LA INTEGRAL DEFINIDA COMO OBJETO DE UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA

Ileana Pluss
Universidad Nacional de Rosario Argentina
ipluss@cablenet.com.ar
Campo de investigación: Pensamiento variacional Nivel: Medio

Resumen. *El trabajo que se presenta se basa en la concepción de la Educación Matemática como ciencia de diseño (Wittman, 1995) y se enmarca en estudios didácticos e investigaciones sobre los procesos de aprendizaje de unidades curriculares, diseñadas y construidas como material de apoyo para la enseñanza de tópicos específicos, seleccionados por su valor conceptual en los programas de la llamada Matemática Básica en Facultades donde el carácter de esta ciencia es instrumental. El tema a tratar es "Integral definida" y se desarrolla a partir de un problema concreto de economía. Se presenta el desarrollo de las fases de una Ingeniería Didáctica correspondientes a los "análisis preliminares" y a "la concepción y los análisis a priori" (Artigue, Douady, Moreno, Gomez, 1995).*

En un trabajo predictivo se han determinado algunos obstáculos que caracteriza la teoría de Brousseau (1983).

Palabras clave: ingeniería didáctica, integral definida, enfoque geométrico

Justificación del tema y objetivo del trabajo

Numerosas investigaciones realizadas muestran, con convergencias sorprendentes, que si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos y a resolver algunos problemas estándar, se encuentran grandes dificultades para hacerlos entrar en verdad en el campo conceptual del Cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de este campo de la matemática. (Artigue, y cols., 1995) Esto está reforzado por la propia experiencia docente y nos ha llevado a enfocar especialmente el tema "Integral definida".

¿Qué razones justifican esta elección?

- *Su valor conceptual*

Siguiendo el lenguaje de Douady, se nutre en los "cuadros" de la Geometría, el Álgebra, la Geometría Analítica, el Análisis Matemático.

- *Su valor formativo*

Estimula a reflexionar sobre los fenómenos de variación continua que llevan a adquirir las nociones de predicción, de acumulación y otras asociadas al concepto de integración.

- *El razonamiento lógico que exige*

Implica, entre otras cosas, manejar simultáneamente el concepto de área de una región plana y el de límite de una función.

- *Su estímulo a un pensamiento visual*

Va más allá de una simple visualización, exige operaciones de relación provocadas por dicha visualización.

Es pues el objetivo del trabajo, facilitar la comprensión del "concepto de integral definida" en el contexto de una Facultad de Ciencias Económicas.

Marco metodológico de la investigación

Como metodología de investigación, la Ingeniería Didáctica se ubica en el registro de los estudios de casos, cuya validación, esencialmente interna, se basa en la confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori (Artigue et al, 1995).

La Ingeniería Didáctica incorpora una visión propia del aprendizaje de la matemática; si bien parte de una concepción constructivista del aprendizaje, se distingue dentro de este tipo de teorías por su modo de incorporar la relación entre el alumno y el saber. Los contenidos son el fundamento sobre el cual se van a desarrollar, de manera jerarquizada, las estructuras mentales. El problema principal de investigación es el estudio de las condiciones en las cuales se constituye el saber, con el fin de optimizar su control y su reproducción.

Los contenidos matemáticos toman especial importancia, ya que no se pueden separar la concepción de la Matemática como Ciencia de su propio proceso de estudio.

En el diseño de la Ingeniería Didáctica al cual nos adherimos (Artigue et al, 1995), se realizará la distinción temporal en un proceso de cuatro fases:

1.- Análisis preliminar; 2.- Concepción y análisis a priori; 3.- Desarrollo de una experiencia y 4.- Análisis a posteriori y evaluación.

En este trabajo, se abordarán solo las dos primeras fases referidas al diseño del material didáctico, que implican una indagación epistemológica y una propuesta didáctica.

Análisis preliminar que ha guiado al diseño de esta unidad

Comprende en general: una dimensión epistemológica, una cognitiva y una didáctica**.**

Dimensión epistemológica

Nuestro diseño se basa sobre la validez matemática del conocimiento geométrico obtenido por visualización, y sobre la importancia de las operaciones de relación provocadas por dicha visualización.

