LA ALTERNANCIA INFINITA NO SIEMPRE ES INFINITUD

María Rosa Rodríguez de Estofán
Universidad Nacional de Tucumán Argentina
marosarodriguez@arnet.com.ar
Campo de investigación: Pensamiento Matemático Avanzado Nivel: Superior

Resumen. *Con frecuencia los estudiantes confunden los conceptos de "sucesión" y "serie" y presentan serias dificultades en su aprendizaje. Si bien una serie está definida por una sucesión, los alumnos no distinguen su diferencia y es preciso recurrir a la estrategia de los aprendizajes significativos, identificando los conceptos previos, para luego asociar los nuevos e incorporarlos a su estructura cognitiva. En este trabajo se realiza un vasto estudio de las series alternadas, enunciando los teoremas apropiados que justifican las razones de su tratamiento y exponiendo el propósito de su enseñanza. En las demostraciones formales se realizan, además interpretaciones y gráficas. También, se intenta mostrar las similitudes y diferencias, cuando existen, entre las sumas finitas y las "sumas de infinitos términos", respondiendo las preguntas: ¿qué ocurre con un cambio en el orden de los términos de una serie?; ¿se altera la suma de las series convergentes? Un concepto es asimilado por el alumno cuando puede establecer relaciones lógicas entre lo que pertenece y no pertenece a dicho concepto.*
Palabras clave: serie, suma, reordenamiento

Introducción

Las series fueron introducidas al Cálculo en relación con las paradojas de Zenón y la representación decimal de los números. Su importancia surgió de la idea de Newton de representar funciones como series, especialmente para el cálculo de ciertas áreas.

Las palabras o términos "sucesión" y "serie" son utilizados en el lenguaje común con significados casi idénticos, pero sus significados matemáticos son completamente distintos. Además, es muy importante conocer los conceptos básicos de convergencia de sucesiones y de series. Es frecuente que los estudiantes confundan estos conceptos y son temas en los que presentan mayores dificultades de aprendizaje. Si bien una serie está definida por una sucesión, es notorio que los alumnos no distinguen la diferencia entre uno y otro. Como docentes debemos hacer hincapié continuamente en la diferencia entre ambos conceptos.

Aunque se puede enseñar a los estudiantes a analizar la naturaleza de una serie, existen grandes dificultades para lograr una comprensión del concepto. Por ejemplo, muchos estudiantes son capaces de aplicar, en forma correcta, las pruebas de convergencia para series y, sin embargo, muestran dificultades en la interpretación del concepto. Consideramos que se logra una comprensión completa del concepto cuando se reconocen y se reconstruyen las ideas de sucesión, convergencia, monotonía y acotación en diferentes contextos.

En este trabajo se realiza un vasto estudio de las series alternadas, enunciando y demostrando los teoremas apropiados que justifican las razones de su tratamiento y exponiendo el propósito de la enseñanza de estas series alternantes.

Marco Teórico

Para la enseñanza de series alternadas es fundamental recurrir a la estrategia de los aprendizajes significativos, identificando los conceptos previos, para luego asociar los nuevos e incorporarlos a su estructura cognitiva. También, es importante que dentro de las demostraciones formales se realicen interpretaciones gráficas que, sin duda, son de gran utilidad para el aprendizaje de los estudiantes.

Según los referentes teóricos que señalan las distintas formas de conocer un concepto y la forma en que se construye el conocimiento, parece común a todas las teorías y caracteriza al pensamiento matemático avanzado, es concebir la construcción de la comprensión de una noción matemática a través de la metáfora de la construcción de un objeto, que se puede emplear en sí mismo, a partir de un proceso que generalmente se realiza paso a paso; Meel, D. E. (2003). Aunque esta idea de construcción de la comprensión ha generado algunas críticas, creo que proporciona recursos conceptuales (la noción de esquema, nociones matemáticas como acciones, procesos u objetos) que explicarían el desarrollo de la comprensión del concepto de series.

Un esquema organizado representa lo que puede repetirse y generalizarse en una <u>acción</u> determinada, en circunstancias iguales. Es decir, el esquema es aquello que poseen en común las <u>acciones</u>. Un esquema es una actividad operacional que se repite (al principio de manera refleja) y se universaliza de tal modo que otros estímulos previos no significativos se vuelven capaces de suscitarla. La teoría de Piaget (1983) trata en primer lugar los esquemas, cuyo desarrollo es un proceso dinámico y cambiante. Con su desarrollo surgen nuevos esquemas y los ya existentes se reorganizan de diversos modos. Esos cambios ocurren en una secuencia determinada y pasan por tres niveles o fases. El mecanismo por el cual el sujeto transita de un nivel a otro es denominado abstracción reflexiva. Estos niveles se encuentran siempre cuando se analiza el desarrollo de un esquema de cualquier noción matemática.

