

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA OPTIMIZACIÓN DINÁMICA: EL CASO DEL CÁLCULO DE VARIACIONES Y LA TEORÍA DE CONTROL

José Campero P., María Trigueros Gaisman

CICATA-IPN

México

ITAM

campero@itam.mx, trigue@itam.mx

Campo de investigación: Investigación en didáctica dentro del pensamiento variacional

Nivel: Superior

Resumen. *El presente artículo presenta las características de un proyecto de evaluación de una propuesta didáctica. Posteriormente se concentra en una parte del mismo correspondiente a la evaluación a través de un cuestionario. Se diseñaron instrumentos didácticos para apoyar la construcción de los estudiantes de los conceptos de funcional y variación, además de las técnicas de solución de problema de Optimización Dinámica, usando la Teoría APOE como marco teórico. Después de la instrucción se usó un cuestionario para analizar las construcciones de los alumnos al final del curso. Los alumnos avanzaron en la construcción de estos conceptos en relación con las observaciones en otros cursos, aunque los resultados relacionados con el concepto de funcional y la relación entre conceptos son menos satisfactorios.*

Palabras clave: optimización, variaciones, control, funcional, abstracción reflexiva

Introducción

La enseñanza de la optimización dinámica es muy importante en la formación de Matemáticos, Físicos, Ingenieros y Economistas (Bellman, R., 1957; Chiang, A.C., 1992; Cerdá, E., 2001). No hay, sin embargo, estudios que analicen las dificultades que los alumnos presentan en su aprendizaje, a pesar de que los conceptos en estudio son complejos y a los estudiantes obtienen, en general, resultados pobres. El presente artículo reporta los primeros resultados de un proyecto cuyo objetivo es la evaluación de una propuesta didáctica diseñada con el fin de analizar las construcciones de los estudiantes en un curso de optimización. En este trabajo se reportan los resultados de la primera parte de este estudio, para ello, se presentan las preguntas de investigación, el marco teórico y la metodología de la propuesta y el análisis de las construcciones *globales* de los alumnos que tomaron el curso en relación a los conceptos de funcional, variación y su optimización.

El objetivo central de la propuesta didáctica consiste en la elaboración de un diseño de instrucción basado en una teoría de la Educación Matemática con la idea de apoyar a los estudiantes en la construcción de los conceptos ligados al de funcional por la idea de variación y que son esenciales

para resolver cualquier problema de Optimización Dinámica. En el diseño de la propuesta, la dimensión epistemológica ha jugado un papel importante pues se basó por una parte en el análisis histórico-epistemológico de esta disciplina, que permite descubrir tanto el contexto en el que surge como su desarrollo, y por otra parte, en la teoría APOE que hace posible la modelación y análisis cognitivo de la construcción de los conceptos por los alumnos.

Las preguntas de investigación que este estudio pretende responder son:

- i) ¿Qué conceptos previos debe haber construido un estudiante para construir el concepto de función y los asociados a él por la variación?
- ii) ¿Qué construcciones mentales realizan los estudiantes en la construcción de estos conceptos? y ¿Cuáles son los mecanismos cognitivos asociados a dicha construcción?

Para ello, y de acuerdo a la metodología de la teoría APOE, es necesario i) Elaborar una descomposición genética preliminar que describa la construcción de los conceptos bajo estudio. ii) Diseñar una propuesta didáctica, basada en la descomposición genética y analizar las construcciones elaboradas por los alumnos. iii) Después del análisis de *todos* los datos, determinar si es necesario refinar la descomposición genética. En este trabajo se reportan resultados de la primera parte del estudio que concierne a los primeros dos objetivos dado que se presenta únicamente el análisis de los datos globales obtenidos y ello no proporciona los datos necesarios para tomar decisiones sobre la descomposición genética.

Marco teórico

El marco teórico que se utiliza en el trabajo es la teoría APOE (Asiala, M., A. Brown, DeVries D., Dubinsky, E., Mathews D. & Thomas K. 1996) que ha sido empleada en muchas investigaciones y ha mostrado su eficacia tanto en el análisis de datos como en el diseño didáctico. El uso de esta teoría permite al investigador un análisis fino de las construcciones necesarias para construir un concepto matemático, así como analizar las construcciones que los estudiantes ponen de manifiesto cuando resuelven problemas relacionados con dicho concepto. Además, la teoría no separa la investigación de la enseñanza, por lo que resulta atractiva para el diseño de propuestas didácticas.

