SITUACIONES EMERGENTES EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

Mercedes Anido, Patricia Có, Mónica del Sastre, Martha Guzmán, Raúl Katz, Erica Panella
Universidad Nacional de Rosario Argentina
co@fceia.unr.edu.ar, rdkatz@fceia.unr.edu.ar
Campo de investigación: Resolución de problemas Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo se relatan distintas situaciones emergentes de una actividad disparadora, que evoluciona y se modifica en la fase interactiva del trabajo de aula y concluye con la institucionalización de nuevos conocimientos (Brousseau, 1986). Se busca además, indagar en forma comprensiva y sistemática las concepciones y dificultades de los alumnos al resolver un problema que requiere ubicación espacial para activar y utilizar de modo estratégico conocimientos ya adquiridos. En el marco de una investigación cualitativa se refieren dificultades relacionadas con la ubicación espacial tridimensional, en algunos casos generados desde lo didáctico, como asimismo dificultades para traducir al lenguaje algebraico expresiones verbales de un bien logrado razonamiento geométrico.*
Palabras clave: ubicación espacial, pensamiento visual, situaciones emergentes

Introducción

Se les plantea a los alumnos, como clave para generar los conocimientos matemáticos pretendidos, el problema de encontrar las coordenadas de los puntos de dos rectas alabeadas que realizan la mínima distancia. El problema se constituye en el medio didáctico a fin de lograr que un grupo de estudiantes que cursan el primer año de las carreras de ingeniería, en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario construyan un conocimiento de la Geometría Analítica.

Se busca a través del mismo estimular el pensamiento visual en tres dimensiones como asimismo indagar en forma comprensiva y sistemática las concepciones y dificultades de los alumnos al resolver un problema que requiere ubicación espacial para activar y utilizar de modo estratégico conocimientos ya adquiridos.

En este trabajo y en el marco de una investigación cualitativa se describen distintas situaciones emergentes de una actividad disparadora, que evoluciona y se modifica en la fase interactiva del trabajo de aula y concluye con la institucionalización de nuevos conocimientos.

El problema abordado

Sean las rectas r_1 y r_2 dadas por sus ecuaciones paramétricas:

$$r_1 \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathrm{R} \qquad\qquad r_2 \begin{cases} x = s \\ y = 2s \\ z = 2s \end{cases} \quad s \in \mathrm{R}$$

¿Las rectas, son alabeadas? ¿Cuál es la distancia mínima entre ambas? ¿Cuáles son los puntos que realizan la mínima distancia?.

Objetivos de la actividad

- estimular el pensamiento visual en tres dimensiones,
- indagar en forma comprensiva y sistemática las concepciones y dificultades de los alumnos al resolver un problema que requiere ubicación espacial.

Nuestra concepción didáctica

La enseñanza que propugnamos se orienta a la organización de actividades donde el sujeto central de la teoría educativa es el alumno y sus posibilidades cognitivas. Desde esta perspectiva, el alumno es el protagonista en el proceso de construcción del conocimiento, y el docente la persona que le facilita el acceso al aprendizaje, estimulándolo en sus intervenciones, guía sin apresuramientos, actúa como un "moderador". No está para dar soluciones, sino para ayudar al alumno a utilizar de manera óptima los recursos de que dispone (Schoenfeld, 1985). De este modo el alumno va modificando sus decisiones en función de las retroacciones del medio.

Pero no basta con que resuelva el problema, debe además utilizar un lenguaje, formular su propio pensamiento de manera de hacerlo accesible a los demás y dar prueba de sus conclusiones.

Emergentes de la resolución del problema

El problema que se plantea fue el medio elegido para la apropiación de un conocimiento, en una tarea de resolución no rutinaria. El mismo se cierra momentáneamente, pero puede abordarse desde otra perspectiva y con nuevos requerimientos.

Las dos primeras preguntas tienen una rápida respuesta. Sin dificultad, la mayoría de los alumnos aplican, sobre un caso particular, resultados ya conocidos: condición de coplanaridad entre dos rectas en el espacio y cálculo de la distancia entre rectas alabeadas.

En la tercera cuestión, se encuentran con condiciones prácticas nuevas. Es allí donde deben apropiarse de las consignas de una situación.

En lo que sigue se muestran: distintas propuestas de resolución (enumerados por casos), errores que emergieron y nuevas situaciones problemáticas que se plantearon.

Cabe señalar que la situación de aula provocó la espontánea agrupación de los alumnos.