Baker, Cooley y Trigueros (2000) señalan que "la teoría del desarrollo de un esquema puede explicar por qué los estudiantes tienen dificultades con diferentes partes de un tema y pueden tener problemas diferentes incluso con la misma situación en distintos casos". Una persona demuestra la coherencia del esquema al discernir cuándo la noción es aplicable o no. También, sabemos que hay que centrar la atención en el "tipo de relaciones" que los estudiantes son capaces de establecer entre los "elementos matemáticos" del concepto, comprendidos de alguna manera determinada (como una acción, un proceso o un objeto) cuando resuelven situaciones problemáticas.

Aquí se pretende mostrar teóricamente las similitudes y diferencias, cuando existen, entre las sumas finitas y las "sumas de infinitos términos". Para ello, se intenta responder las preguntas: ¿qué ocurre con un cambio en el orden de los términos de una serie?; ¿se altera el valor de la suma de las series convergentes? Uno de los objetivos del tratamiento de las series alternadas es que permite analizar su comportamiento cuando se realiza un reordenamiento o un reagrupamiento de sus términos. Otro factor que influye en el aprendizaje es conocer las razones del tratamiento de un tema, que responde al cuestionamiento frecuente de los alumnos "¿para qué sirve?".

Desarrollo

Las sumas finitas tienen la propiedad de que es posible cambiar el orden de sus términos, o sea reordenar a voluntad los términos, sin que por ello cambie el valor de su suma, por lo que se pueden sumar sus términos comenzando con el último. Esto no es posible en las sumas infinitas, pues no existe un último término. Desde este planteamiento se intenta ver el comportamiento de las series frente a un reordenamiento de sus términos.

De acuerdo a su definición, una serie es una sucesión $\{S_n\}$ que se obtiene de otra sucesión $\{a_n\}$ dada, según un procedimiento especial que se estableció antes. Otros conceptos previos para el aprendizaje de series alternadas son: convergencia de series, suma de una serie, identificación de series particulares y los criterios de convergencia de series con términos positivos.

Definición de Series Alternadas

Son las series numéricas cuyos términos sucesivos tienen signos alternados y se simbolizan

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots \quad \text{donde} \quad a_n > 0 \quad \forall\, n \in N$$

Existen distintas *razones* para estudiar estas series.

Una razón es que toda serie alternada converge si sus términos en valor absoluto conforman una sucesión $\{a_n\}$ decreciente o no creciente con límite 0 (cero).

Otra razón es que si una serie de este tipo converge, siempre es posible estimar su suma.

La combinación de estas razones, la convergencia asegurada y la fácil estimación de su suma, permite conocer el comportamiento de una gran variedad de series.

Teorema de Leibniz o Criterio de Convergencia de Series Alternadas

Si una serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$ con $a_n > 0 \quad \forall\, n \in N$

satisfece las condiciones: a) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall\, n \in N$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la serie es convergente.

Como recurso de aprendizaje se recurre al siguiente gráfico.

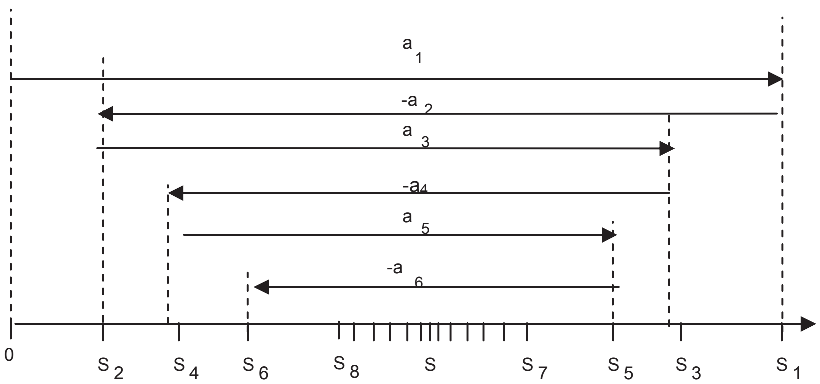

Figura 1. Comportamiento de los Términos de una Serie Alternada

Se grafica $S_1=a_1$ en una recta numérica. Para encontrar S_2 se resta a_2, así S_2 se encuentra ubicado a la izquierda de S_1. Luego, para encontrar S_3 se suma a_3, así resulta S_3 a la derecha de S_2.