La teoría APOE está basada en la epistemología piagetiana. Toma de ella la abstracción reflexiva como mecanismo de construcción de conocimiento que se activa a través de la acción del sujeto sobre objetos matemáticos (Dubinsky, E., 1991). A su vez, considera su acción a través de otros mecanismos: interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversión que son fundamentales en la construcción de objetos matemáticos. Los procesos que se identifican en la construcción del conocimiento son, la asimilación y la acomodación, tomando en consideración que el conocimiento no evoluciona de manera continua; el conocimiento se desarrolla en saltos manifestados por períodos de equilibración y desequilibración. La Teoría APOE hace una transposición al ámbito de la Educación Matemática para aplicarla directamente a la construcción de conceptos matemáticos avanzados (Trigueros, M., 2005).

Metodología

La metodología que se deriva de la teoría APOE consiste en diseñar una descomposición genética que modela la forma en que los estudiantes construyen el concepto de interés. Para este estudio, el diseño de esta descomposición se basó en la experiencia de los autores como profesores y en un análisis histórico-epistemológico sobre la optimización en general, en especial, a partir de la aparición de las computadoras a mediados del siglo XX, con énfasis en el desarrollo de la optimización dinámica: cálculo de variaciones y teoría de control (Pontryagin, L., Boltyansky V., Gamkrelidze, R. & Mishenko, E., 1962). Posteriormente se siguió el ciclo de investigación de la Teoría APOE que incluye, después del análisis teórico, el diseño y aplicación de instrumentos con base en la descomposición genética para documentarla y para validar la propuesta didáctica. Finalmente se hizo el análisis global de los datos empíricos con base en la descomposición genética, para obtener una primera descripción general de las construcciones que manifiestan los estudiantes con la cual se pueden establecer comparaciones las primeras comparaciones entre ellos, verificar si hay evidencia de las construcciones modeladas en la descomposición genética y obtener una primer análisis de la eficacia del diseño didáctico.

Después realizar el análisis histórico, se diseñó así una primera descomposición genética para los conceptos de interés en este estudio. Ésta se utilizó en el diseño de instrumentos didácticos y de validación que consistieron de siete actividades para desarrollar en una clase de la materia Matemáticas aplicadas a las Ciencias Económicas que se imparte en una universidad privada

mexicana. Los instrumentos de diagnóstico consistieron de tres exámenes, tres cuestionarios y de una entrevista semi-estructurada que se aplicó a 10 estudiantes elegidos de manera que representaran distintos niveles de comprensión de los conceptos a juzgar por su desempeño en el curso.

A continuación se muestran ejemplos de ejercicios de las actividades de clase:

1) Problema económico: Modelo de Ramsey (1928) (Citado en Cerdá, E., 2001)

Supongamos que $K = K(t)$ representa el stock de capital al tiempo t , $Y = f(K)$ el producto nacional (observar que otra vez $Y = f(K)$ es una función definida sobre un espacio de funciones), en Economía se cumple que: $\frac{df}{dK} > 0$ y $\frac{d^2f}{dK^2} \leq 0$.

El modelo de Ramsey establece que: $f(K(t)) = \frac{dK}{dt} + C(t)$, donde $C(t)$ representa el consumo en el tiempo t . En otras palabras, este modelo afirma que el producto se divide entre consumo e inversión. ¿Cómo deben las autoridades planear la inversión?

Análisis. Esta parte del problema intenta inducir la necesidad de optimizar una función de utilidad social $U(C(t))$ que depende del consumo en el tiempo.

2) Dadas las siguientes expresiones determinar cuáles son funcionales.

$$\text{i) } f(x, \dot{x}, t) = \sqrt{1 + \dot{x}^2} \quad \text{ii) } J(x) = \left(\int_0^5 x(t)^2 dt, \sqrt{1 + \dot{x}^2} \right) \quad \text{iii) } J(x) = \int_0^T (x^2 + \dot{x}^2) dt$$

3) a) Determinar el dominio y el rango de cada una de las expresiones anteriores.

b) En base a la respuesta dada en el inciso anterior, ¿Cambiaría alguna de las respuestas de la pregunta dos? En caso afirmativo, ¿en qué consistirían dichos cambios?

c) Dar tres ejemplos de funcionales. Justificar que sean funcionales.

