita como obtener los mínimos y máximos en cada intervalo
b) no se establece relación entre las subdivisiones de intervalos y “dx” que aparece sin ninguna justificación formando parte del símbolo de integral.

Por otra parte, a partir de un análisis curricular, podemos ver que la secuencia de contenidos en el apartado de Cálculo Integral es, en general, en el orden siguiente:

1. Cálculo de primitivas.
2. Métodos de integración.
3. La integral definida. Regla de Barrow.
4. Aplicaciones de la integración: cálculo de áreas y volúmenes.

Esto implica considerar la integración, principalmente, como la operación inversa de la diferenciación. De esta manera el objetivo que se persigue es adiestrar a los estudiantes en el cálculo de primitivas y ello a base de repetir muchos ejercicios, exigiendo un considerable y progresivo nivel de destreza, por lo que se facilitan, incluso, trucos y recetas que contribuyan a ser más eficaces en la obtención del resultado. En los textos analizados aparecen frases tales como:".el truco que facilita el proceso consiste en multiplicar numerador y denominador por." o bien ".utilice la sustitución."

Metodología

La exploración sobre las preconcepciones de los alumnos acerca del cálculo integral fue realizada sobre diferentes comisiones de primer año de ingeniería eléctrica y mecánica. El instrumento de recogida de información fue una evaluación escrita formada por 7 ítems. En la *consigna 1* se intentó averiguar de que modo los alumnos relacionan los conceptos de desplazamiento y velocidad con el concepto de integral. La *consigna 2* presentó una dificultad adicional: la relación con los aspectos geométricos a partir de la necesidad de realizar una estimación del área. En la *consigna 3* se pretendió averiguar de que modo los alumnos aplican la regla de Barrow, y sobre todo, si tienen en cuenta la continuidad de la función a evaluar en el intervalo propuesto. En la *consigna 4* se intentó conocer si los alumnos asocian el concepto de área con el de integral o bien si poseen una interpretación puramente algebraica del concepto. Teniendo en cuenta que los alumnos de primer año de ingeniería utilizan integrales definidas en física, en la *consigna 5* se presentó un problema típico de su utilización para relacionar velocidad y desplazamiento. En la *consigna 6* se intentó conocer si los alumnos identifican conceptualmente integral definida e indefinida y diferencian ambos conceptos. Finalmente la *consigna 7* estuvo destinada a explorar sobre el concepto de integral definida y su estrecha relación con el área que define.

Modelo de evaluación

- *Consigna 1*

La siguiente tabla representa los datos de un ciclista en una prueba por etapas

Día	Tiempo de la etapa (hs)	Velocidad media (Km/h)
Lunes	7	35
Martes	8	30
Miércoles	4	22
Jueves	7	28
Viernes	5	37
Sábado	10	24
Domingo	4	40

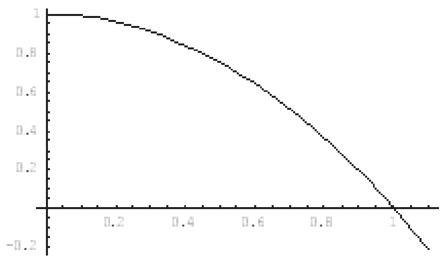
a) ¿Cuál día realizó un menor recorrido?

b) ¿Cuántos km. ha recorrido en la semana?

c) Represente los valores de la tabla mediante un gráfico de barras

- *Consigna 2*

Ahora la velocidad del ciclista está dada por una curva y se solicita estimar los km. recorridos hasta que el ciclista se detiene



- *Consigna 3*

Argumente acerca de la veracidad o falsedad del siguiente desarrollo.

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{1} x^{-2}\, dx = \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_{-1}^{1} = \left.\frac{-1}{x}\right|_{-1}^{1} = \frac{-1}{1} - \frac{-1}{-1} = -2$$

- *Consigna 4*

Calcule $\int_{-1}^{1} |x| dx$

- *Consigna 5*

Una partícula se mueve en línea recta y tiene una aceleración dada por a(t)=6t+4. Su velocidad inicial es v(0)=-6 cm/s y su desplazamiento inicial es s(0)=9 cm. Encuentre la función posición s(t).

- *Consigna 6*

Calcule

a) $\int (2x+5)dx$

b) $\int_{0}^{2} (2x+1)dx$

c) ¿Qué diferencias existen entre los dos cálculos solicitados anteriormente?

