

USO DE LAS GRÁFICAS EN UNA SITUACIÓN DE MODELACIÓN DE MOVIMIENTO. VARIACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO ÓRDENES

Claudia Flores Estrada, Liliana Suárez Téllez
CECyT 5-IPN,
CB07 Iztapalapa
CFIE del Instituto Politécnico Nacional
claudia.mo@gmail.com, lsuarez@ipn.mx
Campo de investigación: Modelación matemática

México

Nivel: Medio

Resumen. *Este trabajo reporta los resultados de una investigación que tiene como propósito analizar la construcción de ideas en el conocimiento matemático que logran algunos estudiantes de bachillerato del Instituto Politécnico Nacional al realizar la graficación de una situación real de movimiento. El marco teórico es la socioepistemología. En particular, se retoma la hipótesis de que la noción de derivada no puede construirse sino después de haberse construido la idea de derivada sucesiva. Se muestran algunas evidencias del manejo simultáneo de dos órdenes de variación al trabajar con actividades de aprendizaje diseñadas a partir de la categoría de modelación-graficación.*

Palabras clave: modelación, simulación, graficación, variación y tecnología

Introducción

En el ámbito escolar se fomenta el trabajo autónomo y colaborativo como promotor de aprendizaje para interactuar con el conocimiento matemático mediado por el uso de tecnologías. La incorporación de la tecnología ha propiciado modificaciones de forma paulatina en las aulas. El uso de los objetos para el aprendizaje abre la posibilidad de que tanto estudiantes como profesores adapten los recursos didácticos de acuerdo a sus propias necesidades, inquietudes, estilos de aprendizaje y enseñanza.

Se han reportado en diversas investigaciones (Leinhardt, et al, 1990 y Torres, 2004) las dificultades que tienen los estudiantes en la construcción e interpretación de gráficas, sin embargo, los significados, procedimientos y argumentos que propician en los estudiantes estas actividades de construcción e interpretación de gráficas no sólo contribuyen a la comprensión del concepto de función sino que constituye una vía de construcción de ideas de variación.

De esta manera, la graficación se ha revelado en las investigaciones (véase una revisión amplia en Leinhardt et al 1990) como una de las estrategias más fecundas para el análisis de las funciones en contextos matemáticos y extramatemáticos. La gráfica permite ver las características globales y

locales de la función como son: las variaciones, el crecimiento, la continuidad, la concavidad y los máximos y los mínimos.

Pero también, tomando a la graficación como una vía de construcción se pueden identificar distintos usos de las gráficas. En este sentido Torres (2004) propone, a partir de una revisión de libros de texto y de literatura en Matemática Educativa tres usos de las gráficas:

a) La construcción de gráficas utilizando la relación de correspondencia entre dos variables (localizar parejas de puntos ordenados a partir de la relación algebraica).

b) La construcción de gráficas por prototipos, en una parábola, por ejemplo, se estudian las transformaciones gráficas cuando se le suma una constante, o una recta que pase por el origen con pendiente positiva o negativa, o una recta que no pase por el origen con pendiente positiva o negativa o cuando el coeficiente del término cuadrático toma un valor mayor o menor a la unidad.

c) La representación gráfica por medio de la simulación de un fenómeno físico. Los dispositivos transductores registran los datos y las calculadoras con poder de graficación los convierten en tablas y gráficas. Los alumnos realizan un movimiento, obtienen un registro gráfico de tal manera que al cambiar las características de su movimiento pueden identificar los cambios que se producen en la gráfica. De esta forma se analiza un fenómeno y al mismo tiempo su representación. Existen gráficas que utilizan un cuadrante, dos cuadrantes, tres cuadrantes y cuatro cuadrantes, gráficas que representan una función analítica o una situación real.

El presente trabajo considera este último uso de las gráficas para la construcción de ideas en el conocimiento matemático de la modelación-graficación.

Planteamiento del problema

Hemos escogido situaciones de aprendizaje que tengan que ver con la modelación gráfica del movimiento tal y como es trabajada en Torres (2004). Describimos este tipo de actividades a través del cuadro siguiente.

Descripción de las actividades de graficación – modelación en el análisis de una situación de movimiento:

- *Proponer un modelo gráfico:* se pide diseñar una gráfica que describa los cambios de posición de un una persona que realiza el movimiento descrito. En el momento de realizar esta tarea se toman decisiones: las variables que intervienen, la escala de la gráfica, las distancias recorridas en distintos instantes.
- *Realizar una simulación:* se pide simular el movimiento frente al sensor para obtener la gráfica estipulada. El movimiento se adapta al alcance del sensor. A partir de múltiples realizaciones se establecen relaciones entre las características del movimiento y los diversos comportamientos gráficos obtenidos en la calculadora.
- *Efectuar un contraste entre el modelo gráfico y la situación:* se pide ajustar el modelo gráfico original dando cuenta de la situación planteada.

Se esperan de los estudiantes múltiples realizaciones en la simulación del movimiento en las que tomen decisiones sobre las características que se varían en la situación para la obtención de distintas gráficas.

