

## OBJETOS VIRTUALES Y USO DEL CABRI: UNA EXPERIENCIA CON UN ESTUDIANTE DE PRIMARIA

Héctor Santiago Chávez Rivera, Ignacio Garnica Dovala, Ana María Ojeda Salazar

CINVESTAV-IPN

México

hchavez@cinvestav.mx, igdovala@hotmail.com, amojeda@cinvestav.mx

Campo de investigación: Pensamiento geométrico

Nivel: Básico

**Resumen.** *La operación del programa de cómputo resulta en la presentación de objetos visuales a la percepción del usuario. El objetivo del estudio fue el tránsito del objeto visual al inteligible para dar cuenta de la adquisición de la noción de bipartición de un segmento, por un alumno del tercer ciclo de educación primaria, mediante el uso del Cabri II. Los objetos primitivos Punto, Línea, Segmento, Circunferencia (Bellemain y Laborde, 1998), fueron considerados visuales; las nociones perpendicularidad, colinealidad y bipartición, como inteligibles. El método incorporó a la Clínica el medio operado por el sujeto, con objetos visuales aparentes durante la solución de la tarea y los inteligibles en el resultado de sus respuestas. Se reporta la identificación de los objetos visuales Punto y Recta, con evidencias de las nociones adquiridas de perpendicularidad y de colinealidad, pero no de la adquisición de bipartición de un segmento, por lo cual se dice que el objeto visual "círculo" fue débilmente identificado.*

**Palabras clave:** geometría dinámica, virtual, primaria

### Introducción

La incorporación de tecnologías de información a los procesos de adquisición de conocimiento matemático en aulas incide, de modo fundamental, en campos de percepción del alumno, en particular del *visual*, cuando la tecnología en cuestión está sustentada en un programa de cómputo como el *Cabri II*, diseñado para el estudio y la experimentación de contenidos de geometría euclidiana. Se puede decir que el resultado final del programa de cómputo, con la presentación a la percepción del usuario de *objetos visibles*, requiere que se identifiquen éstos como condición necesaria para la activación de *objetos inteligibles* que den cuenta de la adquisición de nociones y/o conceptos. El uso de la *regla y el compás* son subsumidos por la *imagen de síntesis* implícita en el programa que opera los *objetos visibles* bajo procedimiento digital, a la vez que oscurece la riqueza del sustento analógico correspondiente al uso de ellos. Esta dualidad de los medios, para efectos de enseñanza y de aprendizaje, se nos presenta como un objetivo de investigación para comprender los modos de uso de la tecnología en el aula. La primicia de la lectura visual de los objetos *digitalizados* impone la necesidad de una lógica que

transite del carácter *visible* del objeto, mediante un proceso complejo, a su consolidación *inteligible* [noción o concepto].

Es importante poner énfasis en la identificación de los objetos *visuales* por parte del usuario para la comprensión de las nociones y/o conceptos en el curso de la *solución* de un problema específico. Es el caso cuando se parte de los elementos primitivos del programa de cómputo: Punto, Recta, Segmento y Circunferencia, de naturaleza *visual*, que el usuario debe operar para *solucionar* el problema consistente en la *bipartición* de un *segmento* dado. La solución implica las nociones adquiridas o por adquirir: *perpendicularidad*; *colinealidad de puntos*; *comparación de segmentos* y la *relación de transitividad*.

### Elementos de la teoría crítica. Virtual – Actual; Posible –Real

El estudio sienta su base teórica en el pensamiento crítico de la filosofía, de la sociología y de la psicología, al tratar la comprensión de la relación entre el sujeto y el mundo, relación mediada por lo sensible y lo inteligible, a su vez mediada también por los sentidos y por la inteligencia cuando el sujeto se enfrenta al objeto *visible*. En el caso de la tecnología informatizada, la *imagen por visualizar*, presentada en pantalla, es fundamental para el análisis y la comprensión del proceso de la “*cognición visual*” del sujeto que realiza la experiencia de mirar la *imagen* como objeto visible. Consecuencia inmediata de la primacía de la imagen ante el texto escrito es el giro que el sujeto *experiencia* durante el acto de leer objetos *figurales* visibles, por ejemplo, como los que se presentan en la pantalla al operar el programa de cómputo *Cabri*. De la crítica filosófica se enfatiza al respecto:

“Las técnicas [la escritura, la digitalización, la comunicación] están inventándonos continuamente. No es que sean la prolongación de los sentidos humanos... dándonos la posibilidad de percibir más y mejor... se trata de visualizar la técnica como proceso que coadyuva en la emergencia y transformación de nuestros sistemas perceptivos y/o cognitivos. [Por] Lo que W. Benjamín llamó *nuevo sensorium* ... el sujeto de la escritura no es el mismo que el sujeto de la imagen. El sensorium –conformante de la sustancialidad lineal y erigido por el aparato colectivo de la subjetivación llamado escritura– está imposibilitado para la hiperimagen, un sensorium reticular o en bucle” (Marín, 2003, pág. 5).

