

USOS SIGNIFICATIVOS DE LA RELACIÓN $f-f'$ EN UN ESCENARIO PERIÓDICO

Ángeles Alejandra Ordóñez Morales

Escuela Bancaria y Comercial, Campus Chiapas

anlejandra@hotmail.com

Campo de investigación: Socioepistemología

México

Nivel: Superior

Resumen. *En este artículo reportamos algunos usos de la relación entre una función y sus derivadas en un escenario periódico. A lo largo de la investigación realizada (Ordóñez, 2007) observamos elementos de resignificación en un contexto de variación y desde una perspectiva de las prácticas sociales. Estudiamos algunos usos de dicha relación en contextos de ingeniería, donde dan cuenta de marcos de referencia más amplios que los considerados en el discurso matemático escolar. Y encontramos que es a partir del ejercicio intencional de las prácticas como, predecir, modelar, los comportamientos periódicos adquieren significados en el quehacer científico.*

Palabras clave: lo periódico, variación, predicción, primitiva y derivada

Introducción

Investigaciones en Socioepistemología han dando evidencia de que el desarrollo de estrategias del pensamiento y lenguaje variacional genera bases de significación para diferentes conceptos de cálculo y precálculo, entre ellos la derivada (Cantoral, 2004; Dolores, et al 2002; González, 1999). El analizar qué es lo que varía y cómo varía en fenómenos de cambio permite dar de un significado a la derivada alejado del manejo de fórmulas de derivación y del concepto de límite que es a lo que se suele acotar su enseñanza, de tal manera que la utilización de mecanismos de análisis de las variables y de sus variaciones sustentan la propuesta de que el manejo simultáneo y coordinado de las derivadas sucesivas es una condición para la construcción de la idea de derivada (Cantoral y Farfán, 1998; González, 1999).

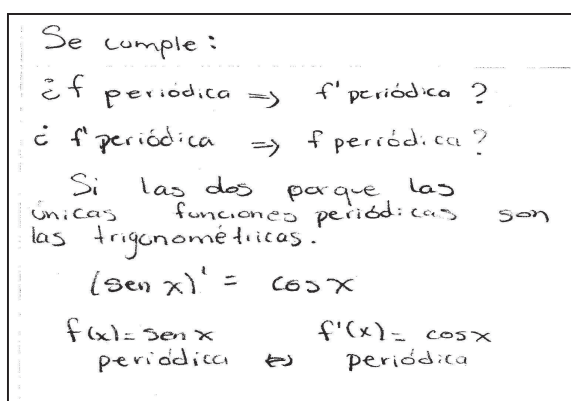
Esta investigación nace en la Socioepistemología, aproximación teórica sistémica que da cuenta de la construcción social del conocimiento matemático a través de su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza (Cantoral, 2004). Esta visión nos permitió aproximarnos al análisis de una función y sus derivadas en un escenario periódico desde sus usos en distintas áreas del conocimiento (en este reporte presentamos dichos usos en el contexto de la ingeniería) y dar cuenta de las herramientas y argumentos variacionales que se ponen en juego.

La hipótesis a seguir en este trabajo es que en un escenario que involucra fenómenos periódicos, el uso de argumentos y herramientas variacionales permite resignificar la relación entre una función y sus derivadas.

La Problemática

Estudios sobre la derivada y su primitiva en el marco de la matemática educativa reportan que los estudiantes son capaces de derivar una función pero no pueden reconocer en cierto problema la necesidad de una derivación o de reconocer la derivada de una función como otra nueva función y, por lo tanto, susceptible de volver a derivar (Cantoral, 1997). Una de las dificultades radica en el dominante uso del contexto algebraico en el razonamiento de los problemas que se manejan en cálculo.

También encontramos que en el discurso matemático escolar, la relación entre una función y sus derivadas para las funciones periódicas resulta ser poco significativa por el privilegio de los aspectos analíticos asociados. Buendía (2006) ha dado cuenta de que en el discurso matemático escolar la periodicidad, especialmente para el caso de las funciones, no está siendo usada como una propiedad que califica a un cierto comportamiento, sino que se limita a calificar a una determinada función, la trigonométrica. De ahí que el marco de referencia para analizar la veracidad o falsedad de la implicación *-f es periódica \Leftrightarrow f' es periódica-* sólo considera como posibilidad de función periódica a alguna trigonométrica, como podemos ver en la siguiente ilustración.