Cuadro 1. Descripción de las actividades de graficación- modelación tomado de Suárez et al (2005).

Un ejemplo de estas actividades, en cuyo diseño la modelación usa la graficación, es el problema de movimiento comentado en el Libro del Profesor de Geometría Analítica (IPN, 2006, pp 109-119).

La modelación es una construcción de conocimiento matemático que se realiza en un ambiente social. Arrieta (2003) la define como un proceso de matemátización en el aula como actividades que desarrollan interactivamente docentes y estudiantes en el salón de clases, utilizando las matemáticas para interpretar y transformar un fenómeno de la naturaleza.



Figura 1. Red de actividades de graficación- modelación

La presente investigación se enfoca en la interpretación de las formas básicas de graficación en la que los estudiantes logran una visión cualitativa de un cierto fenómeno de movimiento describiendo las variaciones de primer y segundo órdenes de la situación de movimiento.

La red de actividades de la Figura 1 está constituida por cuatro Actividades de Aprendizaje que permiten un mejor entendimiento en el estudiante de quinto semestre del Nivel Medio Superior. Esta red de actividades se vincula desde perspectivas diferentes y se articulan de varias maneras para cumplir diversos objetivos didácticos.

Marco teórico

Los programas vigentes de matemáticas en el Nivel Medio Superior del IPN (IPN, 1994-1996) establecen la modelación como una línea de desarrollo del currículo a través de varios cursos. En la instrumentación didáctica y en la lista de contenidos de los programas de Álgebra, Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral y Probabilidad y Estadística se observa como una constante la graficación de funciones, ecuaciones y conjuntos de datos (Cen, 2006). En los paquetes didácticos publicados por el Instituto Politécnico Nacional se han incluido una gran variedad de situaciones de aprendizaje con el uso de gráficas en ambientes tecnológicamente enriquecidos.

El marco de referencia para la presente investigación es la socioepistemología. En particular, se retoma la hipótesis, planteada dentro la didáctica del Cálculo, que dice que “la noción de derivada no puede construirse sino hasta después de haberse construido la idea de derivada sucesiva” (Castañeda, 2004, p. 26).

En la formulación de esta hipótesis intervienen cinco elementos: Relativo a la multiplicidad de representaciones; Relativo al tratamiento simultáneo de las variaciones; relativo a su regularidades; Relativo al problema de la dimensionalidad y Relativo a la aceptación de la metafísica diferencial, pero, en este trabajo hay un énfasis en el “tratamiento simultáneo de las variaciones de una función”, en términos de una situación de movimiento, y las variaciones en la posición y la velocidad.

La hipótesis de esta investigación es que, en una situación de modelación del movimiento (véase la caracterización realizada por Suárez, 2008), el tratamiento gráfico simultáneo de las variaciones de una función corresponde a la relación que guardan la función $f(x)$ y sus derivadas sucesivas $f'(x)$ y $f''(x)$ en una situación real de movimiento. El análisis considera las formas básicas de graficación y los significados que le asignan algunos estudiantes a las variaciones de primer y segundo órdenes.

Los estudiantes analizan la gráfica y obtienen la función para realizar las gráficas a lápiz y papel y con uso de la tecnología. Se reportan las evidencias de las exploraciones realizadas por los estudiantes para dar cuenta de la naturaleza de los conocimientos que ponen en juego cuando se enfrentan a este tipo de actividades.

Actividades de Aprendizaje que exigen coordinar habilidades en el manejo de las gráficas para la construcción de modelos con las variaciones de la posición y la velocidad en una situación real de movimiento.

Las exploraciones realizadas con estudiantes de bachillerato forman parte de esta investigación que quiere dar cuenta de la naturaleza de los conocimientos que los alumnos ponen en juego cuando se enfrentan a este tipo de actividades que exigen coordinar habilidades en el manejo de las gráficas para la construcción de modelos que les permitan describir la variación de la posición y la velocidad en una situación de movimiento.

Metodología

Se realiza una red de cuatro actividades de graficación – modelación. Cada actividad tiene una finalidad en la que se permite al discente no sólo trabajar de forma colaborativa sino conocer y aplicar estrategias para su aprendizaje.

Cada Actividad de Aprendizaje que conforma la red de AA de graficación-modelación se realiza en dos Modalidades: Modalidad I sin uso de tecnología, realizan la Actividad de Aprendizaje a lápiz y papel. Y Modalidad II con uso de la tecnología, se utiliza la calculadora con poder de graficación y el sensor de movimiento. El estudiante analiza lo realizado a lápiz y papel al contrastarlo con uso de tecnología.