Dimensión cognitiva

En nuestro diseño la planificación de la enseñanza del tema Integral Definida está basada en la localización de los obstáculos. Para Brousseau (1983) un obstáculo es un conocimiento que tiene su propio dominio de validez y fuera de dicho dominio puede ser fuente de errores y dificultades. La localización de los obstáculos inherentes al conocimiento de un tema, es esencial para la planificación de su enseñanza. En su determinación interviene la experiencia del docente y su interés en saber porqué el alumno comete los errores.

Chevallard, Bosch y Gascón (1997) señalan:

> *"Suele haber cierta unanimidad en que los obstáculos se manifiestan mediante errores reproducibles, con cierta coherencia interna (no se trata de errores impredecibles y arbitrarios), persistentes (siguen apareciendo después de que el sujeto haya rechazado conscientemente el modelo defectuoso) resistentes (muy difíciles de modificar) y relativamente universales. En el caso de los que tienen*

> *origen epistemológico, se postula rastrear además en la génesis histórica de los conceptos en cuestión"* (p. 224).

En nuestro caso, el concepto de límite de una función de *una variable real visualizable en su movimiento sobre un eje aproximándose a un punto,* puede ser un obstáculo epistemológico para la comprensión del concepto de integral definida como límite de una función de *una variable "partición" cuyo movimiento es la disminución de las amplitudes de los intervalos.*

La introducción previa del concepto de antiderivada o integral indefinida, puede ser un obstáculo epistemológico para la comprensión del concepto de integral definida, debido a la similitud en el nombre y en la simbología de ambos conceptos.

El recurso adecuado de visualizar un área para introducir el concepto de integral definida, puede llegar a ser un obstáculo didáctico posible al avanzar sobre aquellos casos en que la integral no representa un área.

Dimensión didáctica

Nuestro diseño está centrado en la actividad del alumno. Las actividades que se proponen motivan el surgimiento de situaciones de exploración, formulación y validación generadas en el interés del alumno. Esta dimensión está condicionada por la cantidad de alumnos donde se realizará la experiencia, lo cual confiere gran importancia al diseño del material que deberá ayudar a un aprendizaje autónomo.

Concepción y análisis a priori

En esta etapa el "investigador diseñador" toma decisiones en cuanto a la elección de los contenidos. En nuestro diseño, esta elección se expone en los siguientes *objetivos*:

1.-Educar al alumno en una lectura completa y cuidadosa de un problema.

2.-Interpretar los datos y proponer soluciones aproximadas.

3.-Traducir al lenguaje matemático el límite de la suma inferior y de la suma superior de Riemann.

4.-Relacionar geométricamente el concepto de área con el de integral definida.

5.-Interpretar fenómenos de variación continua de los cuales se deriven problemas cuya solución exija una integración.

6.-Identificar la integral definida con el resultado acumulado de un proceso de cambios.

En la selección de los contenidos teóricos se decide:

✓ Enunciar la definición de Riemann de integral definida.

Prospectiva

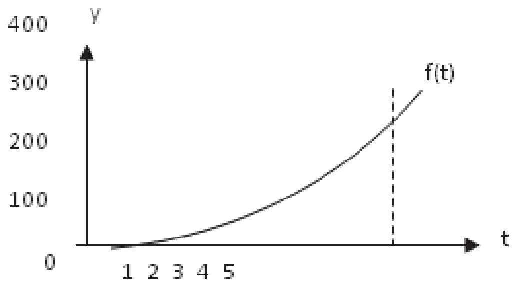
El "análisis preliminar" y "la concepción y los análisis a priori" presentados preparan el terreno para que, luego de la observación del desarrollo y de los resultados, se realice la confrontación de los análisis a priori y a posteriori y se puedan así validar las predicciones de aparición de situaciones adidácticas (Brousseau, 1986) que caracterizan el aprendizaje de un conocimiento matemático.

"La selección didáctica"(Artigue, 1995): el problema como eje que conduce y da significado a la definición de integral

Luego de un estudio apropiado, un fabricante de automóviles estima el gasto de mantenimiento de uno de sus modelos en función de la edad del automóvil, con el siguiente modelo: $f(t)= 100+10t^2$ donde t es la edad del automóvil en años y f(t) está dado en dólares. El fabricante desea conocer los gastos estimados de mantenimiento acumulados durante los primeros cinco años.

