LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CÁLCULO INTEGRAL EN EL CONTEXTO DE PRIMER AÑO DE LA UNIVERSIDAD

Liliana Milevicich
Universidad Tecnológica. Facultad Regional General Pacheco. Buenos Aires Argentina
lmilevicich@ciudad.com.ar, liliana_milevicich@yahoo.com.ar
Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado, Visualización, Lenguaje matemático Nivel: Superior

Resumen. *Atendiendo a la problemática de la enseñanza y aprendizaje de los conceptos del Análisis Matemático, fundamentalmente aquellos relacionados con los procesos infinitos que intervienen en los conceptos básicos de la integral, he focalizado este estudio en diseñar un modo diferente de enseñar y aprender el cálculo integral, ponerlo a prueba y describir sus implicancias en cuanto al rendimiento académico de los alumnos.*

El diseño aplicado es de tipo pre-experimental de pre-prueba – tratamiento- post-prueba con un solo grupo. Las variables independientes fueron el diseño de enseñanza y los conocimientos previos de los alumnos sobre la integral definida. La variable dependiente fue el rendimiento académico.

Palabras clave: preconcepción, retroalimentación, argumentación, extrapolación

Fundamentación

Distintos autores han señalado un conjunto de dificultades en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos del Análisis Matemático, han estudiado sus orígenes y diferentes modos de abordarlo (Guzmán, 1989a, 1989b y 1996; Llorens y Santonja, 1997; Turégano, 1998; Contreras, 2000). Se señalan como dificultades esenciales: la comprensión de los procesos al infinito en la conceptualización del límite, de la derivada e integral y la utilización de los distintos modos de representación. También se asocia tales dificultades con el enfoque algebraico y reduccionista de la enseñanza del cálculo y el abordaje simplista de los conceptos específicos del análisis, tales como las razones de cambio o la integral definida.

Orton ha trabajado durante largo tiempo sobre las dificultades en el aprendizaje del cálculo. Sus investigaciones en la Universidad de Leeds confirmaron que los alumnos tenían dificultades en el aprendizaje de los conceptos de cálculo: la idea de tasa de cambio, la noción de derivada como un límite, la idea de área como el límite de una suma (Orton, 1979). Cornu (1981) arribó a similares conclusiones respecto de la idea de "límite inalcanzable" y Schawarzenberger y Tall (1978) respecto de la idea de "muy próximo a .". Ervynck (1981) no sólo ha documentado las dificultades de los alumnos en comprender el concepto de límite sino que resalta la importancia de los procesos de visualización mediante aproximaciones sucesivas. En este sentido, los habituales gráficos encontrados en los libros de cálculo tienen dos problemas: son estáticos, con lo cual no pueden transmitir la naturaleza dinámica de muchos de los conceptos, y además poseen una variedad limitada de ejemplos, uno o dos generalmente, lo cual conduce a desarrollar en el alumno una imagen restringida del concepto en cuestión. (Tall y Sheath, 1983)

Atendiendo a esta problemática, he focalizado este estudio en *diseñar un modo diferente de enseñar y aprender el cálculo integral, ponerlo a prueba y describir sus implicancias.* La propuesta de abordar el estudio del cálculo integral desde una perspectiva geométrica, se sustenta en los procesos que el hombre ha seguido en su creación de las ideas matemáticas, de modo parecido al que el matemático activo utiliza al enfrentarse con un particular problema de matematización. Considero, parafraseando a Miguel de Guzmán (1989b), que la historia nos proporciona una magnífica guía para enmarcar los diferentes temas, los problemas de los que han surgido los conceptos importantes de la materia y nos da pautas para entender la razón que ha conducido al hombre para ocuparse de ellos con interés.

Al proponer a nuestros alumnos las situaciones-problema en las que tuvo lugar la gestación de las ideas de las que vamos a ocuparnos, deberemos tratar de estimular su búsqueda autónoma, su propio descubrimiento paulatino de estructuras matemáticas sencillas, de problemas interesantes relacionados con tales situaciones que surgen de modo natural.

Metodología

Se aplicó un diseño de tipo pre-experimental de pre-prueba – tratamiento- post-prueba con un solo grupo. Las variables independientes fueron el diseño de enseñanza y los conocimientos previos de los alumnos sobre la integral definida. La variable dependiente fue el rendimiento académico. El objeto de estudio fue una comisión constituida por aproximadamente 35 alumnos de la carrera de Ingeniería Eléctrica.

Un estudio exploratorio sobre las características del grupo nos permitió detectar que varios de ellos poseían formación técnica. A partir del material bibliográfico que utilizan los docentes en estas instituciones y los escritos de los alumnos se infiere que se enseña el concepto de integral como una antiderivada, poniendo el acento en los aspectos algebraicos.

