¿FUNCIÓN DERIVADA O FUNCIÓN PENDIENTE DE UNA CURVA?

Alejandro Lois, Liliana Milevicich, Laura Gelsi, Ana González
Facultad Regional General Pacheco, Universidad Tecnológica Nacional Argentina
alelois@ciudad.com.ar, lmilevicich@ciudad.com.ar
Campo de investigación: Tecnología avanzada. Pensamiento Matemático avanzado
Nivel: Superior

Resumen. *La enseñanza de la derivada está habitualmente vinculada a un tratamiento algebraico y teórico. Se inicia asociando la tangente al resultado de un proceso al límite de una familia de rectas secantes, para luego continuar con la enseñanza de la derivada de distintas funciones y la demostración de algunos teoremas, con lo cual se pierde el nexo con el entorno geométrico y, con ello, la posibilidad de visualizar la construcción de la derivada punto a punto, concebida como una nueva función. Atendiendo a esta problemática, elaboramos una propuesta didáctica con el propósito de "construir" la función derivada de modo geométrico, en un entorno informático adecuado, mediante la utilización de un software prediseñado.*
Palabras clave: visualización, entorno informático, algoritmación, función derivada

Introducción

El desarrollo de habilidades y destrezas en los alumnos requiere de tiempos prolongados para lograr el dominio de la matemática básica y de los procesos de pensamiento asociados, pero exige, al mismo tiempo, rupturas con el pensamiento algebraico. En general, los tiempos didácticos necesarios para el logro de las habilidades y destrezas, no se corresponden con los tiempos académicos. Los investigadores Campistrous y Rizo (1992) y Hernández, Delgado y Fernández (1998) han reflexionado sobre el hecho de que las herramientas actuales de cálculo convierten rápidamente en obsoletas gran parte de las destrezas de cálculo a las que se dedica considerable tiempo en los cursos tradicionales. Creemos que sería valioso reducir la enseñanza de estas destrezas y algoritmos, a la comprensión de las ideas básicas y a la realización de ejemplos simples, liberando un tiempo considerable para la profundización de otros aspectos tales como, la comprensión de los conceptos y su aplicación a la resolución de problemas.

Es ampliamente aceptado el hecho de que en el contexto de la enseñanza tradicional, los conocimientos que se pretenden impartir no resultan suficientes para desarrollar las competencias esperadas en un curso de Análisis Matemático (AM) para estudiantes de Ingeniería, tales como el logro, por parte de los mismos, de un aprendizaje significativo de los conceptos del cálculo diferencial e integral y su aplicación a la resolución de situaciones problemáticas vinculadas con los problemas propios de su carrera.

Para acceder al estilo de pensamiento que se precisa en el AM, se requiere, entre otras cosas, del manejo de un entorno gráfico amplio por parte del que aprende.

Los procedimientos matemáticos, denominados procedimientos generales en el sentido en que los define Hernández (et. al, 1998), son aplicables al AM en su totalidad y, en particular, al estudio del Cálculo. En ese sentido, el alumno debe aprender a:

- *Interpretar,* de modo que pueda utilizar correctamente una graficadora o programa computacional para resolver problemas de cálculo,
- *identificar* definiciones y teoremas y los elementos constitutivos en cada caso,
- *recodificar,* de modo que pueda encarar la resolución de un problema dado desde otra perspectiva,
- *calcular* de forma manual, mental, mediante el uso de tablas, calculadoras u ordenadores,
- *algoritmizar,* dado que la sucesión de operaciones planteadas en el algoritmo puede servir como base de orientación para la tarea o problema que exige el modelo para su resolución,
- *definir,* de modo que desarrolle en el alumno un pensamiento reflexivo, riguroso y crítico,
- *demostrar,* de tal manera que pueda esgrimir argumentos sólidos que confirmen la veracidad de una proposición,
- *modelar*, procedimiento de fundamental importancia a la hora de simular el comportamiento y características de los fenómenos,
- *comparar,* para que pueda relacionar dos elementos asociándolos según determinadas características comunes a ambos,
- *graficar*, de modo que pueda establecer relaciones entre objetos matemáticos a través de su representación gráfica. Este procedimiento permite al alumno comunicar información de manera visual, lo cual es muy importante en las primeras etapas del proceso de asimilación de un concepto. La imagen geométrica funciona en muchas ocasiones como el umbral para que el alumno acceda al concepto.

