

UNA PRIMERA SECUENCIA DIDÁCTICA EXPLORATORIA: EL CAMBIO DE VARIABLE EN LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Ramón Flores Hernández

Instituto Tecnológico de Saltillo, Universidad Autónoma de Coahuila México

rnfloresh@hotmail.com

Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado Nivel: Superior

Resumen. *Este reporte de investigación presenta una primera secuencia didáctica exploratoria sobre el cambio de variable (cv) en la Transformada de Laplace y bajo el contexto de las Ecuaciones Diferenciales, conformada por tres actividades. La pregunta de investigación que motiva este trabajo es la siguiente: ¿Qué mecanismos de orden didáctico podemos obtener para la enseñanza del cálculo, al reconocer el cv como un objeto explícito? El marco teórico utilizado se sustenta en los aspectos epistemológico, cognitivo y didáctico del cambio variable. La metodología que utiliza esta investigación es la de la Ingeniería Didáctica, presentando ahora el inicio de la fase de “concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas” (Artigue, 1995).*

Palabras clave: cambio, variable, transformada, ecuación, proceso

Introducción

Esta investigación surge directamente de la práctica educativa en el Nivel Superior y bajo la problemática del manejo de variables en diferentes contextos, esto debido a la necesidad de solventar problemas y entender diversos temas de la matemática de la ingeniería que requieren del cv.

El problema de investigación consiste en hacer explícito el cv a través de generar un instrumento que permita indicar en qué medida se puede enseñar el cv; es decir, observar en que medida el cv al desempeñar el papel de herramienta implícita en la solución de un problema, deviene en objeto, de tal forma que pueda ser utilizado eficazmente en los temas de ingeniería (Douady, 1995).

Esta investigación está siendo guiada por las siguientes preguntas:

- 1) ¿Cómo vive actualmente el cv en la enseñanza?
- 2) ¿Qué significados posee el cv dentro del sistema didáctico?
- 3) ¿Qué papel juega el cv en la comprensión del cálculo?

- 4) ¿Qué mecanismos cognitivos subyacen al surgimiento de una variable adicional que permita minimizar la dificultad de un proceso?
- 5) ¿Qué es lo que posibilita la epistemología del cv?
- 6) ¿Qué obstáculos están asociados al cv?
- 7) ¿Qué elementos de orden didáctico podemos obtener para la enseñanza del cálculo al reconocer el cv como un proceso explícito?

Las primeras seis preguntas deberán permitir abordar la pregunta siete que será tomada como el objetivo general. Además, estas interrogantes permitieron estructurar el marco teórico, ya que sus dominios cubren los componentes del sistema didáctico: el profesor, el estudiante y el saber enseñado.

Así por ejemplo: las preguntas 1 y 2 caen en el ámbito de la transposición Didáctica, ya que se quiere observar en qué medida el cv a sufrido ajustes didácticos y cuáles son, y cuales actualmente encontramos en el “saber enseñado” (Chevallard, 1991). Las preguntas 3 y 4 se ubican dentro de la cognición y serán tratadas con base en la actividad cognitiva de conversión de las representaciones semióticas de un registro a otro bajo la noción de no-congruencia de las representaciones (Duval, 1995; 1998). Aunado a esto, el aspecto cognitivo se apoyará en la dialéctica herramienta-objeto, la cual permitirá validar si el cv evoluciona en objeto y así poder lograr su comunicación o mejor dicho su enseñanza de manera explícita (Douady, 1995).

Las preguntas 5 y 6 se ubican en la dimensión epistemológica, elemento primordial en las investigaciones en matemática educativa, ya que nos permite estudiar el conocimiento; de hecho, nuestro trabajo docente es indudablemente un problema epistemológico debido a que siempre tiene que ver con el conocimiento matemático. Así pues, la componente epistemológica nos permite conocer el origen y desarrollo del conocimiento del cv, así como su funcionamiento y sus diversas formulaciones (Cauchy, 1981; Collette, 1986; Edwards, 1979; Newton, 2001; Ríbnikov, 1987).

Respecto al aspecto metodológico, se utilizará la metodología de la Ingeniería Didáctica en la que se distinguen cuatro fases: Análisis Preliminar, Concepción y Análisis a Priori de las Situaciones Didácticas, la Experimentación y por ultimo, el Análisis a Posteriori y Evaluación (Artigue, 1995). En esta metodología resalta la Teoría de las Situaciones Didácticas, la que debe conducir a los

estudiantes a situaciones de acción, situaciones de formulación y a situaciones de validación. Mientras la actividad del profesor es primordial en la fase de institucionalización del nuevo saber adquirido (Brousseau, 1998).