Pero, como $a_3 < a_2$, S_3 está a la izquierda de S_1. Continuando de esta manera, se ve que las sumas parciales oscilan hacia atrás y hacia delante. Además, $a_n \to 0$, entonces, los pasos sucesivos se vuelven cada vez más pequeños.

Por lo tanto, las sumas parciales de subíndices pares S_2, S_4, S_6, … son crecientes (o no decrecientes) y las sumas parciales de subíndices impares S_1, S_3, S_5, … son decrecientes (o no crecientes) y es razonable pensar que ambas sucesiones convergen a algún número S. En la demostración se consideran, por separado, las sumas parciales de índices pares e impares.

Las sumas parciales de índices pares:

$$S_2 = a_1 - a_2 \geq 0 \qquad \text{pues} \qquad a_2 \leq a_1$$

$$S_4 = S_2 + (a_3 - a_4) \geq S_2 \qquad \text{pues} \qquad a_4 \leq a_3$$

$$S_6 = S_4 + (a_5 - a_6) \geq S_4 \qquad \text{pues} \qquad a_6 \leq a_5$$

$$\vdots$$

$$S_{2n} = S_{2n-2} + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq S_{2n-2} \quad \forall\, n \in \mathrm{N} \quad \text{pues} \quad a_{2n} \leq a_{2n-1}$$

Así, $0 \leq S_2 \leq S_4 \leq S_6 \leq \cdots \leq S_{2n} \leq \cdots \quad \forall\, n \in \mathrm{N}$ y

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \quad \Rightarrow S_{2n} \leq a_1 \quad \forall\, n \in \mathrm{N}$$

$\{S_{2n}\}$ es no decreciente y acotada superiormente $\therefore$ $\{S_{2n}\}$ es convergente y si llamamos S a su límite, resulta $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Para las sumas con subíndices impares: $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = S$.

Como ambas sucesiones convergen a S: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ converge.

No es sencillo encontrar la suma S de una serie convergente. Con frecuencia se usa la suma parcial S_n como una aproximación a la suma total S de una serie convergente, pero esto no es muy útil, a menos que sea posible estimar la exactitud de la aproximación. El error en que se incurre al usar $S \approx S_n$ es $|S - S_n|$.

La otra razón del tratamiento de las series alternadas es que, en las series que satisfacen el Teorema de Leibniz, el error es menor que a_{n+1} que es el primer término eliminado.

Teorema de Estimación

Si $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ es la suma de una serie alternada que satisface las condiciones del Teorema de Leibniz, entonces $|S - S_n| \leq a_{n+1}$.

$$S - S_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + (-1)^{n+2} a_{n+3} + \cdots = (-1)^n [a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots]$$

$$\Rightarrow |S - S_n| = (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots = a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots$$

Todos los paréntesis son ≥ 0 $\Rightarrow$ $|S - S_n| \leq a_{n+1} \quad \forall\, n \in N$

Dada cualquier serie, se puede considerar la serie cuyos términos son los valores absolutos de los términos de la serie original.

Con el fin de mostrar otro objetivo del estudio de las series alternadas, que es analizar su comportamiento cuando se realiza un reordenamiento de sus términos, son necesarios:

Convergencia Absoluta y Condicional

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice *absolutamente convergente* si la serie de los valores absolutos $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente. Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice *condicionalmente convergente* si es convergente pero no es absolutamente convergente.

Teorema: Toda serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutamente convergente es convergente.

Como $a_n = \pm |a_n| \Rightarrow -|a_n| \leq a_n \leq |a_n| \quad \forall\, n$; y sumando $|a_n| \Rightarrow \quad 0 \leq a_n + |a_n| \leq 2\,|a_n| \quad \forall\, n$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2\,|a_n|$ es convergente

y, por el criterio de comparación, la serie no negativa $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ converge.

De la identidad $a_n = a_n + |a_n| - |a_n| \quad \forall\, n$ se puede escribir

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + |a_n| - |a_n|\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + |a_n|\right) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

El enunciado recíproco es falso, pues la convergencia depende de la presencia de infinitos términos positivos y negativos dispuestos en un orden particular. Lo corrobora el siguiente

Teorema: Una serie es absolutamente convergente si y sólo si la serie formada con sus términos positivos y la serie formada con sus términos negativos son convergentes.

De estos teoremas se puede afirmar que toda serie convergente de términos positivos puede utilizarse para obtener una infinidad de series convergentes, sencillamente poniendo signos menos al azar. Sin embargo, no todas las series convergentes pueden obtenerse de esta manera, tales series serían las condicionalmente convergentes.