Caso 1

Un grupo de alumnos, más cercanos al razonamiento geométrico, emprenden el problema a partir de una situación particular: consideran r_1 y r_2 *ortogonales.* Toman r_1 como una arista del piso del salón de clase y r_2 como una arista del techo, ortogonal con r_1 (gráfico 1). Proponen cortar el plano π_1 de la pared, que contiene a r_1 y es perpendicular a r_2, para obtener un punto B y repetir el procedimiento, intersecando r_1 con el plano π_2 de la pared, que contiene a r_2 y es perpendicular a r_1, para obtener otro punto A. Sostienen que esos puntos A y B son los que realizan la mínima distancia.

Proceden analíticamente, sobre los datos del problema, sin observar que las rectas dadas no son ortogonales. No encuentran los planos π_1 y π_2 y, en consecuencia, no pueden determinar las coordenadas de A y B.

Desconcierto por parte del grupo. -¡No es posible! ¿Dónde está el error? ¿Están mal los cálculos?

No advierten que es la particularidad de su razonamiento la causa del error. No logran la "visualización", pensada como el proceso que les permitiría elegir, dentro de un complejo de relaciones, de manera natural y sin esfuerzo, los modos de ataque más eficaces para resolver el problema con que se enfrentan (Guzmán 1996).

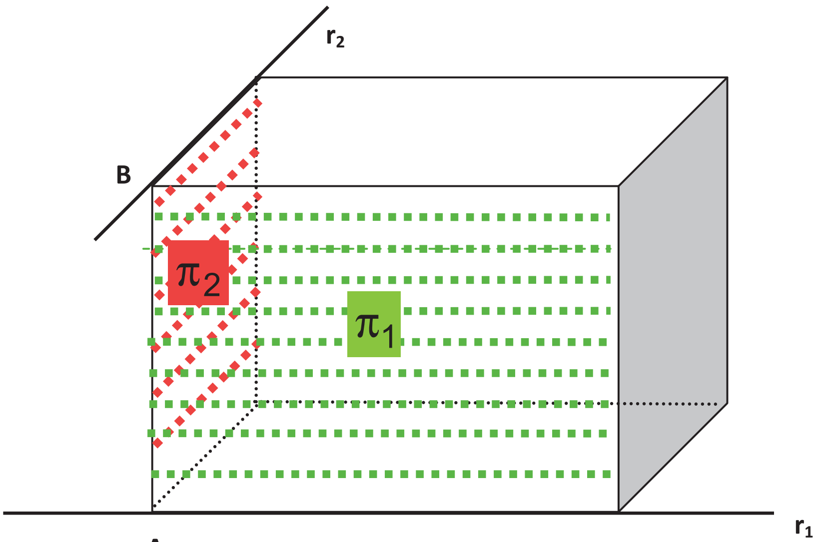

Gráfico 1

En lo que sigue se reproduce la interacción docente –alumnos.

Docente: Los cálculos son correctos, el error no está allí. Revisen su propuesta ¿cómo consideraron a r_1 y r_2? ¿Las rectas del enunciado están en las mismas condiciones?

Alumno: Las rectas dadas no son ortogonales, ¿entonces está mal lo que hacemos?

Docente: "Vean" una recta **L** en el techo del salón, alabeada con r_1, y que no sea perpendicular a r_1. ¿Cómo son los planos perpendiculares a dicha recta?, ¿alguno de dichos planos contiene a r_1?

Alumno: No, parece que no.

Alumno: ¿y si buscamos un plano perpendicular al plano del piso que contiene a **L** y lo cortamos con r_1?

Docente: ¿Cualquier par de rectas alabeadas está contenido en planos paralelos?

El problema inicial derivó en un nuevo problema.

En el grupo hubo "diferentes visiones", pero finalmente un alumno apelando a la noción de haz de planos por una recta, y acomodando sus manos para representar un par de planos paralelos, logró la adhesión por la afirmativa, de los restantes miembros del grupo.

A partir de estas reflexiones el docente aprueba avanzar en esa línea: encontrar las ecuaciones de los planos paralelos que contienen a r_1 y r_2 respectivamente, para proseguir con la propuesta anterior de encontrar un plano que contiene a una de las rectas, por ejemplo r_2, y es perpendicular al plano que contiene a la recta r_1, para luego realizar la intersección con r_1 y obtener uno de los puntos buscados.

Los alumnos proceden de esta manera y obtienen un par de puntos cuyas coordenadas verifican la mínima distancia.

Caso 2

Otro grupo de alumnos eligió un camino diferente.

Su solución: los puntos A, B que buscamos determinan una recta cuya dirección es perpendicular a las direcciones de r_1 y r_2, entonces $\overline{AB}$ es perpendicular al vector $\bar{u}$,dirección de r_1, y también es perpendicular al vector $\bar{v}$, dirección de r_2.