Otro grupo estuvo constituido por alumnos que cursaban la materia en segunda o tercera instancia. Sólo unos pocos de ellos habían concluido el curso en años anteriores sin lograr regularizar la materia, con lo cual poseían algunas ideas previas sobre cálculo integral y sus aplicaciones, el resto del grupo poseían escasos conocimientos previos.

Se consideró necesario atender a la posibilidad de que las ideas previas condicionen la adquisición de un nuevo conocimiento o bien lo obstaculicen (Bachelard, 1975), fundamentalmente en aquellos alumnos que asocian la integral exclusivamente a procesos algebraicos. Es por ello que fue de fundamental importancia la realización de una prueba diagnóstica que permitiese explorar sobre las habilidades e ideas previas que tienen los alumnos respecto de la integral definida, cuyas características y resultados se describen en el desarrollo de la experiencia.

La intervención programática fue pautada para 8 semanas con una frecuencia de 4 horas semanales, espacio habitualmente destinado al cursado de la asignatura Análisis Matemático I.

Las evaluaciones continuas que formaron parte de todo el proceso tuvieron un doble propósito: por una parte como retroalimentación de las producciones de los alumnos, y por la otra, como instrumento de recogida de datos que permitiera valorar la evolución de sus aprendizajes.

La realización de un postest permitió determinar los niveles de avance que se había logrado en el aprendizaje de los conceptos de cálculo integral en relación con los resultados obtenidos en las cohortes de los tres últimos años (2003, 2004 y 2005) y de que modo los saberes previos habían condicionado los distintos resultados académicos.

También se previó la implementación de una entrevista escrita al finalizar la intervención para conocer el grado de satisfacción de los alumnos y sus observaciones sobre la experiencia en la que habían participado.

Para la realización de la misma se contó de un laboratorio con 20 PCs y varias mesas de trabajo adicionales, apropiadas para el trabajo en grupos.

Desarrollo

Una prueba de pretest al inicio de la intervención permitió ubicar a cada alumno en una categoría preestablecida acorde con los siguientes niveles de la variable independiente:

Nivel 1: asocia el concepto de integral al de primitiva de una función y calcula integrales sencillas.

Nivel 2: asocia el concepto de integral al de primitiva de una función, calcula integrales sencillas y vincula el concepto con el área bajo la curva.

Nivel 3: asocia el concepto de integral al de primitiva de una función y vincula el concepto con el área bajo la curva.

Nivel 4: no posee conocimientos previos específicos asociados al tema.

Las características de las producciones nos permitió ubicar a la mayoría de los alumnos en los niveles 1 y 4. Cabe observar que quienes provenían de escuelas técnicas habían logrado un considerable nivel de destreza en el cálculo de integrales pero desconocían su vinculación con el concepto de área.

En cuanto a las características de la intervención, se pautó un trabajo sistemático para cada uno de los encuentros. En la primera parte se discutían los avances y dificultades de la práctica anterior, el propósito esencial era lograr que los alumnos analizaran sus propios errores, y en la segunda se trabajaba sobre nuevos conceptos, en el laboratorio de informática, a partir de un conjunto de actividades orientadas a promover que los alumnos conjeturen, experimenten, y luego extrapolen y argumenten. El uso del ordenador permitió disponer de una gama muy amplia de problemas, dónde la elección no fue condicionada por las dificultades del cálculo algebraico.

La primera parte de cada encuentro estuvo guiada por el docente titular de la cátedra, un docente auxiliar y un docente observador. La segunda parte contó con el mismo personal y un docente jefe de trabajos prácticos, adicional.

Se rediseñaron las técnicas de evaluación, de tal manera que el análisis de las producciones, facilitase al alumno el poder reflexionar sobre sus propios errores. Las evaluaciones continuas durante la intervención se implementaron a partir de:

a) las producciones de los alumnos plasmadas semanalmente en sus carpetas y cuadernos electrónicos. Éstos permiten guardar celdas con comentarios, observaciones, etc; material muy valioso a la hora de evaluar el grado de comprensión logrado por los alumnos,

b) la participación del alumnado en el desarrollo de las clases y en los grupo de trabajo.

En ese sentido, las planillas de seguimiento de actividades resultaron una herramienta eficaz para evaluar diferentes aspectos que hacen al desempeño de cada integrante (Planilla 1).