Un herramental importante para analizar la naturaleza de una serie son los Criterios, quedando en claro que éstos no dan la suma de una serie convergente, sólo dan naturaleza.

Si tenemos una serie que es absolutamente o condicionalmente convergente, nos preguntamos si esta suma infinita se comporta como una suma finita. La respuesta es no, porque la suma de una serie se define como un límite, que es el $\lim_{n\to\infty} S_n$. Surge la pregunta de si un reordenamiento de ella conserva la independencia del orden de sus términos.

Reordenamiento o Reagrupamiento de Términos

Se entiende por *reordenamiento* de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a toda serie que tiene los mismos sumandos pero en distinto orden. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie absolutamente convergente con suma S, cualquier reordenamiento de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiene la misma suma S que la serie original.

Se podría pensar que todas las series convergentes tienen esta característica, pero cualquier serie condicionalmente convergente se puede reordenar para dar una suma diferente.

La serie armónica alternada se usa con frecuencia para poner de manifiesto una propiedad que comparten todas las series condicionalmente convergentes: Un reordenamiento de la serie puede cambiar su suma.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \; ; \qquad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \cdots = S \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} \cdots = \frac{1}{2} S$$

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + \cdots = \frac{1}{2} S \qquad (2)$$

sumando (1) y (2)

$$1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + 0 \cdots = \frac{3}{2} S.$$

Esta última serie tiene los mismos términos que la primera de suma S, pero ubicados los términos de manera que uno negativo esté luego de dos positivos. No obstante, las sumas de estas series *no* son iguales. Esto pone de relieve el hecho de que una serie *no* es tan sólo la suma de un conjunto infinito de números, sino un par de sucesiones relacionadas entre sí. En el ejemplo se ve que las dos series son completamente diferentes, que tienen sucesiones de términos totalmente distintas y por lo tanto no debe sorprender que converjan a sumas diferentes. También, es posible ver que reordenaciones más extremas pueden convertir la primera serie en una serie divergente o en una serie que converja a cualquier suma deseada.

De hecho, Riemann probó: Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie *condicionalmente convergente* y **r** es un número real cualquiera, entonces existe un reordenamiento de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con suma es igual a **r.**

Si la serie dada es divergente: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ = 1−1+1−1+1−1+**…** es divergente, mientras que (1−1)+(1−1)+(1−1)+**…**converge a 0 y 1− (1−1) − (1−1) − (1−1) −**…** converge a 1.

Conclusiones

En este trabajo se intentó mostrar las similitudes y diferencias, cuando existen, entre las sumas finitas y las "sumas de infinitos términos". A las preguntas planteadas: ¿qué ocurre con un cambio en el orden de los términos de una serie?, ¿se modifica el valor de la suma de las series convergentes?, puede responderse que las series absolutamente convergentes se *comportan mucho mejor* que las series condicionalmente convergentes. Si una serie es absolutamente convergente, su comportamiento es similar al de las sumas finitas, o sea, tiene suma, valen las propiedades conmutativa, asociativa, etc., mientras que una serie condicionalmente convergente puede ser reordenada para que converja a cualquier suma o incluso para que diverja. Con respecto a la propiedad conmutativa para sumas finitas, que establece que una suma es independiente del orden de sus términos y su valor no se altera, vimos que eso no ocurre con cualquier serie convergente. Por ello es aconsejable sumar los términos de una serie convergente en el orden dado originalmente.

Un concepto es asimilado por el alumno cuando puede establecer relaciones lógicas entre lo que pertenece y no pertenece a dicho concepto.

Esta propuesta para la enseñanza de las series alternadas pretende que el alumno adquiera dominio y habilidad en sus conceptos y práctica, ya que son tópicos precisos para encarar el aprendizaje de otros temas como, por ejemplo, series de potencias.

Referencias bibliográficas

Baker, B., Cooley, L. y Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education 31(5)*, 557-578.

Camilloni, S. y Celman, E. (1998). *La evaluación en los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo.* Buenos Aires: Paidós.

Fulks, W. (1984). *Cálculo Avanzado.* México: Limusa.

Meel, D. E. (2003). Modelos y Teorías de la Comprensión Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6(3)*, 221-271.

Piaget, J. (1983). *Psicología y Pedagogía*. Madrid: Sarpe.

Piaget, J. y García, R. (1989). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia.* México: Siglo XXI.

Stein, S. y Barcellos, A. (1995). *Cálculo y Geometría Analítica. Vol. 1.* Bogotá: McGraw-Hill Interamericana.

Stewart, J. (1994). *Cálculo.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.