La enseñanza tradicional tiende a sobrevalorar los procedimientos analíticos y algebraicos, dejando de lado las otras habilidades y, por supuesto, los argumentos geométricos, por no considerarlos formales, entre otras causas.

El problema

El concepto de función es bastante complejo para los alumnos. Si bien la mayoría de los recién iniciados en un curso de AM de primer año, no tienen dificultades en esbozar la definición de función, dominio, contradominio; los obstáculos aparecen al momento de modelar y luego graficar, con el propósito de integrar los dominios algebraico y geométrico. Coincidimos con Fernández, Gil, Carrascosa, Cachapuz, y Praia (2002) cuando sostienen que las mayores dificultades cognitivas aparecen en el contexto geométrico, razón por la cual, en la enseñanza se acude a los algoritmos, más fáciles de gestionar. Uno de los propósitos centrales, entonces, es poder establecer un isomorfismo entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico (Cantoral, 2000).

En ese sentido, observamos que los alumnos son capaces de derivar una función, aplicando las reglas de cálculo aprendidas, sin asumir que los resultados obtenidos forman parte de la imagen de una nueva función susceptible de ser derivada. También les resulta difícil, reconocer, en un problema referido a razones de cambio, la necesidad de un proceso de derivación. En este tipo de problemas, los alumnos tienen dificultades, no sólo en relacionar ambas magnitudes, sino también en darle sentido a la razones de cambio que intervienen en la ecuación. En general, de modo tradicional, se presenta el concepto de derivada como la pendiente de la recta tangente, lo cual presupone que la noción de pendiente ya es conocida por los alumnos, pero luego se pasa al tratamiento algebraico y teórico, donde se asocia la tangente al resultado de un proceso al límite de una familia de rectas secantes. Paso seguido, se inicia una secuencia que consiste en enseñar a derivar diversas funciones y a demostrar algunos teoremas. Es ahí dónde se pierde el nexo con el entorno geométrico y, con ello, la posibilidad de visualizar la construcción de la derivada punto a punto, concebida ésta como una nueva función. Algunos autores (Orton, 1980; Tall, 1986; Tall, 1994; Dolores, 1999) sostienen que los alumnos exhiben dificultades en utilizar apropiadamente las representaciones gráficas: si bien son capaces de calcular correctamente la función derivada de una función polinomio, de manera algebraica, y hallar la pendiente de la tangente en un punto dado de la misma, son incapaces de construir la función derivada y deducir sus propiedades.

Propuesta

A partir de los conceptos previos sobre funciones y sus distintas formas de representación, y el concepto de pendiente de una recta; elaboramos una propuesta didáctica con el propósito de construir la función derivada, utilizando los recursos geométricos en un entorno informático adecuado (incorporando la utilización de un software prediseñado), y evitando que el desarrollo de cálculos algebraicos, propios del proceso de obtención de la función derivada por métodos analíticos, constituya un obstáculo para el aprendizaje.

En ese sentido, proponemos:

a) obtener geométricamente las sucesivas pendientes de la curva en estudio, mediante la utilización de un software didáctico, de tal modo, que en el intervalo solicitado, se grafique, para un conjunto de puntos sucesivos muy próximos, la terna compuesta por el valor de la función, la recta tangente en el punto y el valor de la pendiente representado por la imagen de la función derivada (ver Figura 1),

b) calcular y representar manualmente la función derivada a partir del gráfico de la función primitiva, calculando la pendiente de la curva en varios puntos del intervalo considerado, utilizando un "triángulo indicador" de la pendiente de la recta tangente a partir de la abscisa y la ordenada respectiva,

a) comparar los gráficos de la función derivada obtenida manualmente y el gráfico de las sucesivas pendientes producido por el software,

b) visualizar mediante el software la construcción de la función derivada de las funciones: constante, lineal, cuadrática de un solo término, seno, coseno y exponencial.

