EL COMPORTAMIENTO TENDENCIAL DE LAS FUNCIONES EN LA RESIGNIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES: LA RELACIÓN ENTRE PREDICCIÓN Y SIMULACIÓN

Miguel Solís Esquinca
Universidad Autónoma de Chiapas México
solise@unach.mx
Campo de investigación: Gráficas y funciones Nivel: Superior

Resumen. *La investigación tiene el objetivo de reconstruir significados de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de la forma ay' + by = F(x) a través de situaciones gráficas de trasformación, ésta consiste en identificar patrones de comportamiento de la función F al variar los coeficientes a y b de la ecuación diferencial e interactuar con los contextos gráficos y algebraicos. Estudiantes de ingeniería fueron la fuente para la obtención de los datos. A partir del diseño de las secuencias los estudiantes construyen argumentos de comportamientos gráficos y algebraicos que permiten identificar la solución y(x) con un comportamiento tendencial hacia la función F(x) (noción de Predicción) y describir el comportamiento de la solución al variar los coeficientes a y b (noción de Simulación). El resultado del estudio muestra que una relación simbiótica entre las nociones de Predicción y Simulación permite la reconstrucción de las ecuaciones diferenciales dotándolas de nuevos significados.*

Palabras clave: predicción, simulación, ecuaciones diferenciales, resignificación

Introducción

En este estudio se establece una relación simbiótica entre las nociones de Predicción y Simulación en el contexto de las ecuaciones diferenciales de la forma $ay' + by = F(x)$ en un ambiente de modelación gráfica. Si bien, la noción de Predicción permite conocer la evolución posterior de los fenómenos de variación continua cuantificando la relación funcional entre variables a partir de las condiciones iniciales y de las variaciones de las variables involucradas en el fenómeno (Muñoz, 2000), esto es construir *F*(*t*); el control de estos fenómenos de variación estaría vinculado a la noción de Simulación, esto es, partir de *F*(*t*), construir $y(t) = AF(at + b) + B$ y analizar la organización de los comportamientos de *y*(*t*) a través de la variación de los parámetros (*A*, *a*, *B* y *b*). La ciencia y la tecnología se han desarrollado a través de estas dos cuestiones fundamentales: la predicción y el control de los fenómenos naturales.

Los dispositivos tecnológicos que nos permiten la manipulación de gráficas de funciones, tales como calculadoras con esa capacidad y aplicaciones de cómputo pueden ser utilizados para favorecer las nociones de Predicción y Simulación diseñando para ello las secuencias adecuadas. Considerando la hipótesis de que una relación simbiótica entre las nociones de Predicción y de Simulación sea el eje que resignifica el Cálculo Integral escolar, reportamos algunos resultados de nuestro trabajo con estudiantes universitarios. En particular en este documento damos cuenta de los resultados de los análisis a priori así como el análisis a posteriori y la confrontación del mismo, cómo método de validación del diseño de secuencias en una situación de simulación.

Antecedentes

Las operaciones aritméticas sobre la gráfica de una función, y los efectos observados, con el auxilio de calculadoras o computadoras que grafican, se usan frecuentemente, ahora, en los cursos de cálculo y precálculo, sin embargo, esta estrategia de enseñanza pareciera encaminarse tan sólo a otro método de construir gráficas, algo que se antoja inútil si consideramos que la computadora o calculadora nos dibuja ya la gráfica. En estudios reportados (Cordero & Solís, 2001; Cordero, 2001) se da cuenta de una noción que permite reconstruir significados en el sentido de la socioepistemología (Cordero, 2006), es el comportamiento tendencial de las funciones (CTF), noción sui generis del carácter funcional del conocimiento matemático cuya construcción está en relación con la modelización y el uso de las herramientas matemáticas, permitiendo formular categorías del conocimiento matemático que a priori no se encuentran dentro de la estructura matemática. La expresión algebraica $y = a[f(bx+c)]+d$ se puede ver como un conjunto de instrucciones que nos dice como debemos ir modificando (trasladarla, dilatarla o contraerla, reflejarla) la gráfica de $f(x)$ para obtener la gráfica de y. En ese sentido cualquier relación funcional es una instrucción que organiza comportamientos.