Análisis de las tareas: Se considera que si un alumno identifica correctamente los casos que corresponden a los funcionales, se puede considerar que ha interiorizado las acciones que permiten generalizar el esquema de función para incluir el de funcional. Si puede dar al menos un ejemplo, se considerará que el alumno puede únicamente hacer acciones sobre el concepto de

funcional. Si además de reconocer los funcionales el alumno puede dar ejemplos o explicar sus características esenciales supondremos que ha interiorizado las acciones en el proceso de distinción entre una funcional y otro tipo de funciones. Si además puede dar ejemplos de funcionales diferentes a los vistos en clase y ejemplos de funciones en las que especifique por qué no pueden ser funcionales, o explicar en abstracto los elementos esenciales que identifican una funcional, supondremos que ha encapsulado el proceso de distinción de la funcional en un objeto.

La evaluación de la propuesta didáctica consistió de cuatro partes:

i) Evaluación global de la construcción de conceptos, en la cual se evaluaron las construcciones del grupo en conjunto a través de un análisis del número de alumnos que muestran cada tipo de construcción en cada uno de los conceptos de interés utilizando un cuestionario aplicado al final del semestre y que se reporta en este trabajo.

ii) Evaluación de la evolución en la construcción de conceptos. En esta parte analizará el cambio en las construcciones de cada estudiante de una muestra aleatoria, representativa del grupo, considerando los elementos antes mencionados.

iii) Análisis de la construcción de relaciones entre los distintos conceptos en un la muestra seleccionada de alumnos, comparando sus respuestas a la entrevista y los cuestionarios.

iv) Comparación de las respuestas de los estudiantes del grupo en la entrevista final con las dadas por cuatro estudiantes de otro grupo que cursó la materia Optimización Dinámica que no siguieron la propuesta didáctica experimental. Es importante mencionar que en esta materia se dedica el semestre completo al estudio del Cálculo de Variaciones y la Teoría de Control, es decir, los conceptos se estudian a mayor profundidad, también para estudiantes de Economía. En este artículo nos centramos en los resultados de la primera parte de esta investigación: la evaluación global de la construcción de conceptos.

Resultados

La siguiente tabla muestra un resumen de dichos resultados. En ella representamos con 1 una concepción acción, 2 una concepción proceso y 3 una concepción objeto.

Resumen del análisis en forma matricial

	Dif. V. o C	Dif. Estado o Cont	Func.	Cond 1er. Ord V	Cond 1er. Ord C	Cond Sufs.	Cond Transv
Ge	1	2	3	2	2	1	1
Er	1	1	1	2	2	0	1
Ya	2	0	1	2	2	1	3
Jr	2	3	2	2	2	1	3
Ed	1	0	1	0	1	1	1
Fr	1	1	0	2	2	1	1
Ar	0	1	2	2	2	1	3
Pe	1	1	1	1	1	1	1
Al	1	0	0	2	1	1	1
Mi	2	1	2	2	2	2	3
Er	2	2	2	2	2	1	1
Ma	2	2	2	2	2	3	3
Hu	2	3	1	2	2	3	1
Na	2	1	0	2	2	2	3

Clave de interpretación: *Dif. V o C*: Diferencia entre Cálculo de V. y T. de Control, *Dif. Estado o Cont*: Diferencia entre variable de estado y de Control, *Func*: Funcional, *Cond. 1er. Ord. V.*: Condiciones primer orden, Cálculo de Variaciones; *Cond. 1er. Ord. C.*: Condiciones primer orden, Teoría de Control; *Cond. Sufs.*: Condiciones suficientes; *Cond. Transv.* : Condiciones de Transversalidad, *Ge*: Geraldine, *Ya*: Yanai, *Er*: Erasmo, *Ed*: Edgar, *Jr*: José Raúl, *Ar*: Arlet, *Pe*: Pedro; *Al*: Alberto; *Mi*: Miguel; *Ma*: Magali; *Hu*: Humberto; *Na*: Nayely; *Fr*: Francisco.

