CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS EN EL GEOPLANO CIRCULAR

Hugo Morales Juárez
Universidad Autónoma de Chiapas México
Preparatoria No. 3 del Estado de Chiapas
hugo_dgmath@hotmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Medio

Resumen. *Una problemática en la enseñanza de la geometría en el nivel medio consiste en la excesiva concentración en la deducción, intrínseca de la geometría euclidiana. Un análisis histórico nos muestra que aspectos como la medición práctica, el uso de instrumentos y la inducción jugaron un papel fundamental en el origen de la geometría. Con base en lo anterior, para atender dicha problemática, se diseñaron actividades para la enseñanza de la medición de ángulos y conteo de las diagonales en los polígonos, complementadas con un instrumento que le denominamos geoplano circular, en donde uno de los hallazgos principales fue la posibilidad de resignificar la geometría con base en el razonamiento inductivo y la predicción como una alternativa en su enseñanza y aprendizaje.*
Palabras clave: medición práctica, predicción, inducción, práctica social

Introducción

La geometría se estudia en el nivel medio superior en el segundo semestre, en el caso particular de la curricula de las Escuelas Preparatorias del Estado de Chiapas, se ubica en tercer semestre. Específicamente la enseñanza y el estudio de los polígonos se circunscriben a la aplicación de fórmulas para determinar los valores de los ángulos y el número de diagonales, en algunos casos se desarrolla la demostración para la obtención de dichas fórmulas; esta manera abstracta de estudiar la geometría provoca rechazo en los estudiantes.

La problemática la hemos atendido desde una aproximación socioepistemológica, entendida como epistemología de las prácticas sociales relativas a la producción y difusión del saber científico a través de una visión sistémica de las dimensiones epistemológicas, cognitiva, didáctica y sociocultural (Cantoral, 2004).

Para ello el abordaje de los conceptos geométricos del polígono mediante el geoplano circular permite no sólo amenizar las clases sino mostrar a los alumnos una visión más amplia de los elementos de los polígonos, en la que se la ve no sólo desde el cálculo abstracto, sino que se muestra como un sistema de prácticas, retomando las ideas que fueron germen de sus conceptos y teorías. Las situaciones se diseñaron principalmente sobre las fases de apropiación del conocimiento matemático: acción, formulación, validación e institucionalización (Chevallard et al., 1998).

En la dimensión didáctica se diseñaron actividades que tienen como propósito facilitar la construcción de polígonos, para obtener las relaciones de los ángulos de los polígonos regulares y la relación del número de diagonales en los polígonos regulares así como en los polígonos irregulares. En la propuesta metodológica se tomaron algunos elementos de la ingeniería didáctica (Artigue et al., 1995), partiendo del supuesto de una concepción de la matemática como una actividad de construcción de relaciones y patrones mediante la experimentación, el cuestionamiento, la reflexión, el descubrimiento y la discusión que se fomenta mediante un aprendizaje cooperativo en el que por medio de la interacción con otras personas se facilita la construcción de los propios significados. Las actividades se realizaron en la escuela preparatoria número 3 del estado de Chiapas, en equipos de 3 o 4 estudiantes en edad de 16 y 17 años, lo cual les permitió llegar a conclusiones que posibilitaron la generalización a partir de las situaciones particulares experimentadas.

Hacia una visión alternativa de construcción de las relaciones en los polígonos

En la vida del hombre primitivo existieron múltiples circunstancias que lo condujeron a importantes descubrimientos de carácter matemático. Muchas observaciones en la vida diaria debieron de conducir al concepto de curvas, superficies y sólidos. La noción de distancia fue, sin duda alguna, uno de los primeros conceptos geométricos que se descubrieron, la necesidad de limitar terrenos llevó a la noción de figuras geométricas simples, tales como rectángulos, cuadrados y triángulos. Otros conceptos geométricos, por ejemplo, la noción de vertical, de paralela y perpendicular, están seguramente relacionados con la construcción de paredes y viviendas.

Aunque no hay evidencia que permita estimar cuantos siglos pasaron antes que el hombre fuera capaz de realizar una investigación geométrica, los registros existentes más antiguos que se han encontrado son unas tablas de arcilla que corresponden a los tiempos sumerios de aproximadamente 3000 a.C. y que dan testimonio de que la actividad del hombre en la geometría antigua está íntimamente relacionada con la medición práctica. Numerosos hallazgos arqueológicos muestran que en tiempos posteriores (2000 – 1600 a.C.) los babilonios ya estaban familiarizados con la solución de problemas geométricos acerca de la medición de perímetros, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos (Calleja et al., 1979).