Siendo: $\overline{AB}$ = (s − t − 1, 2s − t − 1, 2s − 3t − 1), $\bar{u}$ = (1, 1, 3); y $\bar{v}$ = (1, 2, 2), debe ser

$$\begin{cases} \overline{AB}\,.\,\bar{u} = 0 \\ \overline{\mathrm{AB}}\,.\,\bar{\mathrm{v}} = 0 \end{cases}$$

Resuelven el sistema $\begin{cases} 9s - 11t - 5 = 0 \\ 9s - 9t - 5 = 0 \end{cases}$ y obtienen la solución $s = \frac{5}{9}$, $\mathrm{t} = 0$ valores de los parámetros que dan para r_1 el punto A = (1,1,1) y para r_2 el punto $B = (\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, \frac{10}{9})$.

Verifican, para asegurar su resultado, que $\left|\overline{AB}\right| = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Caso 3

Otro grupo de alumnos lo razona de la siguiente manera:

Los puntos A y B que se buscan son tales que $\left|\overline{AB}\right|$ debe ser igual a $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Siendo A = (1 + t, 1+ t, 1 + 3t) y B = (s, 2s, 2s) resulta entonces que

$$\sqrt{(s-t-1)^2+(2s-t-1)^2+(2s-3t-1)^2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

o de manera equivalente

$$9s^2+11t^2-18st-10s+10t+3=\frac{2}{9}$$

Llegado a este punto los alumnos se enfrentan con una ecuación de segundo grado en dos variables y el problema original deriva en un nuevo problema: encontrar los puntos del plano que satisfacen esa ecuación, cuestión momentáneamente desconocida.

La ecuación de segundo grado en dos variables es objeto de estudio en una unidad posterior, lo que motivó reconsiderar este enfoque en esa instancia, incorporando nuevos elementos al problema: encontrar todos los puntos de las rectas r_1 y r_2 que se encuentran a una distancia, tanto menor como mayor a $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Caso 4

Proponen $A(x_1,y_1,z_1)$ y $B(x_2,y_2,z_2)$, expresan $\left|\overline{AB}\right|$ en función de las coordenadas de A y B e igualan dicho módulo a $\frac{\sqrt{2}}{3}$. Por otra parte consideran $\overline{AB}$ paralelo con $\bar{u}\wedge\bar{v}$.

Cuando traducen dichas condiciones al lenguaje algebraico escriben ecuaciones aisladas sin agruparlas en un sistema y no logran avanzar. Sólo dicen: hay muchas incógnitas. En su planteo no tienen en cuenta que las coordenadas de A y B deben satisfacer las ecuaciones de r_1 y r_2 respectivamente, hecho que es señalado por el docente.

Caso 5

Esta solución corresponde a un único alumno quien toma la información contenida en las ecuaciones paramétricas de la recta r_1 para escribir una supuesta ecuación cartesiana de la recta en el espacio. Sin advertirlo, obtiene la ecuación de un plano ortogonal a la recta dada, que contiene al punto dado en las ecuaciones paramétricas. Luego multiplica dicha ecuación por $\frac{\sqrt{2}}{3}$ valor de la mínima distancia, creyendo que de esa manera obtiene una recta r_3 paralela a r_1 y a una distancia de $\frac{\sqrt{2}}{3}$ de la misma. Esta recta la quiere interceptar con r_2 para encontrar a uno de los puntos (gráfico 2). Del mismo modo obtendría el otro punto.

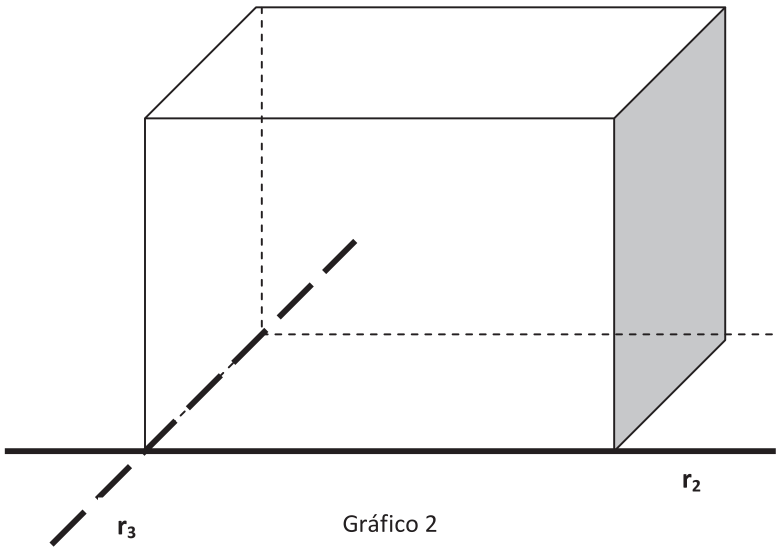

Gráfico 2

Cuando el alumno es interrogado sobre la forma general de la ecuación de un plano responde correctamente, pero no advierte su error de hacerle corresponder a una recta en el espacio una ecuación del plano. La reflexión sobre las diferentes formas de la ecuación de una recta en el espacio lo lleva a reconocer su error.