Sobre el cambio de variable (cv)

Con base en la fase del Análisis Preliminar de la Ingeniería Didáctica, se rescata entre otras cosas, una premisa fundamental: el cv no es un proceso trivial, ya que se está trabajando con la conversión de registros de representación bajo el fenómeno de no-congruencia. A manera de ilustración:

Bajo el contexto de las ecuaciones diferenciales se tiene la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cos y + \operatorname{sen} 2y},$$

al resolverla se obtiene la expresión

$$x = e^{\operatorname{sen} y} [2 \int e^{-\operatorname{sen} y} \operatorname{sen} y \cos y \, dy + c]$$

La integral que se muestra se resuelve utilizando un cv, solo que no hay una regla o fórmula preestablecida que nos diga cómo cambiar la variable y . La estrategia que se aplica es la de inventar una relación funcional que permita dicho cambio, por ejemplo se puede utilizar la relación $z = \operatorname{sen} y$ y en consecuencia $dz = \cos y \, dy$, quedando la integral anterior como

$$x = e^{\operatorname{sen} y} [2 \int e^{-z} z \, dz + c],$$

la cual es fácil de integrar; es decir, se ha efectuado un cambio de registro, donde ahora se efectuarán tratamientos totalmente diferentes a los que se hubieran dado a la representación inicial. Esta integral es un nuevo registro donde no hay una correspondencia término a término entre las unidades significantes sobre todo en cuanto a sus significados. Así que estamos ante un caso de no-congruencia de las representaciones.

Este caso del cv de *tomar* el cambio más adecuado de la expresión dada, es una de las actividades más complicadas para el estudiante de ingeniería (Flores, 2007).

Otras formas del cv son las siguientes, según el Análisis Preliminar:

a) *Inventar* una fórmula que permita solventar el problema inicial de una manera fácil, por ejemplo; en el tema de las ecuaciones paramétricas caemos en este caso. Si escribimos la ecuación $y^3 = x^2$ en forma paramétrica, debemos introducir un parámetro de tal forma que la ecuación dada se pueda escribir en función de éste y de las variables dadas inicialmente; en otras palabras, debemos inventar dos relaciones funcionales, que para este caso pueden ser:

$$x = t^3 \quad y = t^2$$

b) Un *cambio verbal* de variable. Esto puede ocurrir en la etapa del “saber enseñado”, cuando el profesor explica, por ejemplo, el tema de la derivada del producto. El profesor habla en términos de las variables u y v que componen la fórmula del producto, y escribe sus valores o sus derivadas en términos de la variable x .

c) *Tomar una función dada como medio* para realizar el cv. Esto lo podemos ver en el caso siguiente:

Transformar $x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 4$ a coordenadas esféricas: Aquí el cv es dado por las fórmulas:

$$x = \rho \cos \theta \operatorname{sen} \phi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \quad z = \rho \cos \phi$$

d) Un cv en cuanto a su *significado*. Esto lo podemos ver en la transformada de Laplace, transformada de Fourier, derivadas parciales e integrales múltiples. Por ejemplo en la transformada de Laplace se cambia la variable t , tiempo, por la variable s , que representa la frecuencia compleja.

e) Un **cv yuxtalineal**. Este cambio significa que se hace el cambio de una variable por otra directamente, por ejemplo en las integrales definidas.

Vemos por todo lo anterior que el cv de la matemática de la Ingeniería no es llevar a cabo un reemplazo de una variable por números o funciones como lo ven (Morales & Díaz, 2007). En el cv hay otros aspectos cognitivos como los vistos anteriormente, de mayor orden que el de ejecutar un conjunto de reemplazo en una variable.

Por todo lo anterior, el cv lo miraremos en este trabajo como un proceso que manipula variables localizadas en funciones, utilizando álgebra y/o cálculo. O mejor dicho, es un proceso que permite

cambiar funciones y sus variables al interactuar con ellas a través del álgebra y/o cálculo, y puede ser un proceso estable o inestable. Es estable cuando genera fórmulas que funcionan para todos los casos que contienen una estructura matemática bien definida. Y es un proceso inestable, cuando la expresión candidata a ser cambiada, contiene una estructura matemática fuera de los estándares comunes para su transformación.

El cv es estable en los siguientes casos: al hacer un cambio verbal de variable, al tomar una función dada como medio para hacer un cv, al hacer un cv en cuanto a su significado y al hacer un cv yuxtalineal.

El cv es un proceso inestable cuando: se inventa la relación funcional y al tomar el cv de la expresión dada.

