

IMPLICACIONES EPISTEMOLÓGICAS EN LA COMPRENSIÓN DE PROBABILIDAD EN TERCER GRADO DE SECUNDARIA

Saúl Elizarrarás Baena, Ana María Ojeda Salazar

Secretaría de Educación. GEM. Cinvestav. DME. IPN

elizarrarasaul@yahoo.com.mx, amojeda@cinvestav.mx

Campo de investigación: Pensamiento relacionado con probabilidad, estadística

México

Nivel: Básico

Resumen. Se presentan resultados de la aplicación de un cuestionario, antes y después de una enseñanza, diseñado para estudiar variaciones en los conocimientos de 40 alumnos de 13-15 años de edad, sobre los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad y probabilidad condicional. La estrategia de enseñanza puso en juego una propuesta institucional (SEP, 2006; Filloy et al, 2006); sin embargo, para remontar las dificultades de comprensión de ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) evidenciadas por los alumnos se requiere la implementación de una estrategia similar y un seguimiento a lo largo de toda la educación básica en estocásticos. Particularmente, conviene diseñar estrategias de enseñanza que presenten significativamente situaciones azarosas de manera sencilla y gradual.

Palabras clave: probabilidad, epistemología, cognición, secundaria

Introducción

Estudios previos (Elizarrarás, 2004; Vázquez, 2004; Carballo, 2004) pusieron de manifiesto que el predominio del pensamiento determinista coarta el desarrollo del pensamiento de lo *posible* de los alumnos de educación básica; por tanto, este último se promete más difícil en los niveles educativos medio superior y superior (Ojeda, 1994).

Elementos teóricos

La perspectiva de la investigación pone en juego aspectos epistemológicos y cognitivos sobre la comprensión de probabilidad de estudiantes de tercero de secundaria.

1.1. Epistemológicos. Heitele (1975) propone una lista de diez ideas fundamentales de estocásticos para un currículum en espiral: medida de probabilidad, espacio muestra, regla de la adición, regla del producto e independencia, equidistribución y simetría,

combinatoria, modelo de urna y simulación, variable estocástica, ley de los grandes números y muestra. Su carácter de fundamental radica en que proporcionan al individuo modelos explicativos en cada etapa de su desarrollo, que se diferencian en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración, pero no en su estructura. Señala también que la enseñanza de estocásticos debe iniciar tan pronto como sea posible, mediante el desarrollo de conexiones significantes de la experiencia del alumno con la realidad. Por otro lado, según Piaget e Inhelder (1951) la idea de azar no es innata, sino que se origina y evoluciona en correspondencia con las operaciones lógico-aritméticas, y se le advierte en el período de las operaciones formales (12-15 años), las cuales constituyen un sistema de acciones interrelacionadas siempre bajo un camino riguroso y reversible.

1.2. Cognitivos. Fischbein (1975) ha enfatizado que la adquisición temprana de intuiciones equivocadas sobre estocásticos se debe prevenir con la enseñanza, pues a falta de ésta se tornan de más en más difíciles de desarraigar y obstaculizan el pensamiento analítico y reflexivo. En su opinión, la coincidencia de la frecuencia relativa con la probabilidad de un evento requiere de tiempo, pues es paralela al desarrollo intelectual general (14-15 años aproximadamente). Esta declaración nos remite a Frawley (1999), quien considera al ser humano a la vez como máquina y como persona, pues la parte interna y la externa de la mente humana confluyen simultáneamente. De aquí que caracterice tres tipos de subjetividad: el procesamiento no consciente, la conciencia y la metaciencia.

Algunos estudios han señalado que el enfoque frecuencial de la probabilidad permite un acercamiento más natural hacia la idea de azar y, cuando se presenta la información numérica en formato de frecuencias (por ejemplo, en porcentajes) en lugar del formato estándar de probabilidad, se activa de manera natural el razonamiento probabilístico en los sujetos (Gigerenzer y Hoffrage, 1995).

Elementos de método

Este estudio es predominantemente de orden cualitativo (Eisner, 1998).

2.1. *Escenarios*. La investigación atendió a la *propuesta institucional* (plan y programas de estudio y libro de texto), al *aula* y al desempeño del *alumno*. En los dos últimos participó un grupo de 40 estudiantes (14-15 años) del tercer grado de secundaria pública; la investigación desarrollada en el primero proveyó de un referente para el diseño de la estrategia de enseñanza que se puso en juego en el segundo escenario.

2.2. *Criterios de análisis*. Los elementos teóricos devinieron criterios de análisis, tanto de programa de estudios y libros de texto como de datos recogidos. Se consideraron: ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos, recursos semióticos de la información, términos utilizados, situación planteada y estructura de la lección.