Mención aparte merece el hecho que, en el discurso matemático escolar actual, estas argumentaciones gráficas se sitúan en el llamado precálculo y se diluyen a medida que se avanza en el currículum, en el cálculo se verán favorecidos los argumentos analíticos, en el análisis las gráficas habrán casi desaparecido para favorecer una aritmetización de cálculo. En las ecuaciones diferenciales se introducen nuevas formas de visualización gráfica como, por ejemplo, los campos de pendientes, que son propias de este contenido.

El CTF y las ecuaciones diferenciales

El estudiante novicio en ecuaciones diferenciales cuando se ve enfrentado a resolverlas, intentará "despejar" a la función *y* (¡que justamente es la incógnita del problema!), acción que el profesor considerará errónea, e intentará que el estudiante construya la expresión $y'(x)=F(x,y)$. La natural estrategia del estudiante en cuestión es heredada del álgebra y fue aprovechada para el diseño (Solís, 2003) de secuencias para resignificar a las ecuaciones diferenciales de la forma $y'(x)+y(x)=F(x)$.

El diseño consistió en presentar a estudiantes de ingeniería de México las siguientes ecuaciones diferenciales: $y'(x)+y(x)=0$, $y'(x)+y(x)=k$, $y'(x)+y(x)=x$ y $y'(x)+y(x)=x^2$ y preguntarles por la solución *y*. Situados en el marco funcional interpretamos las producciones de los estudiantes a través de la noción de CTF, en dónde los estudiantes identificaron el comportamiento gráfico de *y* con tendencia a la gráfica de *F*, en palabras de los estudiantes: "la gráfica de *y* (a partir de ciertos valores de *x*) tiende a parecerse a la gráfica de *F*". Aquí lo representaremos:

$$y'(x)+y(x)=F(x)\,,\ y(x)\xrightarrow[CT]{}F(x)$$

Estas secuencias favorecen la noción de predicción en el sentido de construir *f*(*t*) que modela cierto fenómeno a partir de conocer su evolución (variación). En matemáticas es encontrar la función solución *y*(*x*) a partir de su derivada.

Para favorecer la noción de simulación (control del fenómeno) recurrimos a la aritmética sobre una gráfica, ya comentada en párrafos anteriores, e intentamos relacionarla con las ecuaciones diferenciales de la forma $ay'(x)+by(x)=cF(x)$. Las actividades aquí son las de proponer variaciones a los coeficientes de los términos de la ecuación y observar los efectos en la gráfica de la solución (Solís, 2002). En particular, se le pedía a los estudiantes hacer corresponder las ecuaciones diferenciales con la gráfica de su solución en un arreglo tabular. Primero se presentaba en una hoja dos columnas, la de la izquierda mostraban cuatro ecuaciones, $y'(x)+y(x)=x^2$, $2y'(x)+y(x)=x^2$; $y'(x)+2y(x)=x^2$; $y'(x)+y(x)=2x^2$, en la columna de la derecha se mostraban ocho gráficas que eran dos de las soluciones para cada ecuación, aquí se les pedía relacionaran las dos columnas; enseguida se presentaba una hoja similar a la primera pero ahora mostrando en la columna de la derecha ocho expresiones algebraicas que correspondían a dos de las soluciones de cada ecuación; en una tercera hoja se presentaba tres columnas, la de la izquierda mostraba las ecuaciones, la del centro las ocho gráficas y la de la derecha las ocho expresiones algebraicas. En la tercera y segunda hoja también se les pedía relacionar las columnas.

Metodología

El diseño y el análisis de las situaciones se hicieron usando la siguiente metodología:

1. Transformar un hecho a un fenómeno didáctico. En nuestro caso, el hecho consiste en las dificultades que tienen los estudiantes para interactuar (ir y venir) entre los contextos gráficos y algebraico. Este hecho ha sido ubicado en el fenómeno de las representaciones y transformado en el fenómeno didáctico, el cual toma en cuenta las diferentes representaciones, sus formas y niveles, los diferentes planos de representación y los posibles homomorfismos entre ellos. Y las coherencias locales de procedimientos operativos que son derivados de esas representaciones.