El *medio digital*, por lo tanto, impone una forma de lectura y una forma de memoria coherentes con los principios y leyes que él mismo determina. Las imágenes que se le presentan al sujeto para su lectura e interpretación, *imágenes de síntesis*, son producto de modelos formales lógico-matemáticos a los que la Informática define como *síntesis de imagen*. Quéau se refiere a las imágenes de síntesis en los siguientes términos:

“Las imágenes de síntesis se generan por ordenador partiendo de modelos simbólicos o lógico-matemáticos, a su vez elaborados mediante lenguajes formales. Las imágenes de síntesis se representan materialmente con tablas de números (de ahí la expresión *imagen digital*), que se pueden visualizar a su vez bajo diferentes modalidades físicas (imágenes de video, de cine, sonoras, hologramas, e incluso esculturas controladas por ordenador) (Quéau, 1995, pág. 129).

*Virtual-Actual; Posible-Real*. Las cuatro causas derivadas del pensamiento de Aristóteles — material, formal, eficiente y final— son telón de fondo para la comprensión de los términos que se utilizan para hacer referencia al carácter virtual de la imagen de síntesis, cuando ésta es objeto de conocimiento. De la interacción *sujeto-objeto*, la cual es mediada por la operación, por parte del sujeto, de un programa de cómputo, y que hace del objeto visible el *inteligible* correspondiente a la noción perseguida, el pensamiento filosófico nos permite distinguir, en su sentido dialéctico, lo *virtual* del objeto (figural en nuestro caso) presentado a la percepción visual del sujeto como la consecuencia de la intervención de la inteligencia del sujeto mismo para dar cuenta de la adquisición de una noción (de la geometría en esta ocasión). Este movimiento parte de lo actual (objeto visible) y regresa a lo actual (noción adquirida). Por otra parte, en el mismo sentido, la relación entre lo posible y lo real podría ser interpretada como la *potencialidad* de la inteligencia (conocimiento adquirido) que posibilita la *realidad* del objeto (concepto matemático formal, por ejemplo). Quéau (1995) así lo expresa:

“Lo virtual nos propone otra experiencia de lo real. De repente, la noción comúnmente percibida como “realidad” se ve puesta en tela de juicio, al menos en apariencia. Las realidades virtuales no son irreales, poseen cierta realidad, aunque sólo sea por los fotones que golpean nuestra retina y las sacudidas que nos infligen los simuladores. *Las experiencias virtuales son a priori asimilables a las experiencias sensoriales “reales” que vamos acumulando “naturalmente”...*” (pág. 17).

“Por una parte, las imágenes empleadas son esencialmente digitales, ya que surgen de modelos lógico-matemáticos y, por otra parte, ya no se trata de *representaciones* propiamente dichas, sino más bien de *simulaciones*” (pág. 19).

Investigaciones en curso profundizan el estudio crítico del uso de la tecnología de la información para efectos de adquisición de conocimiento matemático.

### La experiencia

El contenido matemático de la experiencia se refirió al primer teorema del libro primero de los *Elementos* (Euclides; UNAM, 1944, pág. 13) para aplicarlo en la solución a la tarea de *Dividir en dos partes iguales la longitud de un segmento dado*. Para ello, fue condición fundamental la operación de los objetos visibles, arriba descritos, en las *experiencias interactivas* que resultaron de la *entrevista mediada*.

### Antecedentes

Los conocimientos de geometría elemental adquiridos por el estudiante se reducían al reconocimiento de formas y figuras en el plano y en el espacio, evidenciado por sus expresiones intuitivas respecto a relaciones entre las partes de una figura (radio-diámetro del círculo, por ejemplo). En cuanto al uso de la regla y del compás, su dominio era deficiente, no así respecto al uso del *Cabri II* del cual operaba los objetos visibles en foco, excepto los correspondientes a la herramienta Circunferencia. El diagnóstico fue resultado de sesiones de trabajo en el aula previas a la aplicación de la entrevista.

### Pregunta y objetivo

El estudio se orientó por la pregunta de investigación: ¿Qué efecto produce la operación del *objeto visible* a lo *inteligible* del usuario del *Cabri II* en un proceso de adquisición de nociones básicas de geometría?