Respuesta de un profesor de ingeniería civil ante el cuestionamiento de la veracidad o falsedad de la doble implicación *f es periódica \Leftrightarrow f' es periódica*

Spivak (1980) presenta a la periodicidad como una propiedad de las funciones en general y no como una propiedad de las funciones trigonométricas como en la mayoría de los libros de texto; Aborda esta propiedad en ejercicios propuestos en un contexto analítico para analizar qué sucede al derivar o integrar funciones periódicas.

a) Supóngase que f es diferenciable y periódica, con periodo a (es decir, $f(x) = f(x+a)$ para todo x). Pruebe que f' es también periódica.

b) Si f es periódica con periodo a e integrable en $[0, a]$, muestre que $\int_0^a f = \int_b^{b+a} f$ para todo b .

c) Hallar una función f tal que f no sea periódica, pero f' sí.

d) Suponga que f' es periódica con periodo a . Pruebe que f es periódica si y sólo si $f(a) = f(0)$.

Esta presentación de la propiedad periódica en el discurso matemático nos llevo a estudiar la relación entre una función y sus derivadas para funciones con comportamientos periódicos en distintos contextos, para poder encontrar argumentos y herramientas situacionales que la resignifican.

La relación entre una función y sus derivadas

En la línea de investigación sobre pensamiento y lenguaje variacional se ha señalado que es factible construir una relación significativa entre una función y sus derivadas cuando se favorece un tránsito entre las variaciones sucesivas, es decir cuando se puede establecer un uso simultáneo entre la función y sus derivadas de tal manera que se pueda reconocer en todas ellas la forma de estudiar los cambios sucesivos y de esta manera romper con la idea de iteración (González, 1999; Dolores, et al 2002).

Con el objetivo de dar significados a la relación entre una función y sus derivadas, este estudio se ha valido también del uso de gráficas en donde éstas representan una forma de argumentación que favorece la construcción del conocimiento matemático. Suárez (2008) propone al uso de las gráficas para resignificar especialmente situaciones que tengan que ver con la variación y el

cambio pues la graficación, al seno de la modelación, es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y la argumentación.

Socioepistemología de lo periódico

Al reconocer el carácter social de la matemática, la socioepistemología centra su atención en el papel de las prácticas sociales para la construcción del conocimiento matemático y las reconoce como normativas de la actividad humana, aquello que hace que los individuos o grupos hagan lo que hacen (Covián, 2005). Una de sus tareas es la formulación de epistemologías de prácticas las cuales permiten conformar bases de significados para el conocimiento y para su introducción, significativa y articulada- al sistema didáctico (Buendía y Cordero, 2005). En la socioepistemología de lo periódico propuesta por Buendía (2004, 2006) señala a la predicción como una práctica asociada al reconocimiento significativo de dicha propiedad, reconoce a lo periódico como una construcción social en la que los aspectos analíticos de la periodicidad se nutren de otros de carácter cultural, histórico e institucional.

La práctica de predecir se fundamenta en la idea de describir el estado posterior de un fenómeno dada una cierta información del estado actual y su ejercicio intencional al seno de una situación provoca una distinción entre la repetición que presenta el fenómeno y cómo ésta se presenta. Con ello se favorece una reconstrucción de significados acerca de lo que es una gráfica o movimiento repetitivos por medio de una distinción del tipo de repetición que presentan. Dicha resignificación es inducida por la actividad de predecir ya que cualquier método de predicción se basará en el comportamiento presente en la gráfica correspondiente. El predecir hará posible distinguir significativamente entre el se repite y el cómo se repite lo cual es necesario para el reconocimiento de la naturaleza misma de la propiedad y no del objeto al cual se aplica.

Usos de la relación $f-f'$ en un escenario periódico

La aproximación socioepistemológica propone una revisión, una búsqueda de carácter epistemológico que permita dar cuenta de por qué ocurre lo que ocurre. Ello involucra diferentes fuentes y tipos revisiones desde aquéllas que tienen que ver con el desarrollo histórico de la propiedad periódica (Buendía, 2006; Vázquez, 2008), hasta como la que mostramos en esta

investigación sobre la búsqueda del uso de dicha propiedad en contextos particulares como la ingeniería.