Los babilonios resolvieron una colección de problemas aplicando el mismo procedimiento, es decir, utilizaban un mismo procedimiento para hallar la solución de un conjunto de casos particulares de un mismo problema. Sin embargo, no se encuentra una formulación explicita, ni por supuesto probarla en su generalidad. Les bastaba el hecho de que tales resultados, cada vez que eran utilizados en la práctica, llevaran a conclusiones que no contradijeran lo que la experiencia había recogido directamente de la realidad. Cabe señalar que el tipo de cálculos que realizaban los babilonios para obtener perímetros, áreas y volúmenes supone un conocimiento profundo de la aritmética. Conocimientos adquiridos de los sumerios que habían desarrollado un sistema de numeración posicional, así como la división del círculo en 360 grados.

Las fuentes principales de información relacionada con la geometría egipcia antigua son los papiros Moscú y Rhind, que corresponden aproximadamente a 1850 y 1650 a.C. También se conserva en el museo de Berlín, el más antiguo instrumento astronómico o topográfico que se conoce, una combinación de plomada y vara de agrimensor aproximadamente de 1950 a.C. Así como un reloj de sol que data de 1500 a.C. aproximadamente, ambos del Egipto antiguo. Estos instrumentos indican algún conocimiento de geometría práctica. Así también la gran pirámide de Gizeh es una construcción erigida aproximadamente en 2900 a.C., que involucra conocimientos geométricos. Veintiséis de los 110 problemas de los papiros de Moscú y Rhind son geométricos. La mayoría de ellos están relacionados con los procesos de medición necesarios para calcular áreas de terrenos y volúmenes de graneros (Calleja et al., 1979). Varios de estos problemas fueron resueltos por los mismos métodos que utilizaron los babilonios, pero hubieron otros que difirieron, tal es el caso del área del circulo.

Es de suponerse que el hombre, en sus primeros encuentros con la geometría, resolvió los problemas de su interés como casos aislados y sin conexión alguna. Posteriormente, al reconocer analogías en una colección de ellos, abstrajo la naturaleza concreta de los problemas y formuló una generalización (expresada explícitamente o implícitamente) para todos los problemas en los cuales había observado analogía. Al generalizar, se tuvo la ventaja de ordenar problemas prácticos en grupos tales que todos los problemas de un grupo pueden resolverse por el mismo procedimiento general. Se llegó pues a leyes o reglas geométricas, que evidentemente simplificaron la solución de los casos particulares.

En contra parte “la geometría, tal como lo han forjado los matemáticos durante largos siglos desde Euclides, es una geometría sintética de una lógica fáctica, como toda ciencia, que procede por síntesis. Las demostraciones tienen esa forma inesperada y un poco misteriosa que bajo el pretexto del rigor, esconde las naturalezas de las cosas. La génesis de las ideas ha desaparecido para dar lugar a un encadenamiento lógico que aparentemente no impone nada. El estudiante no encuentra en esta ciencia (formalizada) ningún método general que pueda servirle de guía, ya sea para clasificar las nociones adquiridas o bien para descubrir, a su vez, algunas propiedades nuevas” (Bourlet, 1997, p.137). Dado que tiene que partir de generalidades que en la mayoría de las veces para él no tienen esa claridad evidente que se supone de los axiomas y postulados que permiten demostrar un teorema.

De tal manera planteamos que los cursos de geometría del nivel medio superior, deben desarrollarse mediante el proceso de descubrimiento de leyes generales a través de la experimentación con casos particulares, que permitan al estudiante recrear conceptos y generalizaciones que le den sentido a esa geometría que se encuentra en los libros de texto, en donde la medición y la predicción son relevantes en tanto que se muestran como columnas vertebrales para resignificar la geometría y que de alguna manera son compatibles con una visión socioepistemológica en el sentido de que nociones como *predecir, argumentar, gestuar o actuar, anticipar, compartir, difundir, consensuar, estabilizar y acumular,* juegan un papel fundamental en la construcción del conocimiento (Cantoral, 2004).

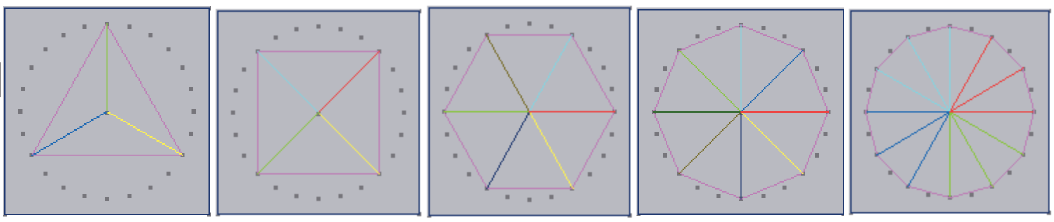
Actividades con el geoplano circular para resignificar la geometría