El objetivo perseguido fue: Identificar la relación entre el objeto *visible* y el *inteligible* para dar cuenta del objeto *virtual*.

### Método

Se realizaron entrevistas a un estudiante de primaria (9-10 años), *mediadas* por el uso de *Cabri II* y registradas en cinta de video, bajo condiciones de: a) Identificación previa de nociones de geometría y operación elemental del programa; b) selección de un problema cuya solución requiera el uso de los objetos *visibles* en cuestión; c) *restricción* de disposición de herramientas del programa de cómputo (Chávez y Garnica, 2006) para el seguimiento de la operación de los objetos *visibles* en foco, en el curso de la adquisición de nociones básicas de geometría.

El problema consistió en dividir un segmento en dos partes iguales. Los objetos visibles requeridos fueron los relacionados con la activación y operación de las herramientas Punto, Punto sobre objeto, Recta, Segmento y Circunferencia. La solución esperada aplica el Teorema I.1 del libro primero de los *Elementos* (1944, UNAM, pág.13). La bipartición se obtiene al trazar la recta que une los puntos de intersección de dos círculos de igual radio cuyos centros son los extremos del segmento a dividir; la recta en cuestión interseca al segmento y el punto de intersección así definido es el punto medio requerido.

### Desarrollo de la experiencia: tres tiempos

En el curso de la solución del problema planteado se presentaron tres tiempos, determinados por las *nociones* en foco *asociadas* a los objetos visibles consecuentes del uso del programa de cómputo. Por su temporalidad, la realización de la experiencia interactiva mediada se nos presenta en tres episodios correspondientes al proceso de la solución: el primero, relacionado con las nociones de perpendicularidad y colinealidad y el uso de las herramientas Punto y Recta; el segundo, con la noción de partición y con el uso de las herramientas Segmento y Circunferencia; el tercero, con las nociones de relación de comparación y transitividad de segmentos y con el uso de la herramienta Segmento móvil.

### Episodio primero: construcción de rectas perpendiculares y de puntos colineales.

La experiencia consistió en construir rectas perpendiculares y puntos colineales, con el fin de hacerlos presentes a la percepción visual mediante la operación de los objetos “punto” y “recta” (Bellemain y Laborde, 1998) Para la realización de la primera construcción, el sujeto operó solamente la herramienta Recta, para la segunda las de Punto y Recta.

### Rectas perpendiculares

En el curso de la entrevista mediada, las experiencias interactivas quedaron determinadas como sigue: por la evidente organización de la percepción visual ante el objeto visible (véase Figura 1); por el reconocimiento, lectura y comprensión de *textos escritos* y de otros signos, presentados en pantalla, *asociados* a la intersección de las rectas; por el reconocimiento de la construcción ante la ausencia del *texto escrito* y del de la presencia/ausencia de los signos asociados a la intersección.

E: A ver, ¿Qué ves ahí?

I: una cruz

E: Son objetos que no has construido... ¿A qué se refiere?

I: Líneas...

E:... ¿Qué observas ahí?

I: ¡Hay un cuadrado!

E: ¿Qué me dice el cuadradito?

I: Que son perpendiculares.

E: Ahí podemos decir que las rectas son...

I: Perpendiculares...

Objeto: Recta; Noción: “Rectas perpendiculares”.

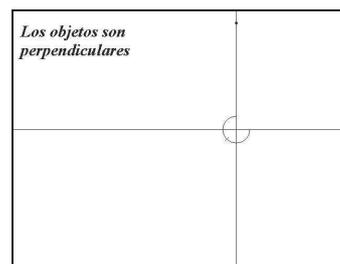


Figura 1. Texto escrito y signo giro.

### Puntos colineales

A lo planteado en el curso de la entrevista, el sujeto presentó a su percepción visual en el área de trabajo *tres puntos* no alineados. Luego de operar el objeto “recta” y ante la presencia del *texto escrito*, sus respuestas *manifiestas* en el área de trabajo (véase Figura 2) lo llevaron de la lectura

de los textos escritos a la revelación de sus *intuiciones* que derivaron en la noción de colinealidad de los tres puntos.

E: El letrero ¿Ya cambió)

I: Estos puntos no están alineados.

E: ... te voy a pedir que los lleves a la recta.

I: [Arrastra cada punto hacia la recta...] ¡Desapareció uno! ¡Los otros dos no se notan!

E: Sobre la línea, y qué dice el letrero.

I: Estos puntos están alineados.