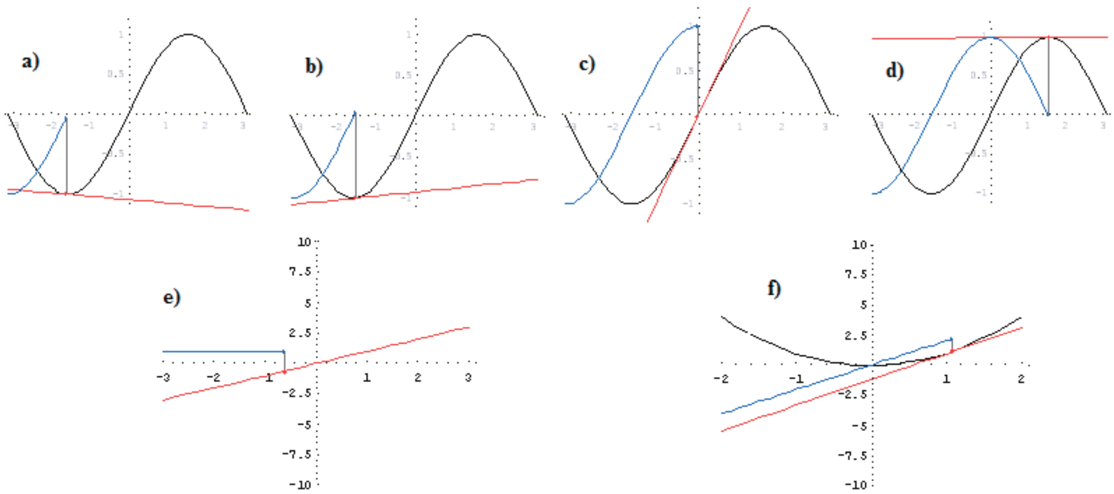


Figura 1. Gráfico de las funciones (a, b, c y d) $f(x) = sen(x)$, (e) $g(x) = x$ y (f) $h(x) = x^2$

Las funciones originales se grafican en color negro, la recta tangente en diferentes puntos del intervalo a estudiar, en color rojo, y la función “pendientes de la recta tangente” en color azul.

A partir de realizar estas actividades se pretende que los alumnos:

- adquieran habilidad en la lectura visual directa de las características más notables de la pendiente de una curva: la variación del signo, los puntos de pendiente nula, los puntos dónde no es posible determinar la pendiente, relacionándolo con el comportamiento de la función: crecimiento, decrecimiento y localización de extremos,
- adviertan que un punto donde se anula la derivada, no es una condición suficiente para que la función tenga un extremo relativo,
- obtengan conclusiones sobre la derivada de las funciones constante, lineal, cuadrática del tipo ax^2, seno, coseno y exponencial. En el caso de la función exponencial, es útil investigar para que valor de la base la gráfica tiene una pendiente igual al valor de la ordenada en el punto con lo cual la función derivada coincide con la función dada; y obtener de ese modo una buena aproximación al número e obtengan conclusiones sobre las funciones discontinuas en un punto, (ver Figura 2) a partir del análisis visual del comportamiento de la recta tangente en las proximidades del punto de discontinuidad y su relación con la pendiente.

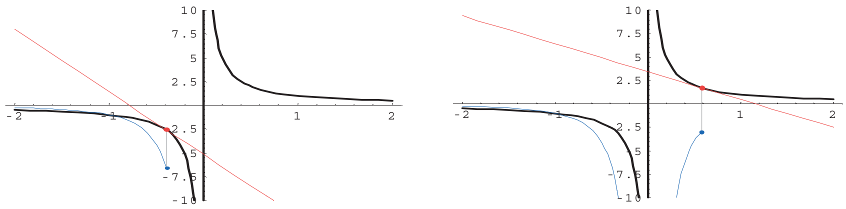


Figura 2. Gráfico de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en dos aproximaciones distintas.

Creemos que la expresión “función derivada” surge por una abreviatura del lenguaje, en realidad correspondería decir “función pendiente de la curva” si se la concibe y construye como tal.