Presentamos a continuación un ejemplo a través de una tabla con datos resumidos sobre la referencia de quien realiza determinada actividad en la cual hace uso de la relación $f - f'$ en determinado contexto y el tipo de argumentos o herramientas variacionales que consideramos entran en juego. Para una muestra mas extensa de algunos usos de dicha relación ver Ordóñez (2007) donde realizó una búsqueda de los usos de una función y sus derivadas en escenarios periódicos con la finalidad de determinar el papel que juegan las herramientas y argumentos de corte variacional.

Ejemplo 1

<p>Miranda (2003) trabaja en el diseño de levas y es especialista en el diseño de análisis mecánico así como en la implementación de sistemas de ingeniería asistida por computadora.</p>	<p>...Cuando las levas giran a bajas velocidades, los cambios de fuerza que generan los cambios en la aceleración pueden desprejarse. Sin embargo, a altas velocidades, estos cambios se convertirán en fuerzas que actuarán en el seguidor. Por esta razón es importante revisar que los perfiles de las levas de alta velocidad no presenten cambios bruscos de pendiente o discontinuidades en las gráficas de velocidad y aceleración. Existen movimientos que permiten asegurar derivadas "suaves" como el movimiento armónico y el movimiento cicloidal.</p> <p>La derivada es una medida de la rapidez con la que cambia el movimiento de la leva, ésta ayudará a controlar que el movimiento del seguidor sea suave. La segunda derivada presenta una relación para el radio de curvatura de la leva en varios puntos a lo largo de su perfil. Ya que la relación es inversa, conforme y'' crezca, el radio de curvatura se hará más pequeño. La tercera derivada puede utilizarse como una medida de la rapidez de cambio de y''.</p>
---	--

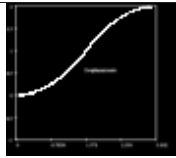
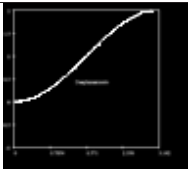
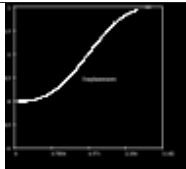
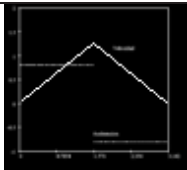
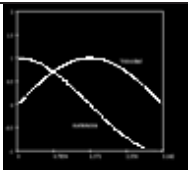
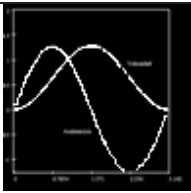
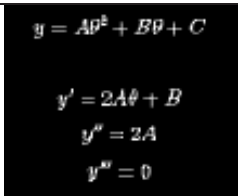
En este escenario de diseño de levas, un elemento mecánico que sirve para empujar a otro, el análisis del cambio es fundamental a tratar debido a que el autor menciona que cuando las levas

giran a bajas velocidades, los cambios de fuerza que generan los cambios en la aceleración pueden despreciarse. En cambio, a altas velocidades, estos cambios se convertirán en fuerzas que actuarán en el seguidor, por ello se requiere que el movimiento de la leva no cambie de forma brusca. Esto lleva a considerar que el movimiento tenga derivadas –cambios en los valores de las pendientes de las tangentes- suaves; es decir, que no presente cambios bruscos en el comportamiento de la velocidad y aceleración. También propone significados para la segunda y tercera derivada, están en términos de dar cuenta acerca de las variaciones que califican.

El autor presenta el diseño de levas mediante un método gráfico y analítico de tal forma que analiza frecuentemente a las gráficas del desplazamiento, velocidad y aceleración así como a las expresiones analíticas correspondientes a fin de dar sustento a la importancia de la derivada (ver tabla siguiente). Esto favorece un tránsito entre los contextos gráfico, físico y analítico en el que las gráficas están siendo una herramienta para explicar cómo serán las características del movimiento de la leva diseñada. De esta manera podemos observar la razón por la cual descarta el movimiento parabólico para levas de alta velocidad ya que si bien en apariencia es “suave”, sus derivadas no lo son. Y propone, para el tipo de levas de altas velocidades que el movimiento del seguidor sea armónico o cicloidal debido a que no presentan cambios bruscos en el comportamiento de la velocidad y aceleración además de asegurar que estos movimientos presentan derivadas suaves y no tienen puntos donde la pendiente cambie bruscamente (como podemos ver en las gráficas del movimiento y en sus expresiones analíticas). Estas propiedades hacen de estas curvas una opción común para las levas de alta velocidad.