Pautas de evaluación	Alumno
Ha determinado necesidades de información	
Ha sabido evaluar constantemente su trabajo y los resultados	
Ha podido localizar y obtener información	
Ha logrado procesar y producir información	
Ha podido documentar (mantener registro de la información)	
Ha tenido éxito en manipular la información para obtener conocimiento	
Ha tenido éxito en manipular la información para obtener conocimiento	
Ha sabido comunicar información	
Ha sabido referir su aprendizaje (puede decir dónde empezó y donde terminó)	
Ha sabido referir las formas en las que aprende	
Ha sabido referir cómo los otros ayudan a su propio aprendizaje y cómo él contribuye al de los otros	
Ha sabido desarrollar una capacidad crítica de su propio trabajo y de su propio proceso	
Ha sabido desarrollar una capacidad crítica de su propio trabajo y de su propio proceso	
Ha sabido usar y construir estrategias para la resolución de los diferentes momentos de la tarea	
Ha sabido localizar diferentes caminos (procesos) para lograr el resultado	
Ha sabido usar y construir estrategias para el mejor uso y aprovechamiento de las herramientas informáticas	
Ha sabido identificar patrones, es decir, referir la lógica detrás los procesos para el uso de herramientas	

Planilla 1: Desempeño de los alumnos

Un resumen de las anotaciones realizadas por el docente observador a lo largo de las 8 semanas nos permitió inferir el cambio de actitud en un grupo de estos alumnos. De la población inicial, conformada por 35 cursantes, 24 de ellos mostraron cada vez mayor compromiso con el desarrollo de las actividades. El trabajo de retroalimentación llevado a cabo en la primera parte de cada encuentro, contó con la asistencia de todo el grupo a partir del cuarto encuentro.

El postest se pautó como evaluación de cierre del proceso, con actividades similares a las que habían formado parte de la experiencia.

- *Problema 1*

a) Calcule el área de la región determinada por las curvas $y=e^x$, $y=3$, $x=0$

b) Determine el volumen del sólido obtenido haciendo girar la región limitada por esas curvas alrededor de eje x

c) Suponga que eje de revolución está dado por y=k ¿Cuál deber ser el valor de k para que el volumen sea 16?

d) ¿Cuáles son los límites de integración: **a** y **b**, si se desea obtener un sólido alrededor del eje y, a partir de esta región?

e) ¿Varía el valor del volumen si se modifican los límites con un corrimiento hacia arriba de tal modo que el límite inferior es ahora **a+h** y el superior es **b+h**? Justifique su respuesta

- *Problema 2*

Proponga una función tal que el área bajo la curva entre 0 y n, se corresponda con el área del triángulo de base n y altura 1/n

- *Problema 3*

Encuentre el número k / la recta y=k divida la región limitada por las curvas $y=x^2$, y=10 en dos regiones con áreas iguales

- *Problema 4*

Sea la región determinada por $S=\{(x,y)/\ a\leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq \mathrm{Tan}(x)\ \mathrm{Sec}(x)\}$

a) Encuentre valores adecuados para a y b de tal modo que la región resulte finita.

b) Estime el área en el ítem anterior con una aproximación de 50 subdivisiones

- *Problema 5*

Encuentre una función f y un número a tales que: $6+\int_a^x \frac{f(t)}{t^2}dt = 2\sqrt{x}$

- *Problema 6*

Sea g(x)= $\int_1^{\cos(x)} \sqrt[3]{1-t^2}\,dt$

a) Grafique g

b) ¿Cuáles son los puntos críticos de g?

c) ¿En cuáles puntos g tiene máximos o mínimos?. Justifique su respuesta

d) Analice la concavidad de g

e) Analice los intervalos de crecimiento y decrecimiento de g

Si bien el postest tuvo lugar en el laboratorio de informática y cada alumno pudo utilizar mismas las herramientas que durante la experiencia, algunos ítems pretendían evaluar una conceptualización que no requería del uso del software. Tal es el caso de los ítems 1c, 1d y 1d, dónde tuvieron importantes inconvenientes. Del mismo modo ocurrió con el problema 3.

No se presentaron mayores dificultades en relacionar derivada e integral en los problemas 5 y 6. Un grupo importante de alumnos utilizó correctamente el Teorema Fundamental del Cálculo.

En general, no se presentaron dificultades en los desarrollos algebraicos. Es posible que estos obstáculos no se hayan presentado, o al menos en una menor proporción, debido al uso del ordenador.

Cabe mencionar que no hubo diferencias sustanciales entre los alumnos que pertenecían a las diferentes categorías, según el pretest.

Los porcentajes de respuestas correctas, por ítem, sobre el total de 24 alumnos evaluados, se exhiben en el gráfico 1.