Metodología

En el año 2007, diseñamos e implementamos una experiencia de tipo cuasi experimental con dos grupos de primer año de la carrera de Ingeniería Mecánica. Las comisiones que formaron parte de la experiencia estaban formadas, en su mayoría, por alumnos que cursaban AM por primera vez, sólo unos pocos alumnos cursaban en 2º o 3º instancia; es por ello que ambos grupos realizaron un pretest, con el propósito de explorar los conceptos previos que tenían sobre las características de la derivada de una función, y la determinación de máximos y mínimos locales en relación con ella. Los resultados de esta evaluación no reportaron que ellos tuvieran conocimientos significativos que pudieran, a nuestro juicio, incidir en los resultados de la experiencia.

El grupo A, trabajó sobre un conjunto de actividades en el laboratorio de informática, alternando con clases en el aula, mientras que con el grupo B se trabajó de modo tradicional.

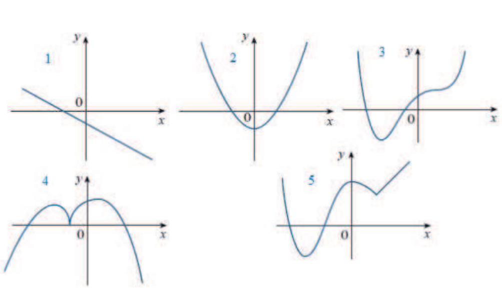
La tercera semana, ambos grupos resolvieron la siguiente prueba postest:

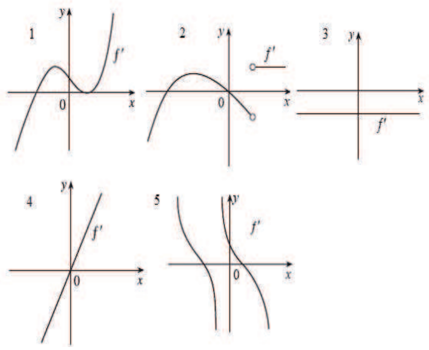
Actividad 1: *Algunas de las funciones, cuyos gráficos están numerados entre 1 y 5 en la primera secuencia, están asociadas al gráfico de su función derivada, que se muestran en la segunda secuencia.*

a) *Establezca, cuando sea posible, tales asociaciones entre la primera secuencia de gráficos y la segunda.*

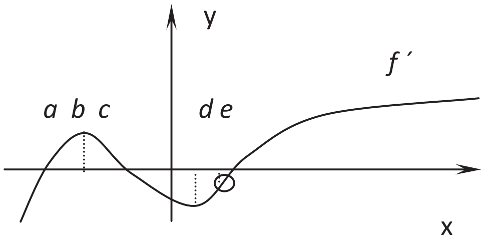
b) *Para aquellas funciones, dónde no sea posible establecer la asociación, dibuje de modo aproximado la gráfica de la función derivada.*

Observación: En todos los casos, ambos ejes están dibujados a la misma escala.





Actividad 2: f' *representa la función derivada de una función* f *.*



a) *Hacer un grafico aproximado de la función* f *.*

b) *Indica posibles dominios para* f *y* f'*.*

c) *Realizar un grafico aproximado de la segunda derivada* f''*.*

d) *¿Es la función* f *que encontraste la única que cumple con las condiciones dadas por el problema? Justifica tu respuesta*

e) *¿Cuáles valores del dominio de la función* f *son puntos críticos?*

Análisis de la experiencia y resultados

Nuestro propósito fue realizar un análisis que fuera más allá de las respuestas correctas o incorrectas a cada uno de los ítems. En ese sentido, luego de identificar los errores en cada evaluación, los asociamos a las dificultades que dieron origen a tales manifestaciones. La Tabla 1 recoge las dificultades más frecuentes y los porcentajes de aparición en cada curso.