Nuestra hipótesis, basada en los resultados de los alumnos en experiencias de enseñanza anteriores, en las que los alumnos mostraban una comprensión muy superficial de los conceptos en estudio, consistió en suponer que, en promedio, el tipo de concepción de los estudiantes estuviera entre acción y proceso (promedio de 1.5).

Considerando los tipos de concepción determinados por el último cuestionario sobre los conceptos de funcional, primera y segunda variaciones, condiciones suficientes y condiciones de transversalidad, los resultados encontrados fueron los siguientes:

i) Respecto al concepto de Funcional: Once de catorce estudiantes (78.5%) manifestaron al menos un tipo de concepción “acción”. Aproximadamente el 50% del total manifestaron un tipo de concepción “proceso” o superior. El promedio calculado de acuerdo a la escala considerada fue 1.28.

ii) En relación a las condiciones necesarias en Cálculo de Variaciones, trece de catorce estudiantes (93%) manifestaron por lo menos un tipo de concepción “acción”, doce de catorce manifestaron un tipo de concepción “proceso” o superior (86%) y el promedio del grupo fue de 1.79.

iii) Al considerar las condiciones necesarias en Teoría de Control se encontró que catorce de catorce estudiantes (100%) manifestaron por lo menos un tipo de concepción “acción”. Once de catorce estudiantes (78.5%) manifestaron un tipo de concepción “proceso” o superior y el promedio del grupo sobre su tipo de concepción fue de 1.79.

iv) en cuanto a las condiciones suficientes, trece de catorce estudiantes (93%) manifestaron por lo menos un tipo de concepción “acción”. Cuatro de catorce estudiantes (cerca del 30%) manifestaron un tipo de concepción “proceso” o superior y el promedio del grupo sobre su tipo de concepción fue de 1.36.

v) Respecto a las condiciones de transversalidad, todos los estudiantes manifestaron por lo menos un tipo de concepción “acción”. Seis de catorce estudiantes (casi el 50%) mostró un tipo de concepción “objeto.” El promedio del grupo fue de 1.85.

Estos resultados muestran en primer lugar que una gran mayoría de estudiantes ha construido los conceptos en estudio al menos con un tipo de concepción “acción”. Se observa también que la mitad o más de la mitad de los alumnos construyó una concepción “proceso” en relación con las condiciones necesarias y a las condiciones de transversalidad tanto en Cálculo de Variaciones como en Teoría de Control. Los estudiantes muestran mayor dificultad ante los conceptos de funcional y de condición suficiente tanto en Teoría de Control como en Cálculo de Variaciones.

Estos resultados condujeron a una revisión minuciosa de las respuestas de los alumnos al cuestionario para analizar el tipo de dificultades que los estudiantes mostraban. Se encontró que

en el caso de las condiciones de transversalidad la pregunta sobre su significado era escueta. En sus respuestas, casi la mitad de los estudiantes agregaron gráficas que mostraban las diferencias entre los casos posibles demostrando coordinación de los procesos necesarios para coordinar los registros gráfico y analítico, lo cual daba indicios de su encapsulación de los procesos involucrados en la definición de dichas condiciones.

Es importante observar que en cuanto a las Condiciones de Transversalidad, todos los estudiantes tienen al menos un tipo de concepción acción y casi el 50% de ellos tiene un tipo de concepción “objeto”. Este hecho nos llevó a una revisión más minuciosa de los resultados. Lo que ocurrió es que la pregunta en el tercer cuestionario sobre Condiciones de Transversalidad fue escueta, por lo que algunos estudiantes (casi el 50%) agregó en sus respuestas las gráficas de cada uno de los cuatro casos posibles, demostrando que podían coordinar los procesos geométrico y analítico involucrados en la definición de cada una de esas condiciones, por lo que supusimos que habían encapsulado dichos procesos en el objeto “condiciones de Transversalidad” en un objeto. El resto de los estudiantes, sin embargo, no agregó gráficas por lo que no es posible saber si construyeron los procesos y menos si los encapsularon.

Algo similar sucedió en el caso de la pregunta relacionada con las condiciones suficientes. En un cuestionario anterior hubo estudiantes que mencionaron dos tipos equivalentes de condiciones suficientes y en el tercer cuestionario únicamente mencionaron una. Es posible que nuevamente influyera la redacción de pregunta.