- *Consigna 7*

Calcule $\int_{2}^{2} x^2 sen(x)dx$

Los resultados fueron agrupados en tres grupos y para cada una de las consignas se exhiben los porcentajes respecto del total de alumnos evaluados en la tabla 1.

Consigna	Sin respuesta	Respuesta correcta	Respuesta incorrecta
1 a	3 %	88 %	9 %
1 b	3 %	88 %	9 %
1 c	12 %	63 %	15 %
2	70 %	22 %	8 %
3	27 %	0 %	73 %
4	67 %	15 %	18 %
5	20 %	35 %	45 %
6 a	0 %	95 %	5 %
6 b	0 %	95 %	5 %
6 c	58 %	0 %	42 %
7	100 %	0 %	0 %

Tabla 1

Las respuestas obtenidas aparecen como representativas de una desconexión profunda entre el concepto de integral y su particular imagen de ese concepto, tal como se evidencia en las respuestas a las consignas 2, 3 y 4. Particularmente en la consigna 3, las respuestas equivocadas no sólo indican que los alumnos no se ha percatado de que la función es discontinua en $x = 0$, sino que, claramente, no tiene una imagen visual del problema, ni de la gráfica de la función, ni de la propia integral entendida como área. Éste último aspecto también se observa en las respuestas de la consigna 7.

También se evidencia una ausencia de conexión entre los conceptos de integral definida e indefinida (consigna 6c). Ninguno de los alumnos evaluados pudo diferenciar conceptualmente la familia de funciones que representa la integral indefinida, del valor numérico que representa la integral definida.

La consigna 4 fue resuelta correctamente por un número pequeño de alumnos utilizando integrales, sin embargo, ninguno utilizó el atajo de calcular el área del triángulo (figura 1), pues, tal como manifestaron a posteriori, lo consideraron una trivialidad.

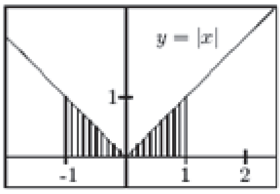


Figura 1

Consideraciones finales

El fracaso de los alumnos en la comprensión de los conceptos de cálculo, de manera más general, y de la integral definida, en particular, constituye uno de los problemas más preocupantes en el aprendizaje de análisis Matemático en primer año de las carreras de ingeniería, ya que esto obstaculiza la comprensión y resolución de numerosísimos problemas de aplicación.

El camino de búsqueda de la causalidad de este fracaso nos conduce a plantear la necesidad de un cambio de enfoque conceptual. Creo que una modificación en los conceptos matemáticos que enseñamos debe hacer referencia a la forma de concebirlos: un cambio concepcional más que conceptual, es decir un cambio en los procesos y representaciones mediante los cuales los alumnos procesan, en este caso, el concepto de integral. En ese sentido, me parece importante estudiar el origen y evolución del concepto de integral definida a lo largo de la historia, de tal manera que los alumnos puedan comprender el valor histórico de estos descubrimientos.

Por otra parte, la utilización del ordenador y la posibilidad, a través de su utilización de realizar enorme cantidad de cálculos y de visualizar las aproximaciones sucesivas, con el propósito de dar significado al concepto de integral definida y a sus propiedades mediante la idea de área bajo una curva.

Referencias bibliográficas

Bachelard, G. (1938). *La formación del espíritu científico*. (14a. ed.). México: Siglo XXI.(Trabajo original publicado en 1938)

Contreras de la Fuente, Ángel (2000). La enseñanza del Análisis Matemático en el Bachillerato y primer curso de universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* España, Huelva. pp. 71-94

De Simone Irene y García de Turner, Margarita (1996). *Matemática 5*. (5ª edición) Buenos Aires, Argentina: A-Z Editora.

Llorens Fuster, José y Santonja Gómez, Francisco (1997).Una Interpretación de las dificultades en el Aprendizaje del Concepto de Integral. *Divulgaciones Matemáticas* vol. 5, Nº. 1/2 , pp. 61-76

Repetto, Celina (1981).*Manual de Análisis Matemático*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones Macchi.

Sadosky, Manuel y Guber Rebeca (1980). *Elementos de cálculo diferencial e integral*. Buenos Aires, Argentina: Alsina.

Turégano Moratella, P (1998) Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. E*nseñanza de las Ciencias,* 16 (2), 233-249