E: ¿Y cuando no están alineados?

I: Salen chuecos, queda uno fuera y otro adentro.

Objeto: Punto; Noción: Colinealidad.

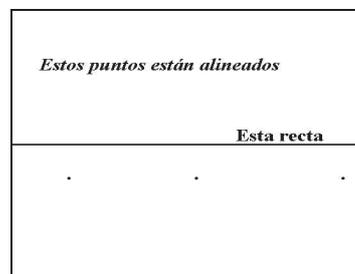


Figura 2. Recta y puntos.

### Episodio segundo: Bipartición de un segmento

Con el uso de los objetos “punto”, “recta”, “segmento” y “círculo” el sujeto construyó los objetos visuales respectivos orientados a dar cuenta de la noción de la *bipartición* de un segmento, primero por tanteo: con la herramienta “Punto sobre objeto” construyó el punto por él considerado como “punto medio” del segmento en cuestión; luego, con el trazo de las dos circunferencias a partir de cada uno de los extremos del segmento, tomados respectivamente como centros, encontró el punto de intersección de la recta con el segmento *punto medio* requerido. Por su recurrencia, este procedimiento centró el objetivo de la *entrevista* durante el proceso de las experiencias interactivas.

### Los segmentos son iguales

El procedimiento derivó de la aplicación del Teorema I.1 de los Elementos al trazo de la perpendicular y el encuentro de su intersección como “punto medio” del segmento dado (véase §2.3). La recurrencia al procedimiento por parte del sujeto no fue suficiente para dar sentido a las operaciones realizadas (véanse Figuras 3); por ejemplo, a la presencia a la percepción visual del

resultado de la construcción por tanteo ante la construida mediante el uso del procedimiento recurrente.

*E: Y después... A dónde los quieres poner;*

*I: [Lleva cada uno de los puntos a la intersección de los círculos]... [selecciona recta y une los puntos de intersección]*

*E: Y estos tres [señala los del segmento vertical que divide]*

*I: Están alineados.*

*E: Y cómo son estos segmentos [señala las dos partes del segmento inicial]*

*I: Iguales...*

*E: ¿Por qué?*

*I: Porque están alineados [señala varios casos de alineación]*

Objeto: Segmento; Noción: Bipartición.

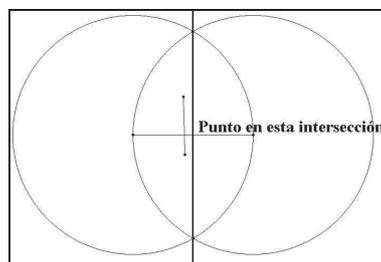


Figura 3. Bipartición del segmento.

### El “centro” y el “radio” del círculo

Para centrar la atención del sujeto a la noción de igualdad de los segmentos se usaron con recurrencia las definiciones de centro y radio del círculo (véanse Figuras 4), asociadas a las nociones “perpendicularidad” y “puntos colineales” adquiridas por él durante experiencias previas. La estrategia para el logro del objetivo consistió en “ocultar el objeto visible” de manera también recurrente.

*E: ¿Y eso indica que son iguales?*

*I: ¡Sí!*

*I: Porque son del mismo tamaño*

*G: ¿Cuál es el radio?*

*I: Este [lo señala correctamente]...*

*G: Ahí, ¿Y el otro?*

*I: Este de aquí hasta aquí [señala correctamente]*

*G: ¿Cómo le demuestras a Héctor que son iguales?;*

*I: Porque aquí dice “este punto como centro y este como radio”*

Uso del círculo en la bipartición del segmento.

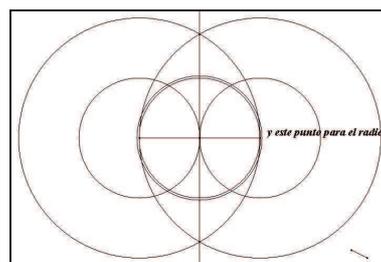


Figura 4. El Círculo.

### Episodio tercero. Nociones de relación: comparación de segmentos y transitividad

Ante las dificultades manifestadas por el sujeto para dar cuenta de la noción de *bipartición*, se hizo uso de la dinámica de objetos visibles, en particular de la del segmento que definía el radio, con la finalidad de comparar las partes y de esta manera concluir sobre la igualdad de los segmentos en cuestión. El sujeto no logró dar la respuesta esperada.

E: [Dinamiza el segmento y compara]. Es una manera de justificar que este segmento ya lo partí en dos

I: Ese quedó fijo en el centro!