El concepto de funcional parece ser el más difícil para los estudiantes pues menos de la mitad de los estudiantes construyó una concepción proceso de este concepto.

Los resultados que se reportan en este trabajo constituyen, como se mencionó, lo encontrado en la primera parte del proyecto. Con la información encontrada con estos instrumentos parece haber evidencia de las distintas construcciones previstas en la descomposición genética en las respuestas de los alumnos, lo que indicaría, de verificarse con los resultados por analizar, que la descomposición genética diseñada *no requiere ser refinada*; podría ser necesario refinar la parte correspondiente al esquema, dado que las respuestas de los alumnos en este cuestionario parecen indicar que los estudiantes no han construido relaciones entre los conceptos en estudio más allá de saber que todos ellos tienen relación con la optimización dinámica, pero para hacerlo es necesario tomar en consideración el análisis de los datos obtenidos de otros instrumentos, en

particular, de las entrevistas a alumnos que siguieron el curso piloto y la comparación con aquellos que no lo siguieron. La decisión final se tomará una vez que se cuente con esos resultados.

Se puede añadir, a partir de lo que se reporta en este trabajo, que a partir de la descomposición genética es posible diseñar actividades didácticas, como las que se utilizaron en este estudio, para lograr que los alumnos construyan de manera más significativa los conceptos de la optimización dinámica.

Conclusiones

A pesar de lo limitado de los datos que se tienen en este momento, consideramos que se ha obtenido información positiva respecto a los beneficios del diseño de instrucción, en cuanto al aprendizaje de los alumnos. Si bien la hipótesis propuesta no se cumplió de igual manera en el caso de todas las construcciones estudiadas, se encontró evidencia de que los alumnos hacen las construcciones previstas en la descomposición genética.

Por otra parte, las actividades propuestas en el diseño de instrucción y los resultados obtenidos de los instrumentos analizados en este trabajo muestran una notoria mejoría en la comprensión de los conceptos cuando al comparar con grupos anteriores, según el criterio fijado en términos de la Teoría APOE.

Debido a que todas las construcciones que se desprenden del análisis de las respuestas de los estudiantes están incluidas en la descomposición genética original, podemos afirmar que la descomposición genética es un buen modelo de la forma en que los estudiantes construyen los conceptos involucrados en el tema bajo estudio y que no requiere de refinamiento. Esta decisión puede cambiar cuando se revisen los datos de otros instrumentos que muestren de manera más clara las relaciones entre los conceptos y, de ser así, lo que se refinaría sería únicamente la parte correspondiente al esquema, que es donde se incluyen justamente las relaciones entre conceptos y la forma en que estas relaciones evolucionan.

De los resultados obtenidos hasta el momento destaca la posibilidad de utilizar el diseño de instrucción utilizado en esta experiencia en la enseñanza de este tema de las matemáticas, dado que se ha encontrado que con las actividades diseñadas se logra una mejor comprensión de los

conceptos involucrado. Estas actividades requieren, sin embargo, complementarse con otras en las que se promueva la evolución del esquema de funcional de los alumnos.

Los resultados, obtenidos del análisis de los cuestionarios finales, dan cierta información sobre las concepciones de los alumnos. Para determinarlas con mayor precisión será necesario comparar las respuestas de cada uno de los estudiantes con las proporcionadas en otros cuestionarios, los exámenes y la entrevista, pero este trabajo está aún en proceso.

Referencias bibliográficas

Asiala, M., A. Brown, DeVries D., Dubinsky, E., Mathews D. y Thomas K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, Vol. II, número 3, pp. 1-32

Bellman, R. (1957). *Dynamic programming*. Princeton: Princeton University Press.

Cerdá, Emilio (2001). *Optimización Dinámica*. Madrid, España: Prentice Hall.

Chiang, A.C., (1992). *Elements of dynamic optimization*. Illinois: Waveland Press.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En Tall, D. (Ed), *Advanced mathematical Thinking* (pp. 95-123) Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Pontryagin, L., Boltyansky V., Gamkrelidze, R. y Mishenko, E. (1962). *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York: Wiley-Interscience.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Revista Educación Matemática* 17(1), 5-31.