2. Describir las dificultades específicas de las situaciones de enseñanza. Tomamos en cuenta la descontextualización y recontextualización que conlleva a la rehabilitación de significados y sistemas simbólicos, donde descontextualización significa que el contexto original fue perdido y recontextualización significa la búsqueda de un contexto tal vez distinto al original.

3. Establecer un marco teórico que explique las dificultades. El marco, hasta ahora, se compone de los siguientes elementos: abstracción reflexiva y categorías del conocimiento matemático; acciones, procesos, objetos y esquemas; representaciones y procedimientos; niveles de desarrollo.

4. Usar el marco teórico para diseñar situaciones didácticas. Se diseñan situaciones sobre una base socio-epistemológica.

5. Considerar los resultados de 3 y 4 en la implementación e iteración. Las actividades de las entrevistas para cada situación serán diseñadas e implementadas en concordancia con la metodología.

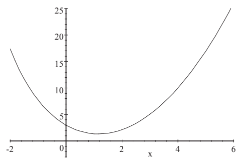
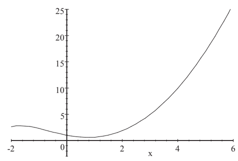
Análisis

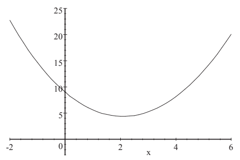
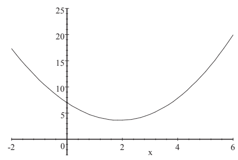
Para el análisis se procede, primeramente, a plantear hipotéticamente lo que los estudiantes harán con la secuencia, esto guía al investigador en el diseño de la actividad, este análisis hipotético le llamaremos análisis a priori. Después de aplicada la secuencia se realiza un análisis a posteriori de las producciones de los estudiantes, lo que realmente hicieron, el diseño se valida con la confrontación entre lo hipotético y las producciones. Presentamos un ejemplo del análisis a priori para una de las actividades

> 1. En la columna de la izquierda aparecen escritas cuatro ecuaciones en términos de x, $y(x)$ y $y'(x)$, en la columna de la derecha están graficadas ocho funciones $y(x)$.
> Relaciona la ecuación con la gráfica o gráficas que creas que la satisfagan.

La intención de invertir el orden convencional (esto es primero la derivada y luego la función) para escribir las ecuaciones de este tipo puede favorecer a que el estudiante privilegie el término *y*(*x*) del lado izquierdo de la ecuación y lo relacione con el término *F*(*x*) del lado derecho, estableciendo así a relación buscada. Con el conocimiento previo del patrón $y(x) \xrightarrow[CT]{} F(x)$, los estudiantes centrarán la atención en estos dos elementos y a partir de las operaciones gráficas con parábolas (en particular (Ax^2) establecerán las relaciones gráfica – ecuación.

Aunque ya han trabajado con la solución de $y(x) + y'(x) = x^2$ (analítica y gráfica) la actividad dificultará discriminar entre las gráficas soluciones de esta ecuación y las graficas soluciones de la ecuación $y(x) + 2y'(x) = x^2$, ya que en ambas se puede establecer $y(x) \xrightarrow[CT]{} x^2$. Las relaciones entre gráfica y ecuación quedarían así.

$y + y' = x^2$		

$y + 2y' = x^2$		

En esta experiencia pudimos observar cómo los estudiantes trasladan las propiedades geométricas de una curva conocida que han trabajado en el precálculo al contexto de las ecuaciones diferenciales. Sus argumentos están relacionados a los comportamientos gráficos, en general a los de carácter global, como comportamientos asintóticos, comportamientos al infinito, curvas que en una ventana "ampliada" de su calculadora se "parecen". Sin embargo algunos estudiantes también ponen atención a los comportamientos de carácter local, como intersección con los ejes, vértices. A continuación, a manera de resumen, enlisto algunos hechos que hemos observado a partir de estas actividades:

