

## PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS: UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA APRENDER MATEMÁTICAS

Elia Trejo Trejo, Patricia Camarena Gallardo

CICATA-IPN

UTVM, ESIME-IPN

elitret@hotmail.com

Campo de investigación: Resolución de problemas

México

Nivel: Superior

**Resumen.** *En las Universidades Tecnológicas se forman profesionistas que se insertan en un mundo laboral altamente cambiante y competido, en él se debe dar solución a problemas reales, por lo que se requiere una formación matemática vinculada con otras áreas del conocimiento. Para formar Técnicos Superiores competentes en matemáticas, se establece como estrategia la resolución de problemas contextualizados. Se aborda un caso particular, el objeto matemático de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, para la resolución de mezclas de soluciones azucaradas y se fomenta su tránsito en el registro algebraico y gráfico con el objetivo de que el estudiante se apropie del conocimiento. Se presentan los primeros resultados de la puesta en marcha de una propuesta didáctica.*

**Palabras clave:** Contexto, vinculación, matemática

### Introducción

La instrucción matemática en el nivel Técnico Superior Universitario vive condiciones particulares pues de acuerdo al modelo educativo se debe privilegiar un conocimiento matemático contextualizado; el estudiante se forma para insertarse directamente en el mercado laboral, en su vida profesional deberá resolver problemas técnicos donde se requiere integrar conocimientos específicos de su formación con conocimientos matemáticos básicos. Un caso particular lo ocupan los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, de forma recurrente se requieren para modelar fenómenos reales del área de competencia de los Técnicos Superiores en Tecnología de Alimentos (balance de materia, estandarización de leche, jugos, soluciones químicas, por citar algunas). Sin embargo, a pesar de ser un tema que se aborda desde secundaria, en el nivel educativo de interés se ha detectado que los estudiantes presentan dificultades para modelar mediante este objeto matemático problemas contextualizados. Esta problemática no es ajena a otros niveles educativos, muchos investigadores se han ocupado de su estudio (Guzmán, 1999 y 2000; Panizza et al., 1995 y Ramírez, 1997 citados por Herrero, 2004). A pesar de ello y para los fines de este trabajo, es fundamental considerar que prácticamente no se han realizado estudios

831

sobre sistemas de ecuaciones lineales en el contexto del nivel de estudios de interés, siendo un campo de aprendizaje con condiciones particulares.

Como estrategia para facilitar el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, se planteó el uso de problemas contextualizados en los que además implicó trabajo en diferentes registros de representación semiótica y de tránsito entre ellos. El marco teórico utilizado fue el de representaciones semióticas de Duval (1999); debido a que como indica éste autor, la coordinación de varios registros de representación semiótica resulta fundamental para una asimilación conceptual de un objeto, siendo necesario que el objeto no se confunda con sus representaciones, pero debe ser reconocido en cada una de ellas.

Dado que se trabajó con un problema contextualizado se tuvo como marco metodológico a la fase didáctica de la Matemática en Contexto de las Ciencias (Camarena, 1995), en donde se incluye a la matemática en contexto. Esta estrategia didáctica se caracteriza por presentar conocimientos integrados a los alumnos a partir de una situación problemática de otras disciplinas, cuya característica principal es que se trata de problemas reales del área de estudio del alumno. La matemática en contexto toma el problema, lo resuelve e interpreta la solución en el mundo de la disciplina del contexto.

### **Metodología**

Para establecer como propuesta de aprendizaje de las matemáticas el uso de problemas contextualizados se trabajó en dos etapas: a) Desarrollo de la contextualización, para presentar un problema contextualizado se realizó previamente una investigación con profesores del área técnica y egresados, para determinar el objeto matemático que con mayor frecuencia se utiliza en el ámbito laboral y/o profesional, así como la razón de uso, encontrándose que repetidas veces se utiliza el objeto sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas para problemas de mezclas. La contextualización se realizó con base en las etapas de la matemática en contexto; durante la etapa de resolución matemática del problema se trabajó con diferentes representaciones, articulando el marco teórico y la fase didáctica de la matemática en contexto (figura 4). b) Experiencia en el aula con el problema contextualizado, se trabajó con nueve estudiantes voluntarios de primer cuatrimestre del Programa Educativo de Tecnología de Alimentos a quienes

se les propuso el problema contextualizado, de tal manera que los estudiantes se plantearan preguntas e incorporaran sus conocimientos previos para trabajar en diferentes registros de representación semiótica (verbal, algebraico y gráfico). La actividad de la secuencia alude al contexto de un laboratorio químico donde se pueden preparar mezclas de sustancias azucaradas, el fin es realizar una nueva mezcla a partir de algunas existentes.