Otro aspecto que es importante tomar en cuenta acerca del cv es el tocante a su uso. Así pues, en cuanto al uso que se le da al cv, puede tomar la siguiente clasificación:

a) Una herramienta indispensable para llevar a cabo un proceso

Por ejemplo en las ecuaciones diferenciales homogéneas, donde el cv es primordial.

b) Una herramienta intrínseca a un proceso

Por ejemplo en la ecuación diferencial de Bernoulli, o en algunas demostraciones, como en el caso del Segundo Teorema de Traslación de la Transformada de Laplace. En estos casos el cv conforma una pequeña parte de un proceso global, sin embargo asume un papel indispensable y por lo tanto importante.

c) Una herramienta para economizar el tratamiento

Bajo este aspecto el cv no es indispensable, solo es opcional. Por ejemplo, esto ocurre en algunas ecuaciones diferenciales, en algunas integrales y en algunas derivadas.

Acerca de la concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas

Del Análisis Preliminar se pudo observar que el cv es una herramienta que es utilizada en los libros y por lo tanto por los profesores de manera implícita en la mayoría de los casos donde se presenta. Así mismo, el cv es un tema que está fuera de los programas de estudio y por lo tanto de

su enseñanza explícita, solo se maneja cuando surge con claridad en los temas de la ingeniería, y cuando no sucede esto, se manipula pero no se le identifica como un cv.

Su importancia radica en que permite aplicar métodos, hacer demostraciones y resolver problemas. Esta es su epistemología de origen. Pero por otro lado, para el estudiante es un tema difícil, que no le toma mucha importancia, aspecto heredado por el profesor. Cuando lo utiliza no lo ve como un cv; es decir, cuando aplica esta herramienta no es conciente de esta actividad matemática. Y la dificultad se agudiza cuando se trata de inventar una función que relacione la variable original con la variable nueva y que permita una transformación de registros.

Este hecho permite identificar un obstáculo, localizado en la relación funcional entre variables; más específicamente: la relación entre la variable dada y la nueva variable, es una función, pero este hecho de ser una función, donde hay una variable independiente y una variable dependiente, fijas, por la propia naturaleza del concepto de función, evita que en la concepción de función que se usa en el cv, se intercambien los papeles de las variables, por la concepción operacional que ya han interiorizado de una función. También influye en un grado menor que se use la variable x ó y con la nueva variable. Por lo que un obstáculo localizado es el aspecto operacional de una función.

También se observa que no se ha dado una transposición didáctica, específicamente para el cv.

Todos los aspectos anteriores son restricciones localizadas para el cv y que permitirán diseñar situaciones didácticas.

Otro aspecto importante en esta fase de la investigación “concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas”, es el concerniente a las variables didácticas: las variables didácticas son variables de control ligadas a toda situación de enseñanza, ya que estas condicionan y organizan los aprendizajes de los estudiantes o lo que se quiera indagar de ellos. Una característica de las variables didácticas es que pueden ser modificadas por el profesor, conllevando a la afectación de la jerarquía de las estrategias de solución que pone en funcionamiento el estudiante al aceptar la devolución de la situación (Brousseau, 1998). En cuanto a este trabajo, las variables didácticas que se tomarán bajo esta primera mirada a la fase de investigación que nos ocupa, tomaremos como variables didácticas las siguientes: el tema matemático y los casos de presentación del cv (inventar el cv, tomar el cv de la expresión dada, etc.).

La secuencia didáctica

Se diseñó una primera secuencia didáctica exploratoria, compuesta por tres actividades utilizando el tema de la Transformada de Laplace bajo el contexto de las Ecuaciones Diferenciales. Donde la Actividad 1 contiene aspectos iniciales sobre las ecuaciones diferenciales y el cv. La Actividad 2 contiene la Transformada de Laplace en las Ecuaciones Diferenciales y el cv. La Actividad 3 contiene la Transformada Inversa de Laplace en las Ecuaciones Diferenciales y el cv.

Se pretende los siguientes objetivos:

- a) Observar el comportamiento del estudiante ante el proceso del cv
- b) Indagar si es capaz de localizar el cv en las diferentes actividades.
- c) Mostrar la importancia del cv en la resolución de las actividades planteadas.

Estos objetivos se presentan de forma intrínseca al objetivo general de las tres actividades, que es el de enseñarle al estudiante la resolución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes a través de la Transformada de Laplace.

También, esta primera aplicación de la secuencia didáctica permitirá enriquecerla según lo que se observe en la fase de Experimentación.