La actividad se lleva a cabo en dos momentos, en primer lugar los alumnos deben construir en equipos el geoplano circular, que consiste en una tabla cuadrada de 30 cm de longitud y 254 mm de grosor, donde se clavan 24 clavos distribuidos uniformemente en una circunferencia de 25 cm de diámetro y un clavo más en el centro de la circunferencia. El segundo momento consiste en la construcción de los polígonos utilizando ligas de colores, así como el trazado de los elementos que les permitan hallar los valores que se requieren para llenar las tablas que se les proporcionan, por ejemplo para la tabla 1, se requiere el trazado de los radios hacia cada uno de los vértices, para determinar el valor del ángulo central; para la tabla 2 se requiere el trazado de las diagonales desde un vértice, para llenar la tabla hasta la fila 3. Para llenar la fila 4, posteriormente deben trazar todas las diagonales desde cada vértice, teniendo el cuidado de no trazar dos diagonales que correspondan a los mismos vértices.

En el trazado de los radios la mayoría de los estudiantes observan en su construcción que en el centro se forman ángulos congruentes; por ejemplo para el polígono de tres lados, se forman 3 ángulos consecutivos (ver fig. 1a) por lo que concluyen que cada ángulo mide 120°; de la misma manera con el cuadrado (ver fig. 1b), cada ángulo mide 90°; y así sucesivamente, con los polígonos de *n* lados, se forman *n* ángulos centrales congruentes, por lo que cada ángulo central mide *360°/n*.

Número de lados	*3*	*4*	*6*	*8*	*12*	*n*
Ángulo central (X)	120°	90°	60°	45°	30°	$X = \frac{360°}{n}$
Ángulo interior (i)	60°	90°	120°	135°	150°	*i=180°- X*
Ángulo exterior (e)	120°	90°	60°	45°	30°	*180° - i* $e = \frac{360°}{n}$

Tabla 1.- Medida de los ángulos en un polígono regular de 3, 4, 6, 8, 12 y *n* lados.



a) b) c) d) e)

Figura 1. Trazado de polígonos regulares, en el geoplano circular, y sus radios a cada uno de los vértices. 815

En el caso del ángulo interior, los estudiantes observan que se forman triángulos isósceles con dos radios consecutivos y un lado del polígono; aunque para el caso del polígono de tres lados ya conocen que el valor del ángulo interior es de 60°, aun así plantean que si el ángulo central mide 120°, entonces los otros dos ángulos del triángulo isósceles suman 60° para poder completar los 180° que suman los tres ángulos, finalmente concluyen que cada ángulo del triángulo isósceles mide 30°, por lo que el ángulo interior del polígono mide 60° dado que está formado por dos ángulos de dos triángulos isósceles congruentes. En el caso del cuadrado que tiene el ángulo central de 90° (ver fig. 1b), entonces los dos ángulos del triangulo isósceles que se forman con los radios consecutivos deben sumar 90°, por lo que cada uno de estos ángulos debe medir 45°, de tal manera que el ángulo interior del cuadrado mide 90° ya que, al igual que en el caso anterior, está formado por dos ángulos de dos triángulos isósceles congruentes. El mismo razonamiento realizan con los polígonos de 6, 8 y 12 lados, de tal manera que para el polígono de *n* lados, ante la dificultad que les representa expresar el procedimiento realizado con los polígonos anteriores, analizan el comportamiento de los valores que tienen en la tabla 1, concluyendo que el ángulo interior es igual a la diferencia que existe entre 180° y el ángulo central, por lo tanto expresan $i = 180° - X$.

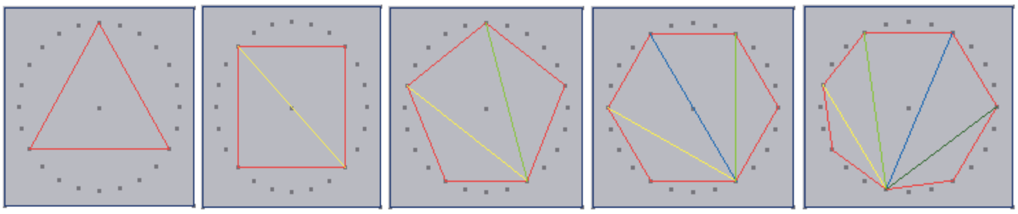
Para el caso de la medida del ángulo exterior, los alumnos determinan su valor, conociendo el hecho que es suplemento del ángulo interior, de tal manera que para el polígono de 3 lados plantean 180° - 60° = 120°, para el polígono de 4 lados 180° - 90° = 90°, para el polígono de 6 lados 180° - 120° = 60°, para el caso del polígono de *n* lados, algunos equipos concluyen que el ángulo exterior es $e = 180° - i$, y en otros casos observan los valores de la tabla concluyendo que el valor del ángulo exterior es igual a la medida del ángulo central por lo que $e = 180° / n$.