## Resultados y discusión

### Desarrollo del problema contextualizado

#### *Un caso específico*

Para un Técnico Superior Universitario en Tecnología de Alimentos es común que en su vida profesional tenga que realizar mezclas de diferentes sustancias o materias primas para poder obtener un producto final. Como estrategia de solución para determinar cuántas unidades (gramos, kilos o mililitros) deben colocarse de cada una de las sustancias de interés, se hace uso de sistemas de ecuaciones lineales. A nivel profesional no importa matemáticamente la manera de resolver el problema (gráficamente, algebraicamente ó mediante el cuadrado de Pearson), si no el obtener la solución y como consecuencia de ello el producto o el balance de materia. Bajo esta consideración, creemos que problemas contextualizados de ésta naturaleza pueden aprovecharse como estrategia didáctica para que el alumno se motive en el aprendizaje de las matemáticas y como consecuencia se apropie del conocimiento.

Derivado de encuestas realizadas a egresados que están insertos en el campo laboral de Tecnología de Alimentos, se determinó utilizar un problema de mezclas (balance de materia), resuelto por sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Con este problema se establecieron las etapas de la fase didáctica de la matemática en contexto y al proponer la solución del problema se buscó la articulación de la representación gráfica con la algebraica. Enseguida se explica brevemente la contextualización del problema.

### Planteamiento del problema contextualizado

Se tienen preparadas soluciones azucaradas al 35% y 60%. Usted requiere preparar 100 mL de solución azucarada al 50% utilizando la solución al 35% y 60% ¿Cuántos mL de cada una deberán agregarse para obtener la mezcla a la concentración deseada?. Resolver el problema algebraica y gráficamente.

### Determinación de variables y constantes

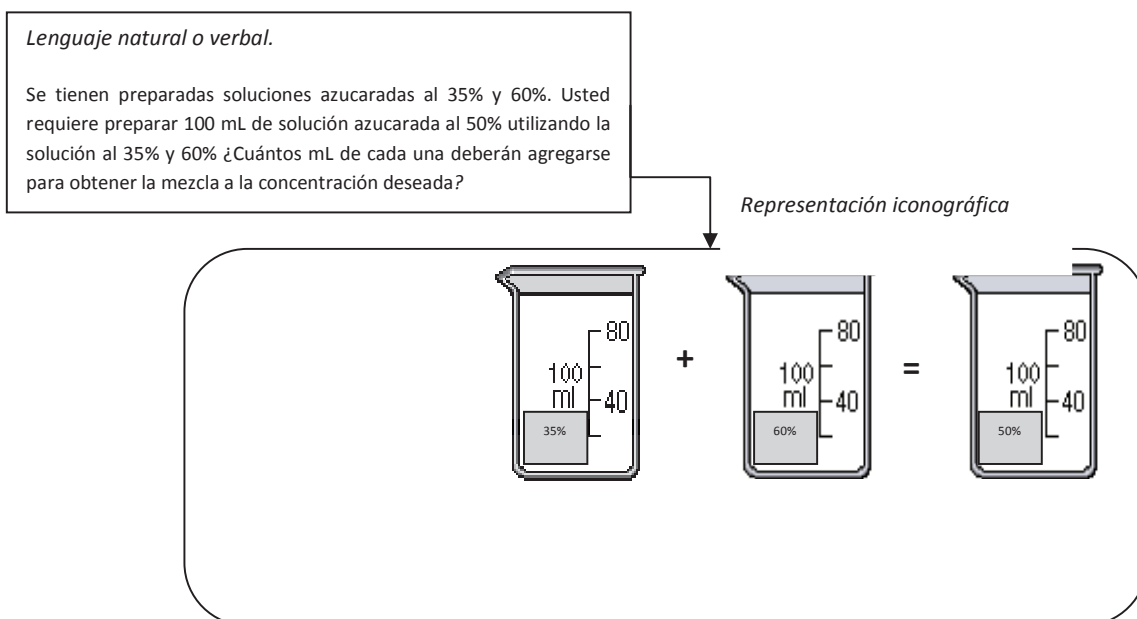
Un paso importante dentro de la fase didáctica de la Matemática en Contexto es la determinación del modelo matemático del problema contextualizado, para lo cual es necesario establecer las variables y constantes del mismo, para este caso las definidas se muestran en la tabla 1.

Tabla 1. Variables y constantes del problema contextualizado.

<i>Variables</i>	<i>Constantes</i>
mL a tomar de solución al 35 y 60%	Concentración de soluciones azucarada a utilizar (35% y 60%)
	Volumen final (100 mL). Concentración final (50%)

### Determinación del modelo matemático

En la determinación del modelo matemático se fomenta el uso de las representaciones semióticas. Entonces, lo primero que debe ocurrir es el entendimiento del problema en el lenguaje natural (entender el problema en términos del balance de materia –mezcla de sustancias o materia prima) (figura 1).