2.3. *Aula*. Este investigador, durante seis sesiones de 50 minutos cada una, utilizó cuatro lecciones propuestas para estocásticos en tercer grado de educación secundaria de un libro de texto (Filloy, et al, 2006), como parte de la estrategia de enseñanza que desarrolló de manera directa con el grupo de alumnos; el profesor titular sólo fue observador. Las sesiones fueron videograbadas y transcritas para su análisis posterior; en bitácora escrita se anotó información fuera de cinta y lo que se consideró conveniente señalar. La *estrategia de enseñanza*, basada en las lecciones, consistió en coordinar la lectura de cada una; los estudiantes leían en forma alternada y respondían preguntas planteadas en el texto; se confrontaron las respuestas incorrectas; las dificultades evidenciadas se fueron remontando conforme se iba avanzando en la lección. Sólo en dos sesiones se realizaron efectivamente ensayos independientes de Bernoulli (lanzamientos de dados) para dos de las lecciones, una de las cuales propone dos ruletas numeradas del uno al seis que se sustituyeron con dados.

2.4. Desempeño del alumno. Se aplicó un cuestionario previamente a las seis sesiones de enseñanza. Un mes después de la primera aplicación, se administró tal cual el mismo cuestionario, para identificar variaciones en el desempeño de los estudiantes.

El cuestionario consistió en cinco problemas para el enfoque clásico, uno sobre probabilidad condicional y cuatro sobre el frecuencial. Con formato de opción múltiple (cuatro opciones) para cada uno de los diez problemas planteados, se solicitó justificación escrita de cada selección realizada y se permitió la corrección de respuestas; su presentación insinuó la justificación en lengua natural. La contestación, individual, requirió de 60 minutos en su primera aplicación y de 80 minutos en la segunda. Se alternaron los problemas, de tal modo, que se presentaba uno referido al enfoque clásico y enseguida otro al frecuencial (por ejemplo, ver respectivamente problemas 1 y 2 en la Figura 1).

Las opciones propuestas en el problema 1 completan las posibilidades con las fichas de dominó: con el inciso **a** se consideraron respuestas incorrectas respecto al espacio muestra y combinatoria, por la influencia del uso de una tabla similar para el caso del lanzamiento de dos dados; con el inciso **b** (correcto) se consideró el evento que incluye todos los casos favorables en relación a los casos posibles; con el inciso **c** se previó la dificultad de considerar sólo de manera correcta a los casos favorables; y el inciso **d** manifiesta dificultades con las ideas de espacio muestra y combinatoria, que incluyen a una prevalencia de la operatividad aritmética. Para el problema 2, los incisos se propusieron por lo siguiente: el inciso **a** consideró respuestas que sólo toman en cuenta los partidos ganados, mientras que el inciso **b** tomó en cuenta las respuestas basadas exclusivamente en los partidos empatados; el inciso **c** (correcto) consideró los partidos empatados o ganados y en el inciso **d** sólo se consideraron los partidos perdidos.

1. Considerando las **28** fichas de un dominó con la cara de sus puntos hacia abajo. Completa la tabla para que identifiques todas las parejas ordenadas que corresponden a los puntos de sus fichas.

•	0	1	2	3	4	5	6
0							
1	(0, 1)						
2							
3				(3, 3)			
4			(2, 4)				
5					(4, 5)		
6	(0, 6)						(6, 6)

¿Cuál es la probabilidad de que al voltear una ficha al azar, la suma de sus puntos sea mayor a ocho?

A) $\frac{12}{36}$ B) $\frac{6}{28}$ C) $\frac{6}{25}$ D) $\frac{12}{49}$

¿Por qué?

2. En la gráfica siguiente se muestran los resultados obtenidos por el equipo de fútbol "Halcones" luego de que ha jugado 50 partidos:

Completa la gráfica y calcula: ¿cuál es la probabilidad de que en su siguiente juego **no** pierda el equipo "Halcones"? A) 44 % B) 40 % C) 84 % D) 16%

¿Por qué?

Figura 1. Ejemplos de problemas propuestos en el cuestionario.

Resultados del análisis de la propuesta institucional para probabilidad

La Tabla 1 presenta resultados del análisis de dos lecciones (63 y 64) del libro de texto citado como ejemplo del examen al que se sometió la propuesta institucional.

Tabla 1. Análisis de lecciones propuestas en el libro de texto (Filloy *et al.*, 2006).