Actividad 1

La ecuación diferencial $y'' + 4y' + 4y = t^2 e^{-2t}$, sujeta a las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, puede ser resuelta por los métodos de “coeficientes indeterminados” ó “variación de parámetros”

- a) ¿Puedes identificar en el método de “coeficientes indeterminados” en qué parte se introduce un cambio de variable? Si es necesario resuelve la ecuación por este método.
- b) Al aplicar el método de “Variación de parámetros”, indica en qué parte se presenta un cambio de variable. Si no lo identificas, resuelve la ecuación por este método.

Actividad 2

Cuando se tiene una ecuación diferencial donde las variables han sido separadas, por ejemplo $(3x^2 + x)dx = e^y dy$, el siguiente paso es aplicar la integral en ambos miembros de la igualdad, quedando $\int (3x^2 + x)dx = \int e^y dy$.

a) Si nos ubicamos en la ecuación diferencial $y'' + 4y' + 4y = t^2 e^{-2t}$ sujeta a

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad \text{y le aplicamos en ambos miembros de la ecuación la}$$

Transformada de Laplace, ¿cómo quedaría?

b) La Propiedad de Linealidad para la Transformada de Laplace indica que:

Si la Transformada de Laplace de $f(t)$ y $g(t)$ existe; y a, b son constantes, entonces $L\{af(t) + bg(t)\} = aL\{f(t)\} + bL\{g(t)\}$.

Aplica la Propiedad de Linealidad en $L\{2y'' - 3y'\}$.

c) Encuentra las dos Transformadas de Laplace que surgen en el inciso b, aplicando la transformada de la derivada y simplificando totalmente el resultado, sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, de tal manera que solo se tenga un solo término que contenga la Transformada de Laplace. Recuerda que $L\{y'(t)\} = sL\{y(t)\} - y(0)$ y $L\{y''(t)\} = L\{y''\} = s^2 L\{y(t)\} - sy(0) - y'(0)$.

d) Si $L\{2y' - 1\} = s$; basándote en los incisos b y c encuentra el valor de $L\{y\}$, sabiendo que $y(0) = 0$.

e) Aplica los procesos realizados en los incisos b y c a la ecuación diferencial planteada en el inciso a. Además, encuentra el valor de $L\{y\}$ tal como ocurrió en el inciso d.

f) ¿En que parte del inciso e detectas que hay un cambio de variable?

g) ¿En que medida influye el cambio de variable para encontrar $L\{y\}$? ¡Discútelos con tus compañeros de equipo!

Actividad 3

Consideremos ahora la pregunta: Dada $F(s)$ ¿qué función $f(t)$ hace que $L\{f(t)\} = F(s)$? Por ejemplo, si $L\{y(t)\} = \frac{1}{s^2}$ ¿Cuál es el valor de $y(t)$? En el lenguaje matemático esto cae en la categoría de un inverso, donde se dice que $y(t)$ es la Transformada Inversa de Laplace de $\frac{1}{s^2}$ y se escribe $y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}$, por lo que el valor de la función buscada $y(t)$ es: $y(t) = t$, donde se tiene de nuevo la variable original t .

a) Bajo esta idea, encuentra la Transformada Inversa de Laplace de la Actividad 2, inciso e; es decir, encuentra el valor de $y(t)$.

b) Con referencia al inciso a, ¿qué puedes decir acerca del comportamiento de las variables involucradas? ¡descríbelo!

c) Sea la ecuación diferencial lineal no homogénea de orden 2 $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$ y condiciones iniciales $y(0) = m$, $y'(0) = n$. Resuelve esta ecuación siguiendo los procesos de la Actividad 2, incisos a y e; y de esta Actividad 3, inciso a.

d) Indica en qué partes de la resolución de la ecuación del inciso c se está haciendo un cambio de variable.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En Gómez, P. (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. (pp. 33-59). Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1979-1990*. Grenoble: La Pensée Sauvage, Éditions.

Cauchy, A.L. (1981). *Équations Différentielles Ordinaries*. Paris: Éditions Études Vivantes.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editor SA.

Collette, J-P. (1986). *Historia de las matemáticas. Vol. 11*. México: Siglo Veintiuno Editores.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En P. Gómez (Ed), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Paris: Peter Lang S.A. Editions Scientifiques Européennes.

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Edwards, C.H. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. USA: Springer-Verlag.

Flores, R. (2007). El cambio de variable: ¿un proceso matemático o un artificio de la matemática? En C.R. Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20* (pp. 145-150). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Morales, L y Díaz, J.L. (2007). Un estudio del concepto de variable en los libros de texto. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21* (pp. 201-211). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Newton, I. (2000). *Tratado de Métodos de Series y Fluxiones*. México: UNAM.

Ríbnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas*. URSS: Ed. Mir Moscú.