Cuando se le pregunta qué obtiene cuando se multiplica miembro a miembro una ecuación por un escalar diferente de cero, logra la respuesta correcta recién cuando la misma es referida a una ecuación simple con una incógnita.

Asimismo fundamenta su propuesta a través de una asociación con la operación de producto de un vector por un número, diciendo: si a un vector lo multiplico por dos obtengo el doble. Ante la intervención del docente se rectifica y hace referencia al módulo.

Se considera que en este caso el error no es el efecto de la ignorancia, o del azar, sino la consecuencia de un conocimiento no apropiado a una nueva situación.

En cada caso se discutieron las estrategias empleadas, interrogando a los estudiantes sobre los procesos de solución presentados por ellos, instándolos a comunicar sus experiencias. Se procuró transmitirles la idea de que hacer matemática significa preguntarse y preguntarse hasta que las cosas tengan sentido. Que una vez encontrado éste, habrá que plantearse el esquema de solución y elegir las herramientas matemáticas más útiles y aplicarlas y finalmente reflexionar sobre la solución, es el “mirar atrás” de (Polya 1998).

Se impulsó a los distintos grupos a que comunicaran y defendieran sus soluciones, lo que les permitió apreciar no sólo la riqueza y diversidad de procedimientos empleados, sino también cómo en un mismo problema se pueden considerar diferentes alternativas, según el tipo de conocimiento que entra en juego con él. Se propició de este modo un espacio en el cual se dio la discusión entre los estudiantes, quienes a través de sus interacciones contribuyeron hacia un aprendizaje personal y grupal más efectivo. En este contexto el rol del docente fue ayudar a los alumnos a poner en evidencia las relaciones que existen entre los diferentes procedimientos usados y construir una suerte de jerarquía de los mismos.

Algunas observaciones y reflexiones

Al concluir la experiencia, se pudo constatar que todos los alumnos entraron en interacción directa con el problema, pudiéndose registrar errores y valorar aciertos. En cualquier caso la reflexión provocada sobre esos errores y/o aciertos se transformaron en un aprendizaje.

La esencia de la metodología de trabajo radicó en la discusión que se generó a partir del planteo de un problema. En diferentes instancias se guió a los alumnos a través de una serie de preguntas, cada una de las cuales significó no sólo la reproducción de un conocimiento, sino la búsqueda de una respuesta a la pregunta formulada.

La realización de la actividad favoreció el seguimiento del trabajo de los alumnos, reveló sus dificultades, y permitió valorar los progresos alcanzados; constituyéndose de este modo en una forma de evaluar el proceso de enseñanza-aprendizaje, que se produce en un contexto de trabajo colectivo.

Desde lo didáctico la metodología empleada resultó particularmente útil por cuanto comprometió a los alumnos a explicitar sus concepciones. En esta instancia emergieron dificultades relacionadas con la visualización (Guzmán, 1996) y ubicación espacial tridimensional, como asimismo dificultades para traducir al lenguaje algebraico expresiones verbales de un bien logrado razonamiento geométrico.

Se apeló permanentemente al uso de elementos arquitectónicos y mobiliarios del aula hasta lograr un camino que permitiera alcanzar el significado geométrico y algebraico pretendido.

Si bien es cierto que este recurso es útil para alcanzar una primera aproximación en la comprensión y visualización de propiedades espaciales, también es cierto que puede constituirse en un obstáculo cuando no es objeto de una generalización en el momento en que se institucionaliza el conocimiento pretendido.

El problema abordado permitió integrar el procesamiento de la información visual con procedimientos analíticos. Los alumnos lograron valorar la importancia de los elementos algebraicos para traducir hechos geométricos en expresiones analíticas y entender de este modo que el álgebra y la geometría son lenguajes alternativos para expresar una misma idea matemática.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1988). Los diferentes roles del maestro. En Parra, C y Saiz, I. (Eds.). *Didáctica de la Matemática. Aportes y Reflexiones*. Buenos Aires: Paidos Educador.

Guzmán de, M. (1996). *El rincón de la pizarra*. Madrid: Pirámide.

Polya, G. (1998). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Schoenfeld, A. (1985). Ideas y tendencias en la resolución de problemas. Separata. *La enseñanza de la Matemática a debate*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.