7.- Interpretación de los datos y algunas preguntas orientadoras

¿Cuáles son las características más importantes de f? ¿Cómo interpretamos en la representación gráfica de f, los gastos estimados acumulados de cero a cinco años?



f es continua, positiva y monótona creciente en todo su dominio; cuanto más años tenga el auto más dinero requerirá su mantenimiento. Así por ejemplo:

A los seis meses se estima un gasto en dólares igual a: f(0,5) = 100+10.(0,5)2 = 102,50

A los cinco años se estima un gasto en dólares igual a:

f(5) = 100+10.(5)2 = 350

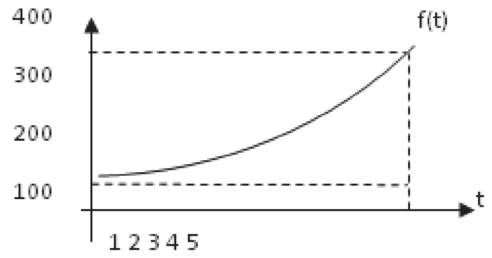
Obviamente los gastos estimados acumulados durante los primeros cinco años, tendrán un valor igual a la suma de todos los gastos que se espera se realicen durante dicho período de tiempo, es decir a "la suma" de todas las ordenadas f(t) desde t=0 hasta t=5.

¿Cómo se puede interpretar geométricamente esta suma?

Visualizamos en la representación gráfica de f que dicha suma es el área de la región limitada por la curva, el eje t y las rectas t=0 y t=5.

¿Cómo calculamos el área de esta región limitada por una curva? ¿Porqué no utilizar el método que empleó Arquímedes (siglo III a C) para calcular el área del círculo el cual consiste en dividir la figura en franjas mediante rectas paralelas y en los extremos de estas franjas aproximar los trozos de curva mediante segmentos?

Comencemos por considerar una sola franja, es decir trazar las paralelas por los puntos 0 y 5. Como f es continua en el intervalo [0, 5], alcanza un máximo absoluto (M_a) y un mínimo absoluto (m_a) en dicho intervalo, es decir que $m_a \leq f(x) \leq M_a \ \forall x \ \varepsilon \ [0, 5]$. Podemos así aproximar la curva en el intervalo [0, 5] por el segmento de altura M_a o por el de altura m_a.



Es evidente que el área que buscamos está comprendida entre las de los rectángulos de base 5 y cuyas alturas son $m_a = f(0) = 100$ y $M_a = f(5) = 350$ Es decir: $5.100 < A < 5.350$

$$500 < A < 1750$$

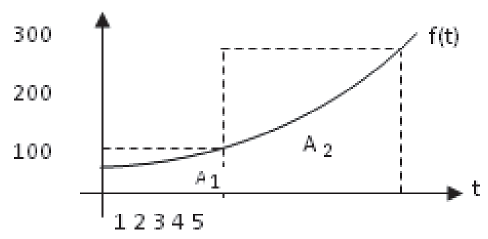
Notemos que el área del rectángulo más pequeño es una aproximación por defecto y la del rectángulo más grande es una aproximación por exceso del área que buscamos.

Continuamos con el método de Arquímedes partiendo el intervalo [0, 5] en subintervalos más pequeños. ¿Qué puntos elegimos para trazar las paralelas al eje Y?

Es evidente que 0 y 5 deberán estar siempre, y luego agregamos los que deseemos.

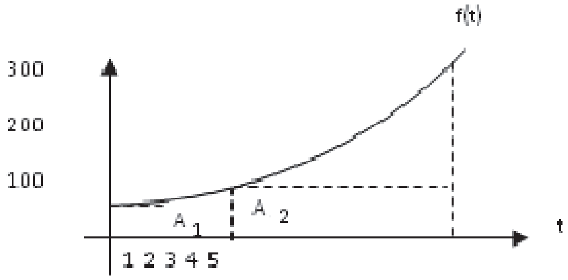
Supongamos que se nos ocurre elegir el siguiente conjunto de puntos: P = {0, 2, 5}. De esta forma el intervalo [0, 5] queda partido en dos subintervalos: [0, 2] y [2, 5], en cada uno de los cuales f alcanza un M_a y un m_a.

¿Cuáles son las aproximaciones por defecto y por exceso correspondientes a la partición del intervalo que hemos elegido? Utilicemos representaciones gráficas.