- Las calculadoras y aplicaciones de cómputo que grafican funciones hace que los estudiantes fijen su atención a formas globales de las gráfica, favoreciendo argumentos gráficos que responden a comportamientos tendenciales de las funciones.
- El argumento de comportamiento tendencial surge en la actividad de sumar una función con una "recta" cuándo la pregunta se hace a partir del contexto gráfico en que ocurre, lo que hemos llamado una aritmética gráfica.
- Las propiedades gráficas de las funciones sumandos, de la actividad descrita en el párrafo anterior, son heredadas a la función suma, estableciendo argumentos gráficos que tienen que ver con estrategias locales (tangencia en un punto) y estrategias globales (reconocimiento de formas geométricas completas)

- Se conservan en la variación de parámetros (coeficientes) de una ecuación diferencial lo que los estudiantes han experimentado en el precálculo. Aunque sólo las dos ecuaciones en las que el término $cF(x)$ de la ecuación $ay' + by = cF(x)$ es afectado, $c = 1$ y $c = 2$, pudieron ser relacionadas con su solución, los argumentos usados están anclados en que la solución debe parecerse al término $F(x)$ y que los efectos en esta parábola ($F(x) = x^2$, en este caso), deben ser parecidos a los efectos en la situación, pudiendo establecer la correcta relación con sólo la observación de la concavidad de la parábola.

Reflexiones finales

A partir del diseño de las secuencias los estudiantes construyen argumentos de comportamientos gráficos y algebraicos que permiten identificar a la solución $y(x)$ con un comportamiento tendencial hacia la función $F(x)$ (noción de predicción) y describir el comportamiento de la solución al variar los coeficientes *a* y *b* (noción de simulación). El resultado del estudio muestra que una relación simbiótica entre las nociones de predicción y simulación permite la reconstrucción de las ecuaciones diferenciales dotándolas de nuevos significados.

Este estudio socioepistemológico de la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, es para establecer un método del diseño de situación y la lectura de datos con el propósito de lograr un alcance de reproducción en el sistema educativo e ir propiciando el rediseño del discurso matemático escolar.

Partimos de la epistemología de la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, la cual consiste de los siguientes aspectos:

- La ecuación $ay' + y = f$ es un modelo del comportamiento tendencial de la función *y*: $y \xrightarrow[CT]{} f$, $x \to \infty$

- La situación de la ecuación $ay' + y = f$ es la relación simbiótica entre la predicción y la simulación, cuyo argumento es el comportamiento tendencial de y con respecto a *f*: $y \xrightarrow[CT]{} f$.

- El argumento de la situación se desarrolla a través de las resignificaciones (patrones de comportamiento de la función y la gráfica), de los procedimientos (variación de parámetros de la ecuación diferencial) y las diferentes experiencias cognitivas (los procesos y objetos de función como una instrucción que organiza comportamientos).

Situarse en un marco funcional permitió encontrar un argumento gráfico, implícito algunas veces y explícito en otras, en las explicaciones de los estudiantes. Surge en un ambiente gráfico favorecido por los dispositivos tecnológicos que grafican funciones y que permiten concebir a una función globalmente. Este argumento atiende las tendencias de las gráficas, ya sea en una suma de funciones, en la variación de los parámetros o en la forma de la gráfica de la solución de las ecuaciones diferenciales. Habilitado a partir de las explicaciones, éste argumento, al que hemos llamado comportamiento tendencial de las funciones, se convierte ahora en un programa que organiza contenidos del cálculo, de ahí que adquiera un estatus epistemológico y puede considerarse como una categoría del cálculo.

Referencias bibliográficas

Cordero, F. y Solís, M. (2001). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo*. Cuadernos Didácticos No. 2. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4(2)*, 103 – 128.

Cordero, F. (2006). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 265-286). México D.F.: Diaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3(2)*, 131- 170.

Solís, M. (2002). Las nociones de predicción y simulación en ecuaciones diferenciales a través del comportamiento tendencial de las funciones. *Serie: Antologías Número 2* (pp. 113-136). México: Programa Editorial, Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.

Solís, M. (2003). Predicción y simulación: Nociones asociadas a las ecuaciones diferenciales. En J. Delgado (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16(2)*, (pp. 386-392). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.