I: [Repite el procedimiento por cuarta ocasión]

G: Ahora, compara los dos radios ¿Cómo le haces?

I: [Arrastra el punto para construir el radio,,,] Este segmento.

E: No se puede,...Último intento... ¿Qué queremos comparar?

I: este punto...

E: Tampoco se puede... Cuál otro...¿Qué queremos comparar?

I: Este... con este

E: Entonces, ¿qué hago? I: Moverlo! pero no se deja!...

¿Son iguales los segmentos?

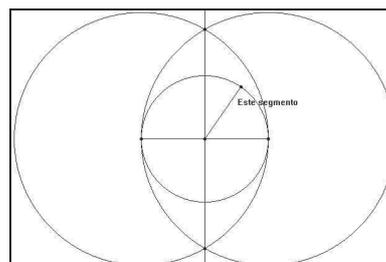


Figura 5. Comparación.

### Dinámica del objeto

Luego de identificar el *diámetro* (segmento del problema), el *centro* (punto medio del segmento) y el *radio* (una de las partes iguales del segmento) de la circunferencia trazada, se activó la herramienta Puntero para señalar el extremo del radio sobre la circunferencia y, manteniendo oprimido el botón izquierdo del ratón, se rotó el radio haciéndolo coincidir con el segmento (radio) en el origen de la circunferencia. Sin embargo, el sujeto no logró identificar de esa coincidencia la igualdad en longitud del radio rotatorio y del objeto en cuestión (véase Figura 5).

### Comparación de segmentos

Ante la ausencia de la identificación del objeto móvil (el radio rotando), el sujeto lo operó y, por la recurrencia de acciones, logró dinamizarlo sin advertir lo correspondiente a la consecuencia de la

comparación: las partes iguales del segmento dividido y la relación de transitividad asociada a las acciones (véase Figura 6).

E: ¿Cuántas partes tiene el segmento?

I: Una [señala el centro]...dos [señala la parte media del radio]

E: Fíjate si yo trazo un segmento ¿Qué apareció ahí?

I: Un punto...

E: Y después [el segmento al arrastrar el punto]

I: Una raya

E: Luego para fijarlo ¿Qué aparece?

I: Otro punto!

E: Entonces ¿Cuántos son? ... uno, dos, tres

Incomprensión de la noción de bipartición.

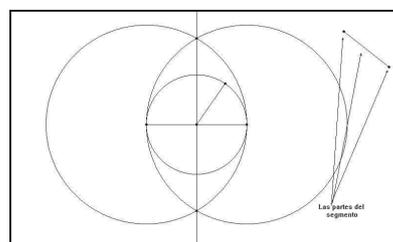


Figura 6. Partes del segmento.

## Resultados

El análisis de las experiencias interactivas en este estudio nos permite, *grosso modo*, señalar tres resultados asociados a su objetivo. El primero se relaciona con la operación de los *objetos visibles* —figuras, textos escritos, otros signos— por parte del sujeto: tiempo de organización de la percepción visual, reconocimiento del texto escrito, identificación de otros signos, centración visual al objeto e interpretación de los textos figurales y escritos. El segundo se refiere al sentido dotado al uso repetido de reglas de operación de los *objetos visuales*, reglas que dan cuenta del desarrollo de solución de la tarea de la bipartición del segmento. El tercer resultado es el de la adquisición de las *nociones* de rectas perpendiculares, puntos colineales y partes del círculo; pero también el de la incomprensión de las relaciones de comparación de la longitud de segmentos y de transitividad, consecuencia, tal vez, de la *dinámica* aparente del objeto.

## Observaciones

La continuidad de esta investigación se propone profundizar en torno a las relaciones entre los objetos *visuales* mediados por la *inteligencia* para aclarar la idea de lo *virtual* de los objetos,

relaciones consideradas en el contexto de procesos de adquisición de nociones y/o conceptos de matemáticas.

### Referencias bibliográficas

Bellemain, F.; Laborde, J. M. (1998). *Cabri-géomètre II*. Dallas: Texas Instruments.

Chávez, H.; Garnica, I. (2006). *Uso del programa de cómputo Cabri en la educación secundaria*. México: Cinvestav IPN, PNFAPM, Escuela Normal de Ecatepec, GEM.

Euclides (1944). *Elementos. Libro I*. México: UNAM.

Marín, L. F. (2003). Técnica y virtualidad. Pensar las nuevas tecnologías. Extraído desde <http://www.filosofia.net/materiales/num/num18/Tecnivir.htm>

Quéau, P. (1995). *Lo virtual. Virtudes y vértigos*. Buenos Aires: Paidós.