Condiciones	Mezclar (+)		Obtener
	Solución al 35%	Solución al 60%	
Volumen	x	y	100 mL
Concentración	0.35	0.60	0.50

Figura 1. Registro en lenguaje natural o verbal e iconográfico del problema contextualizado.

Una vez entendido el problema en el lenguaje natural o verbal y con representación iconográfica del mismo (no necesario) puede plantearse el modelo matemático, que en este caso corresponde a un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas (figura 2).

a) Ec. de Volumen	$x + y = 100$
b) Ec. de concentración	$0.35x + 0.60y = 0.50(100)$

Figura 2. Modelo matemático al problema contextualizado propuesto.

### Solución matemática del problema contextualizado

Es claro que para la solución de un sistema de ecuaciones lineales existen diversos métodos. Sin embargo, los profesores del área técnica indicaron que regularmente utilizan el método algebraico

de reducción, razón por la cual se resuelve matemáticamente el problema contextualizado utilizando este procedimiento (tabla 2). Durante la solución matemática del problema debe fomentarse el uso de diferentes registros, así como el traslado de ellos para lograr la conceptualización del objeto matemático: sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, siendo necesario a) La identificación y b) La articulación de los registros.

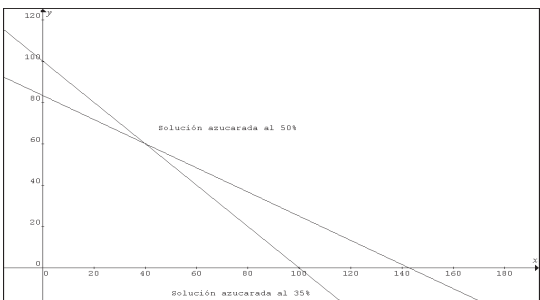
<p>Modelo matemático (Registro algebraico)</p>	<p>a) Ec. de Volumen <math>x + y = 100</math>                  b) Ec. de concentración <math>0.35x + 0.60y = 0.50(100)</math></p>
<p>Solución algebraica Método de reducción</p>	$\begin{array}{r} x + y = 100 \quad 0.35) \Rightarrow -0.35x - 0.35y = -35 \\ 0.35x + 0.60y = 0.50(100) \quad \Rightarrow \underline{0.35x + 0.60y = 50} \\ \hline 0 \quad + 0.25y = 15 \end{array}$ $\begin{array}{l} y = \frac{15}{0.25} \\ y = 60 \end{array} \left  \begin{array}{l} x + y = 100 \\ x + 60 = 100 \\ \hline x = 40 \end{array} \right.$
<p>Solución gráfica (Registro gráfico)</p>	

Tabla 2. Resolución matemática del problema contextualizado

a) Identificación de registros

Para las matemáticas, las representaciones juegan un papel importante, ya que permiten trasladar ideas intangibles en graficas, expresiones algebraicas o analíticas y tablas que pueden ser apreciadas por nuestros sentidos. Tomando como base estas representaciones, se intenta dar un significado a un concepto matemático, en este caso sistema de ecuaciones lineales. En la tabla 3 se

muestran las representaciones del problema contextualizado de interés. Al utilizar las representaciones el alumno tiene la posibilidad de construir el significado de sistemas de ecuaciones lineales, mediante el enlace entre el pensamiento operativo (ejecución de procedimientos) y el estructural (adquisición de conocimientos); por otro lado, cuando el alumno tiene una base de significados, esto propicia la construcción, dentro de un contexto, de un nuevo significado y es a partir de esta actividad intelectual que se posibilita la aprehensión del conocimiento.

Objeto matemático	Representación		
	Registro verbal (lenguaje natural)	Registro algebraico	Registro gráfico
Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.	Se tienen preparadas soluciones azucaradas al 35% y 60%. Usted requiere preparar 100 mL de solución azucarada al 50% utilizando la solución al 35% y 60% ¿Cuántos mL de cada una deberán agregarse para obtener la mezcla a la concentración deseada?	$x + y = 100$ $0.35x + 0.60y = 50$	

Tabla 3. Identificación de registros del objeto matemático sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

### b) Articulación de registros

La relación existente entre los registros de representación se considera una actividad escolar propia del aprendizaje. Deben existir varias representaciones del objeto, dando una idea más general del mismo, pues toda representación es cognitivamente parcial en referencia a lo que ella representa y de una representación a otra no son los mismos aspectos de un contenido los que son representados. En la figura 3 se muestran las representaciones del objeto sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas así como la posible articulación entre ellas.