La seguridad de usar este tipo de movimientos para las levas de altas velocidades se debe a que las funciones que modelan los movimientos armónico o cicloidal tienen comportamientos periódicos que al ser derivados se conservan, es decir, si la función de desplazamiento no es periódica como en el caso de una leva que presenta un movimiento de ir y venir ascendente, su comportamiento sobre las abscisas sí tiene una repetición propia de lo periódico. Al derivar este crecimiento, dicha variación se mantiene y en consecuencia la velocidad y aceleración son periódicas. Así, no es suficiente considerar únicamente que el movimiento sea suave; hay que considerar cómo será la variación de este movimiento para que no haya fuerzas que dañen al sistema. El tránsito entre los contextos parece estar fundamentado en la problematización del cambio presente: ¿cómo tiene que cambiar para que el sistema funcione? Los conceptos matemáticos de derivadas sucesivas y

los físicos de velocidad y aceleración tienen una base de significación fundamentada en la matematización de la variación.

Movimiento parabólico	Movimiento Armónico	Movimiento Cicloidal
		
		
	$y = \frac{L}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi\theta}{\beta} \right)$ $y' = \frac{\pi L}{2\beta} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{\beta}$ $y'' = \frac{\pi^2 L}{2\beta^2} \cos \frac{\pi\theta}{\beta}$	$y = L \left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi\theta}{\beta} \right)$ $y' = \frac{L}{\beta} \left(1 - \cos \frac{2\pi\theta}{\beta} \right)$ $y'' = \frac{2\pi L}{\beta^2} \operatorname{sen} \frac{2\pi\theta}{\beta}$

Desplazamiento, velocidad y aceleración y expresiones analíticas de los movimientos parabólico, armónico y cicloidal usados en el diseño de levas

Comentarios finales

En esta investigación encontramos aspectos socioepistemológicos que resignifican el conocimiento matemático referente a la relación *función-derivadas* en fenómenos de cambio en escenarios periódicos fortaleciendo de esta manera la socioepistemología de lo periódico. Lo periódico es visto como una propiedad que califica a un comportamiento y no a una función. Los comportamientos periódicos en las variaciones de las funciones adquieren significación en el quehacer no exclusivo de la matemática, sino en otros campos del conocimiento. De esta manera damos cuenta que un contexto puramente analítico no basta para estudiar la relación $f - f'$ en un escenario periódico, debido que a través de los usos de la relación es posible transitar de manera natural y articulada en los contextos analítico, gráfico y físico, como vemos en el ejemplo

mostrado, el diseño de levas se basa en métodos analíticos y gráficos para explicar y predecir las características del movimiento de la misma.

Referencias bibliográficas

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodic aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics* 58(3), 299-333.

Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa* 9(2), 227-251.

Cantoral, R. (1997). Matemática Educativa. En *Serie: Antologías, número 1*. (pp. 81-98). México, D.F., México: Programa Editorial del Área de Educación Superior Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Cantoral, R., y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción del análisis. *Epsilon* 42,14(3), 854-856.

Cantoral R. (2004). Pensamiento y Lenguaje Variacional, una mirada socioepistemológica. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 18 (pp.1-9). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: el caso de la cultura maya*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Dolores, C., Alarcón, G., y Albarrán, D. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 5(3), 225-250.

González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Miranda, J. (2003). *Diseño de levas*. En *Mecanismos*. Obtenido el 20 de abril de 2007 desde http://www.ufrj.br/institutos/it/deng/kalil/IT_140_Proj_Maq/Parte2_Mecanismos/mecanismo.pdf

Ordoñez, A. (2007). *Un estudio de lo periódico en la relación de una función y sus derivadas*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Chiapas.

Spivak, M. (1980). *Calculus*. USA: Publish or Perish.

Suárez, L. (2008). *Modelación – Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Vázquez, R. (2008). *Estudio de lo periódico en diferentes contextos: Identificación y uso de la unidad de análisis*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Chiapas.