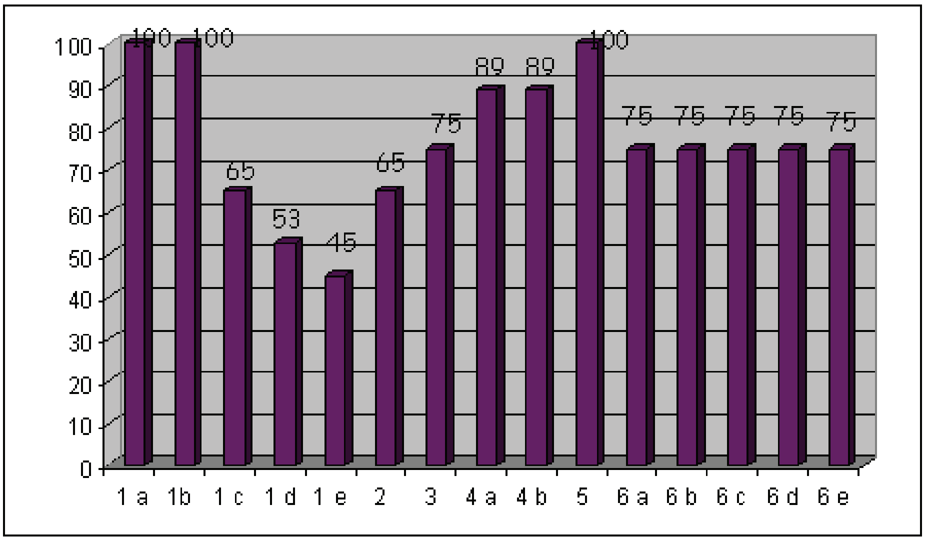

Gráfico 1: exhibe los porcentajes de respuestas correctas por ítem.

Conclusiones

El proceso de construcción del área a partir de la *sumación* que permite sumar infinitas cantidades infinitamente pequeñas resulta difícil de comprender por parte de los alumnos. El análisis del pretest permitió confirmar algunas conjeturas:

- Generalmente, los estudiantes identifican “integral" con “primitiva". La integral, para ellos, no comporta ningún proceso de convergencia ni tampoco ningún aspecto geométrico.

- Las integrales definidas" se identifican con la regla de Barrow, incluso cuando esta no pueda aplicarse.
- Los alumnos no asocian el concepto de área al de integral. Algunos de ellos han escuchado que existe una relación entre las integrales (definidas) y el área, pero no realizan una adecuada unión entre ambas. Existe una interpretación puramente algebraica del concepto.

Respecto de los resultados de la intervención:

- La utilización de un software ad-hoc permitió a los alumnos visualizar la aproximación geométrica entre los rectángulos con base cada vez más pequeña y el área curvilínea que se pretende determinar.
- La utilización del ordenador constituyó una valiosa estrategia específica con el propósito de lograr aprendizajes significativos.
- Los resultados obtenidos en el postest permiten inferir que estos alumnos, en su gran mayoría, habían logrado establecer un puente entre la conceptualización de la integración y los problemas de aplicación relacionados con la ingeniería.
- Un análisis de los resultados del postest en relación con la categorización inicial, permite concluir que las ideas previas no condicionaron la adquisición de los nuevos conocimientos. No se observaron diferencias entre los alumnos categorizados en los niveles 1 y 4.

Referencias bibliográficas

Baçhelard,G. (1975) *La formación del espíritu científico.* (21ª edición). México: Siglo XXI.

Contreras, A (2000). La enseñanza del Análisis Matemático en el Bachillerato y primer curso de universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* España, Huelva, 71-94.

Cornu, B.(1981). Apprentissage de la notion de limite: modèles spontanés et modèles propres. En *Actes du Cinquième Colloque du Groupe Internationale PME,* (pp. 322-326). Grenoble, France.

Ervynck, G.(1981). Conceptual difficulties for first year university students in the acquisition of the notion of limit of a function. En *Actes du Cinquieme Colloque du Groupe Internationale PME, (pp. 330-333). Grenoble, France.*

Guzmán, M y Colera, J (1989a). *Matemáticas II.* España. Madrid: Anaya.

Guzmán, M (1989b). Tendencias actuales de la enseñanza de la matemática. Studia Paedagógica. *Revista de Ciencias de la Educación,* 21, 19-26.

Guzmán, M (1996). *El rincón de la pizarra. Ensayos de Visualización en Análisis Matemático. Elementos básicos del Análisis*. España. Madrid: Pirámide.

Llorens, J y Santonja, F (1997).Una Interpretación de las dificultades en el Aprendizaje del Concepto de Integral. *Divulgaciones Matemáticas,* 5 (1/2), 61-76.

Orton, A.(1979). An investigation into the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults. En *Cognitive Development. Research in Science and Mathematics,* Universidad de Leeds (pp.201–215). Gran Bretaña.

Schwarzenberger, R. y Tall, D.(1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. Mathematics Teaching*, 82,44–49.*

Tall, D. y Sheath, G. (1983). Visualizing Higher Level Mathematical Concepts Using Computer Graphics. En *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 357–362). Israel.

Turégano, P (1998) Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. E*nseñanza de las Ciencias*, 16 (2), 233-249.