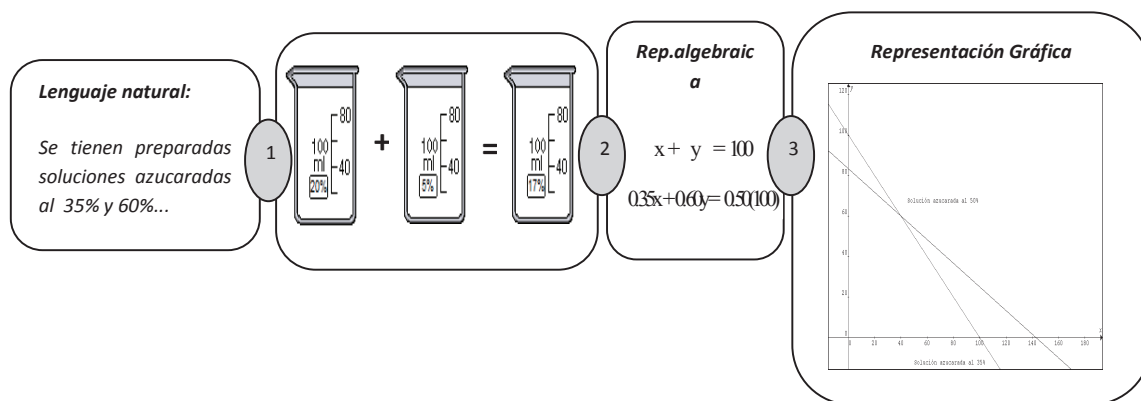


Figura 3. Articulación de registros del objeto matemático sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

1. Cuando el problema se entiende en el lenguaje verbal puede realizarse una representación simbólica (iconográfica) que posibilita determinar cuáles son las variables y constantes que formaran parte del modelo matemático (ecuaciones) del fenómeno en estudio.
2. Al entenderse el problema contextualizado en el lenguaje natural o verbal y trasladarlo a un esquema (lenguaje iconográfico), se utiliza este para la representación algebraica dada por dos ecuaciones, una de ella representa la mezcla de soluciones para obtener 100 mL de solución ( $x+y=100$ ) y la otra la cantidad de cada una de las soluciones (concentración) a mezclar para obtener los 100 mL al 60%.
3. De la obtención del modelo matemático se hace la conversión a la representación gráfica. Para realizar el registro gráfico se tienen diferentes estrategias, tales como realizar una tabla de datos o trabajar las ecuaciones del modo  $y=mx+b$  y a partir de la definición de la pendiente y del punto de intersección con el eje “y” esbozar la gráfica que represente a la función lineal. La representación gráfica es especialmente importante debido a que si el alumno tiene la habilidad de pasar del registro gráfico al analítico y viceversa; entonces, se puede establecer que el alumno ha conceptualizado el objeto matemático, dado que la comprensión de un objeto matemático reposa en la *coordinación de al menos dos registros de representación* (Duval, 1999), en este caso el algebraico y gráfico.



### **Solución e interpretación requerida por el contexto y en términos del problema**

Al resolver el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, los valores son  $x=20$ ,  $y=60$ , lo cual se comprueba con la representación gráfica intersecándose ambas líneas en las coordenadas (20,60). Es decir, para la preparación de 100 mL de solución azucarada con una concentración del 50% a partir de una mezcla de soluciones al 35 y 50%, solamente existe una combinación que permite la mezcla. Que consiste en mezclar 20 mL de la solución al 35% y 60 mL al 60%. Al hacer la interpretación de cada una de las graficas se encuentra que hay una relación inversamente proporcional es decir, conforme aumenta el volumen de la solución disminuye su concentración.

### **Experiencia en el aula con el problema contextualizado**

Al proponer la secuencia didáctica a los estudiantes se encontró que dos equipos lograron obtener el resultado además pudieron transitar entre los diferentes registros por lo que se puede decir que se apropiaron del conocimiento (Duval, 1999). El tercer equipo abandonó la actividad.

### **Conclusiones**

Los avances de la presente investigación permiten hasta el momento llegar a las conclusiones siguientes:

El proponer en la clase de matemáticas problemas en el contexto profesional o técnico de los alumnos permite que ellos se involucren en su resolución.

Los problemas contextualizados posibilita dotar de significado a las matemáticas al mostrar al alumno dónde aplicarlas en su vida profesional o laboral, cobrando interés por su estudio.

Durante la puesta en escena de la propuesta didáctica se advirtió que está fuertemente arraigado el uso del registro gráfico restándole importancia al registro algebraico.

Los alumnos logran pasar del registro gráfico al algebraico y viceversa, sin embargo, no entienden el porqué hacerlos para usos prácticos, debido a que solo con el registro algebraico pueden dar solución a los problemas planteados.

### Referencias bibliográficas

Camarena, P. (1995). La enseñanza de las matemáticas en el contexto de la ingeniería. *XXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana.* , 123-153. México.

Camarena, P. (2002). *La matemática en el contexto de las ciencias: Fase didáctica.* En J. Delgado (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16 (1)* México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Duval, R. (1999). *Sémiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Colombia: Universidad del Valle.

Herrero, S. M. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 7 (1)*, 49-78