Dificultades más frecuentes	Curso A	Curso B
No asocia el crecimiento/decrecimiento de la función con el signo de la derivada	25.6 %	38.7 %
No reconoce las propiedades de la tangente vertical	14 %	51.6 %
No asocia el concepto pendiente de la función en un punto con la derivada	25 %	32.2 %
No asocia las condiciones de derivabilidad y continuidad	2.3 %	3.2 %
No asocia los conceptos de derivada y antiderivada	84 %	67.7 %

Tabla 1. Resultados de la evaluación Postest

Cabe observar que la actividad 1 requiere un análisis directo: función-función derivada, en cambio la actividad 2 requiere del camino inverso.

Respecto de la actividad 2, ítem d, esta fue contestada correctamente por algunos alumnos en ambos cursos. La respuesta está asociada al concepto de antiderivada, que si bien no se ha desarrollado formalmente, les fue posible realizar el camino inverso a partir de derivar una familia del tipo $f(x)+c$. Sin embargo, la mayoría de los alumnos del curso A logró armar de manera satisfactoria la pareja 2-4 en la actividad 1. Es importante notar que trataba de un problema de la misma naturaleza pero asociado a una función particular del tipo x^2-c y su derivada $2x$, y además planteado en sentido directo.

También cabe observar las diferencias entre los cursos A y B en cuanto al reconocimiento sobre la existencia de la derivada en un punto.

Conclusiones

- A partir de los resultados obtenidos, consideramos que las actividades desarrolladas por el grupo A contribuyeron a un mejor aprendizaje del concepto. En particular, cabe notar la asociación que estos alumnos lograron establecer entre la existencia de pendiente y la tangente vertical de la curva. Creemos que las actividades de visualización sobre el comportamiento de la recta tangente en los puntos de discontinuidad fueron decisivas.

- Considerando futuras réplicas de la presente experiencia, cabe destacar la necesidad de un proceso de adaptación a las nuevas herramientas que habitualmente denominamos “amigarse con el software", de lo contrario su utilización se convierte en un obstáculo en el proceso de aprendizaje. Consideramos que un período más prolongado de uso del software podría influir en el desarrollo de las actividades y en la efectividad de las producciones de los alumnos.

- La experiencia (educativa que ahora reportamos, nos permite sostener una posición respecto del papel que la tecnología juega en las realizaciones didácticas, la cual consiste en asumir que, efectivamente, es posible afectar la naturaleza del aprendizaje de los conceptos matemáticos, en la medida que los medios didácticos sean entendidos como verdaderos dispositivos didácticos bajo el control del diseño de las actividades. La visualización de los conceptos y de los procesos matemáticos no es una consecuencia de la incorporación de recursos tecnológicos, sino que, por el contrario, obedece a la articulación entre un diseño teórico ya elaborado y la situación didáctica que incorpora un software educativo como herramienta.

Referencias bibliográficas

Azcárate C y Bosch D (1996). *Cálculo diferencial e integral.* España: Síntesis

Campistrous, L. y Rizo, C. (1992). *Enseñanza de la Matemática: reflexiones polémicas*. La Habana, Cuba: Instituto Central de Ciencias Pedagógicas

Cantoral R, Mirón H (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3(3)*, 265-292.

Dolores, C (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Fernández, I, Gil, D, Carrascosa, J, Cachapuz, A y Praia, J (2002). Visiones deformadas de la ciencia transmitidas por la enseñanza. E*nseñanza de las Ciencias 20(3)*, 477-488.

Hernández, H., Delgado, R., y Fernández, B. (1998). *Cuestiones de didáctica de la Matemática. Conceptos y Procedimiento en la Educación Polimodal y Superior.* Argentina: Homo Sapiens Ediciones.

Orton, A. (1980). *A cross-selecional study of the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults*. Tesis de Doctorado no publicada, University of Leeds.

Stewart, J. (1999). *Cálculo. Conceptos y contextos*. México: International Thomson.

Tall, D. (1986). *Building and testing a cognitive approach to the calculus using interactive computer graghic*. Tesis de Doctorado no publicada, University of Warwick.

Tall, D. (1994). Calculus and Analysis. In T. Husen & T. N. Postlethwaite, (Eds.) *The International Encyclopedia of Education, Second Edition*. (pp. 3680-3681, 3686). Pergamon Press.