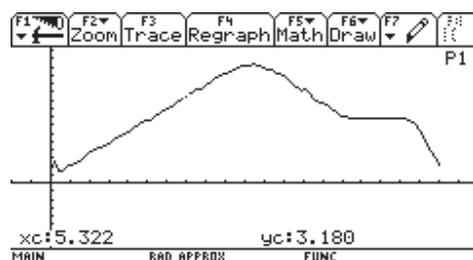
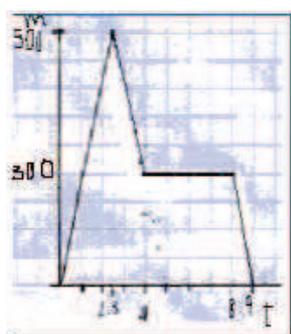
Para obtener evidencias que contribuyan al fortalecimiento de las hipótesis se explora el desempeño de los estudiantes de bachillerato en la resolución de dos las actividades de aprendizaje propuestas.

Resultados

En este apartado mostramos el análisis de dos de las actividades donde el trabajo de los estudiantes avanza de la modalidad de diseño de las gráficas con lápiz y papel a la modalidad de diseño de gráficas con uso de la tecnología.

1) De la situación de movimiento a la gráfica

La actividad de aprendizaje (AA) “Epifanía” parte del enunciado de una situación de movimiento y una serie de preguntas sobre la velocidad y la aceleración. En términos de nuestra hipótesis nos interesa problematizar el uso de las gráficas del primer y el segundo órdenes de variación de la posición. Se describe con palabras una situación de movimiento en la que una persona se aleja 500 metros de un lugar de origen, regresa y en el trayecto se detiene cuatro minutos. En la primera modalidad predomina una tendencia a graficar con trazos rectos, véase Figura 2.a, los estudiantes identifican la velocidad constante correspondiente a los trazos rectos, incluso pueden calcularla para los diferentes intervalos y, de esta manera, hacer comparaciones de intervalos donde lleva mayor velocidad con respecto a otro.

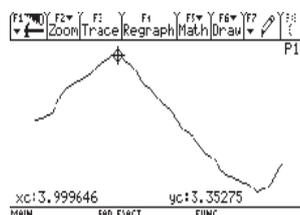
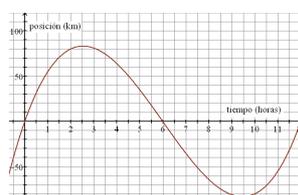


Figuras 2.a y 2.b. Gráficas de los estudiantes a lápiz y papel y con uso de tecnología

El diseño de gráficas a partir de movimiento frente a un sensor, en la segunda modalidad de trabajo, véase figura 2.b, propicia que los estudiantes realicen un análisis más fino de los cambios de velocidad y vinculan aspectos gráficos como los puntos máximos o puntos de inflexión con momentos del movimiento como el instante del regreso o cuando la velocidad deja de disminuir o aumentar, respectivamente.

2) De la gráfica de posición a la situación

La actividad de aprendizaje “Acércate más” parte de la gráfica de la posición para preguntar por la velocidad.



Figuras 3.a y 3.b. Gráficas de la posición, la proporcionada por la actividad y la obtenida por los estudiantes.

A diferencia de la AA descrita en el apartado anterior, en esta actividad se trata de que los estudiantes reproduzcan una gráfica específica para pasar después su análisis, por medios tecnológicos que permitan responder las preguntas sobre la velocidad. Como se observa en la Figura 3.b los estudiantes obtienen gráficas que conservan las características globales de la gráfica

de partida. Y con esta representación gráfica en la calculadora pueden contestar las preguntas de posición y velocidad planteadas en la AA.

Conclusiones

Esta exploración es coherente con la hipótesis de diseño de las actividades de aprendizaje que se refiere a que estas actividades de aprendizaje propician el manejo simultáneo de dos órdenes de variación de la posición: la velocidad y la aceleración, transitando, en el primer caso, de una situación de movimiento, formulada verbalmente, a su análisis gráfico y, en el segundo caso, de una situación de movimiento presentada en forma gráfica a su interpretación en términos de la situación.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *La modelación de fenómenos como procesos de matematización en el aula*. Tesis de Doctorado no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.

Cen, C. (2006). *Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato*. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Flores, C. (2005). *Características de las gráficas y su relación con la modelación de situaciones de movimiento*. En G. Bermúdez, M. Olave, C. Ochoviet, Y. Testa y A. Martínez. *Resúmenes de la Decimonovena Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Montevideo, Uruguay: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

IPN (1994-1996). *Planes y programas de estudios de Matemáticas I, II, III, IV, V y VI. Documentos internos de trabajo*. México, D.F.: Dirección de Educación Media Superior IPN.

IPN (2006). *Geometría Analítica*. México, D.F.: IPN.

Leinhardt, G.; Stein, M.; Zaslavsky, O. (1990). *Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching*. *Review of Educational Research* 60(1), 1-64.

Suárez, L., Flores, C., Gómez, A., Licona, R. (2005). *Uso de las gráficas a través de actividades de modelación matemática con calculadoras y dispositivos transductores*. Extraído el 16 de agosto de 2006 desde http://www.te.ipn.mx/quintoencuentro/registro/taller_opc_ins.asp

Suárez, L. (2008). *Modelación – Graficación, Una Categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un Estudio Socioepistemológico*. Tesis de Doctorado no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Torres, A. (2004). *La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.