Visualizamos en la figura que el área que buscamos es menor que la suma de las áreas de los dos rectángulos que hemos llamado A_1 y A_2 , es decir:

$A < A_1 + A_2 = 2.140 + 3.350 = 1330$



Podemos observar en la figura que el área que buscamos es mayor que la suma de las áreas de los dos rectángulos que hemos llamado A_3 y A_4, es decir:

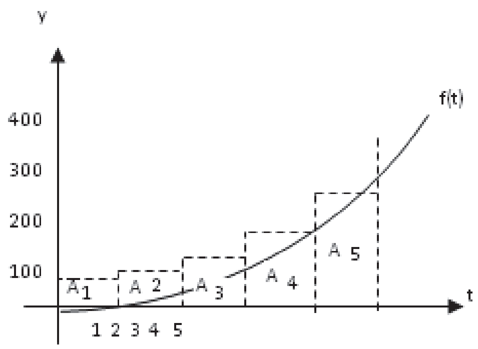
$A > A_3 + A_4 = 2.\ 100 + 3.140 = 620$

Las aproximaciones mejoraron. Ahora los números dicen: 620<A< 1330

¿Superaremos esta mejoría si ***agregamos*** *más puntos a la partición P={0, 2, 5}?*

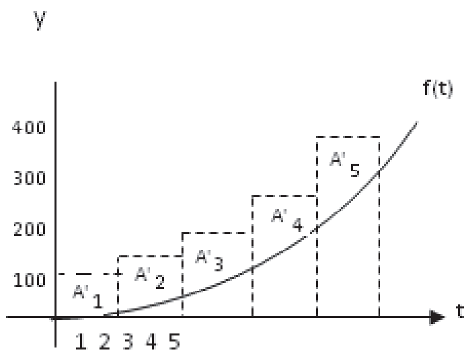
Por ejemplo, se nos ocurre elegir la "partición" del intervalo [0,5] determinada por el siguiente conjunto de puntos: P'= {0,1,2,3,4,5}.

Figura 1



$$\sum_{i=1}^{5} A_i = \sum_{k=0}^{4} 1.(100+10k^2) = \mathbf{800}$$

Figura 2



$$\sum_{i=1}^{5} A'_i = \sum_{k=1}^{5} 1.(100+10k^2) = \mathbf{1050}$$

Es evidente que mejoran las aproximaciones cuando se agregan puntos a una partición. Ahora los números dicen: 800 < A < 1050

Observemos que las aproximaciones por defecto y por exceso correspondientes a una partición P son sumas de áreas de rectángulos; las llamaremos suma inferior y suma superior y las simbolizaremos s_P y S_P respectivamente.

Cuando se agregan puntos a una partición P, se dice que la nueva partición P' que se obtiene es más fina que P, queriendo significar que con P' se afina o achica la diferencia entre la suma superior y la inferior: $s_P \leq s_{P'} < A < S_{P'} \leq S_P$. Esto nos lleva preguntarnos:

A medida que se van refinando las particiones, buscando lograr que las amplitudes de todos los intervalos vayan tendiendo a cero ¿tenderán ambas sumas a un único número? En este caso éste sería el área que buscamos.

Para encontrar la respuesta necesitamos una expresión general de ambas sumas. *¿Cómo expresamos s_P y S_P correspondientes a la partición P que divide al intervalo [0,5] en n subintervalos - y para simplificar el cálculo - de igual amplitud?*

Observemos que con esta partición, la base de cada rectángulo es $\frac{5}{n}$ y la altura de cada uno es $f(\frac{5}{n}k)$. Definimos entonces las sumas:

$$s_P = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{5}{n} f(\frac{5}{n}k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{5}{n}[100+10(\frac{5}{n}k)^2] \; ; \; S_P = \sum_{k=1}^{n} \frac{5}{n}.f(\frac{5}{n}k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{5}{n}[100+10(\frac{5}{n}k)^2$$

que llamaremos suma inferior y superior de Riemann relativas a la partición P.

Notar que si elegimos intervalos de igual amplitud, entonces tal amplitud tenderá a cero cuando el número de subintervalos tienda a infinito.