Por otra parte, en la actividad que corresponde al trazado de las diagonales, en el caso del polígono de tres lados, que es el primer polígono que construyen, entran en conflicto debido a que intentan trazar las diagonales; sin embargo, después de un tiempo de experimentar en el geoplano circular, se convencen que esto no es posible (ver fig. 2a).

Para el caso del polígono de 4 lados no tienen dificultad en identificar que únicamente se puede trazar una diagonal desde un vértice, lo mismo ocurre con los polígonos de 5, 6 y 7 lados. Para el caso del número de triángulos que se forman, únicamente observan el geoplano circular (ver fig. 2), y cuentan en cuantos triángulos, las diagonales dividen al polígono correspondiente.

Número de lados	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*n*
Numero de diagonales desde un vértice (d)	0	1	2	3	4	$d = n - 3$
Número de triángulos que se forman	1	2	3	4	5	*n-3*
Número de diagonales totales estimado	0	4	10	18	28	$d{\cdot}n$
Numero de diagonales totales (D)	0	2	5	9	14	$D = \frac{d \cdot n}{2}$

Tabla 2.- Número de diagonales en un polígono de 3, 4, 5, 6, 7 y n lados.



a) b) c) d) e)

Figura 2. Trazado de polígonos regulares e irregulares, en el geoplano circular, y las diagonales de un vértice.

Para llenar la fila tres de la tabla que corresponde al número de diagonales totales estimado, consideran los valores encontrados en la fila 1, que indica cuantas diagonales es posible trazar desde un vértice y el número de vértices que tiene el polígono correspondiente, de tal manera que estiman que el número de diagonales corresponde al producto de estos dos números es decir $d{\cdot}n$ (ver tabla 2). Posteriormente para verificar sus resultados colocan las ligas que corresponde a las diagonales que faltan, encontrando que la cantidad de ligas necesarias es la mitad del número de diagonales estimado.

Una vez que los estudiantes sistematizan los datos de la tabla, proceden al llenado de la última columna que es la generalización de los patrones observados; por ejemplo, el número de diagonales, 0 = 3 – 3; 1 = 4 – 3; 2 = 5 – 3; 3 = 6 – 3; por lo tanto $d = n - 3$. Para el caso del número de triángulos, 1= 3 – 2; 2 = 4 – 2; 3 = 5 – 2; 4 = 6 – 2; entonces el número de triángulos para el polígono de n lados es $n - 2$. Para el caso del número de diagonales totales como se mencionó anteriormente, consideran el número de diagonales por vértice y el número de vértices que tiene el polígono, por lo que en la generalización expresan que $D = d \cdot n /2$, dado que n corresponde al número de vértices que tiene el polígono de n lados (ver tabla 2).

Conclusiones

En el plano histórico (dimensión epistemológica) se puede observar que la actividad del hombre, en el origen de la geometría, está íntimamente relacionada con la medición práctica y con la solución de una colección de problemas aplicando el mismo procedimiento, así como el uso diverso de instrumentos de medición (plomada, vara de agrimensor, compás, etc.). Al organizar los problemas prácticos y generalizar el procedimiento llegaron a leyes o reglas geométricas. De acuerdo al funcionamiento de esta geometría antes de Euclides, se realizó un diseño de actividades para los estudiantes de educación media superior (Preparatoria) en donde los ejes principales fueron la medición práctica y la predicción, para tal fin se tuvo la necesidad de diseñar un instrumento, inspirado en el geoplano, que hemos llamado geoplano circular.

En las construcciones de los estudiantes mostramos, en cierto modo, algunas evidencias de que la medición práctica, la predicción y la manipulación del geoplano circular jugaron un papel fundamental en la generación de conocimientos geométricos. La naturaleza de las construcciones que realizaron los estudiantes, de alguna manera, permitieron observar que la inducción y la generalización son columnas vertebrales, sin embargo, han desaparecido de la enseñanza de la geometría porque se le ha dado primacía a la geometría euclidiana que descansa en una estructura axiomática en donde lo primordial es la deducción.

Nuestro trabajo de investigación nos está permitiendo tener una visión alternativa para la enseñanza de la geometría en el sentido de recuperar aspectos como la medición práctica, la predicción, el uso de instrumentos de medición, la inducción, la generalización, que están presentes en las practicas sociales de las diferentes culturas que desarrollaron conocimientos geométricos antes de la síntesis euclidiana.

Referencias bibliográficas

Artigue, M., Duady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (Ed). (1995). *Ingeniería didáctica en educación Matemática.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bourlet, M. C. (1997). La geometría descriptiva en el Conservatorio de Artes y Oficios de París. *Educación Matemática.* 9 (2). 137-139.

Calleja, M., Cedillo, T., Chalina, A. y Mendiola E. (1979). *Matemáticas I.* México: Universidad Pedagógica Nacional-SEP.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17*. (pp. 1-9) México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascon, J. (1998). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* México: Biblioteca para la actualización del maestro, SEP.