De esta forma, *si calculamos el límite de la suma inferior y de la suma superior de Riemann para n tendiendo a infinito y si ambos límites dan por resultado un mismo número, éste será el valor del área que buscamos***.**

$$\lim_{n\to\infty} s_P = \lim_{n\to\infty} [\frac{5}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}(100+10.(\frac{5}{n}k)^2)] = \lim_{n\to\infty} [\frac{5}{n}\sum_{k=0}^{n-1}100 + \frac{5}{n}\sum_{k=0}^{n-1}10.(\frac{5}{n})^2.k^2] =$$

$$\lim_{n\to\infty} [\frac{5}{n}.(n-1).100 + \frac{5}{n}.10.\frac{25}{n^2}\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}k^2}_{\text{suma de los cuadrados de los primeros (n - 1) números naturales}}] = \lim_{n\to\infty} [500(1-\frac{1}{n}) + \frac{1250}{n^3}\frac{(n-1).n.(2(n-1)+1)}{6}] = 916{,}99$$

En forma similar calculamos el límite de la suma superior, resultando:

$$\lim_{n\to\infty} S_P = \lim_{n\to\infty} [\frac{5}{n}\sum_{k=1}^{n}(100+10.(\frac{5}{n}k)^2] = 916{,}66$$

Ambos límites existen y son iguales, entonces se dice que la función f es integrable en el intervalo [0,5] y a este número se le llama integral definida de la función $f(t) = 100+10t^2$ desde cero hasta cinco y se indica con el símbolo:

$$\int_0^5 (100+10t^2)dt = 916{,}66$$

- [0,5] es el intervalo de integración.
- 0 y 5 son los límites inferior y superior de integración respectivamente.
- El valor de la integral coincide con el área por ser f una función continua y positiva en el intervalo de integración.

¿Le respondemos al fabricante?

"Se espera que los gastos de mantenimiento acumulados durante los primeros cinco años asciendan a 916,66 dólares".

Nota: Observar que el modelo matemático $\int_a^b (100+10t^2)dt$ nos resuelve el problema de estimar los gastos acumulados de mantenimiento en cualquier intervalo de tiempo [a,b] .

¿Y si hubiéramos elegido una partición que determinara subintervalos de diferentes amplitudes?

Entonces debemos tener cuidado: notar que cuando n tiende a infinito no necesariamente todas las amplitudes tienden a cero.

Pero si la amplitud del intervalo mayor determinado por la partición P tiende a cero, entonces todas las amplitudes tenderán a cero con él. Simbolizamos con δ la amplitud del mayor intervalo y la llamamos norma de la partición.

Entonces si hubiéramos elegido una partición que determinara subintervalos de diferentes amplitudes, cuando calculamos el límite de las sumas de Riemann debemos hacerlo para δ tendiendo a cero, en cuyo caso también n tenderá a infinito; sin duda que se complicará aún más el cálculo de la integral con las sumas de Riemann, y hay que estudiar propiedades de la integral definida que faciliten su cálculo.

Reflexionemos sobre los siguientes interrogantes:

¿Obtendríamos el mismo resultado si expresamos una suma de Riemann valorizando f en un punto cualquiera de cada intervalo en lugar de hacerlo en el M_a o en el m_a?

¿Si la función no fuera positiva y continua en el intervalo de integración, podría existir el límite de la suma de Riemann y por lo tanto la integral definida?

Siguiendo la misma metodología, se orientará al alumno para que pueda responder estas preguntas y llegar a enunciar la definición formal de Riemann de integral definida.

Conclusiones

Lo que se ha presentado es un análisis a priori de una Ingeniería Didáctica en el cual, las elecciones del profesor han buscado la construcción del concepto de integral definida según Riemann por el análisis de un problema, en una ventana conceptual que se nutre de los cuadros mencionados al comienzo y profundiza la vinculación con el concepto de límite de una función. El problema elegido, creemos que es adecuado para entender el concepto integral definida como los resultados acumulados de un proceso de cambios.

Agradecimientos

PICTO EDUCACIÓN 2005: La Educación Matemática como Ciencia de Diseño en la Formación Inicial Terciaria.

1 ECO 68: La Selección, Análisis, Producción y Evaluación del Material Didáctico para la Matemática Básica Universitaria en Carreras Profesionales.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). *El lugar de la didáctica en la formación de profesores.* México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Artigue, M., Douday, R., Moreno, I. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.* México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2), 165-198.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (1996). La Didàctique des Mathemàtiques en la formació del professorat. *Butlleti de la Societat Catalana de Mathemàtiques*, *11*(1), 33-45.

Chevalard,Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemática.* Barcelona: ICE-Horsori.

Wittmann, E. (1995) "Mathematics Education as a Design Science". *Educational Studies in Mathematics, 29*. pp. 355-274.