Criterio	Ideas fundamentales	Otros conceptos matemáticos	Recursos semióticos de la información	Términos utilizados
Lección				
Lección 63	Medida de la probabilidad. Espacio muestra. Regla de la adición Regla del producto e independencia Equidistribución y simetría Combinatoria. Variable aleatoria, muestra y ley de los grandes números	Números naturales y racionales. Operaciones elementales de números racionales. Equivalencia y orden en las fracciones.	Tabla de doble entrada. Expresiones numéricas. Imágenes. Lengua natural	Frecuencia Probable, Eventos Enfoque clásico de la probabilidad. Oportunidades Ventaja, posibles resultados, azar, esperas.
Lección 64	Medida de la probabilidad. Espacio muestra. Regla de la adición Regla del producto e independencia Combinatoria. Variable aleatoria.	Números naturales. Operaciones con números naturales.	Tablas de doble entrada. Diagrama de árbol. Imágenes Lengua natural	Experiencia aleatoria. Fórmula clásica. Experiencias repetidas.

Las lecciones de probabilidad (Filloy *et al*, 2006) satisfacen los propósitos y contenidos del *Plan y Programas de Estudio de Matemáticas* (SEP, 2006). En general, están estructuradas a partir de una *introducción*, luego se plantea un problema o actividad para aplicar conocimientos previos (*Practico lo que he aprendido*), enseguida se trata el nuevo contenido (*Conozco más*) y, finalmente, se proponen algunos problemas distintos a la situación propuesta central (*Practico lo que aprendí*). De las lecciones empleadas, sólo una propone ensayos independientes mediante el uso de dados, sin pretender un análisis completo de las frecuencias absolutas y relativas obtenidas por los estudiantes.

Resultados de la enseñanza en aula

Algunas de las dificultades que evidenciaron los estudiantes respecto a la comprensión de ideas fundamentales fueron remontadas, incluso, desde su pleno y total desconocimiento

(según resultados de la primera aplicación del cuestionario), como en el caso del predominio de la operación aritmética sobre la distinción entre espacio muestra y los valores respectivos de la variable aleatoria:

I: Escriban (sobre las líneas) por qué los jóvenes no pueden ganar el premio más caro.

A: Porque tienen que atinarle dos veces al "seis" o dos veces al "uno" y son cuatro posibilidades de doce.

I: ¿Por qué son cuatro posibilidades de doce?

A: Porque sería uno y uno, y seis y seis.

I: ¿Cuántas posibilidades son?

A: ... ¡Ah, no! ¡Veinticuatro!

Una dificultad para la enseñanza fue la nula comprensión de los alumnos del cálculo de la frecuencia relativa para estimar la probabilidad de eventos. Los estudiantes, desde un principio, manifestaron poca familiaridad con el llenado de tablas y gráficas. Para la última sesión, 10 alumnos todavía tenían dificultades para completar una tabla de doble entrada, de los cuales dos también activaron un razonamiento aritmético y con ello evidenciaron dificultades con la idea de espacio muestra (ver Figura 2).

E S T R E L L A							
H	+	1	2	3	4	5	6
X	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
E	2	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(2,7)
X	3	3,3	(3,4)	(3,5)	(4,3)	(3,6)	(2,7)
Á	4	4,4	(3,5)	(3,4)	(3,6)	(3,7)	(3,8)
G	5	5,5	(2,5)	(5,6)	(5,7)	(5,8)	(6,5)
O	6	6,6	(3,6)	(5,7)	(5,8)	(5,9)	(6,6)

E S T R E L L A							
H	+	1	2	3	4	5	6
X	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
E	2	(2,1)	2,1	(2,3)	2,4	(5,2)	2,6
X	3	(3,1)	3,2	(3,3)	(4,3)	3,5	3,6
Á	4	(4,1)	4,2	(3,4)	4,4	4,5	4,6
G	5	(5,1)	(2,5)	5,3	5,4	5,5	(6,5)
O	6	(6,1)	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Figura 2. Ejemplos de dificultades mostradas por los estudiantes al completar una tabla de doble entrada.

Resultados generales del cuestionario

En general, en la *primera aplicación* los alumnos evidenciaron dificultades para completar tablas como las que se propusieron en el cuestionario; sólo tres alumnos (15 %) consideraron correctamente los datos proporcionados en la tabla e identificaron las parejas ordenadas que conformaban el espacio muestra. En la *segunda aplicación*, de los ocho alumnos (20 %) que contestaron correctamente el problema 1, sólo cuatro completaron correctamente la tabla proporcionada y dieron evidencias de su dominio de las ideas fundamentales implicadas en la situación propuesta; otros cuatro completaron incorrectamente, pero su respuesta fue correcta. Las Figuras 3 y 4 muestran los resultados obtenidos con el cuestionario de ambas aplicaciones.

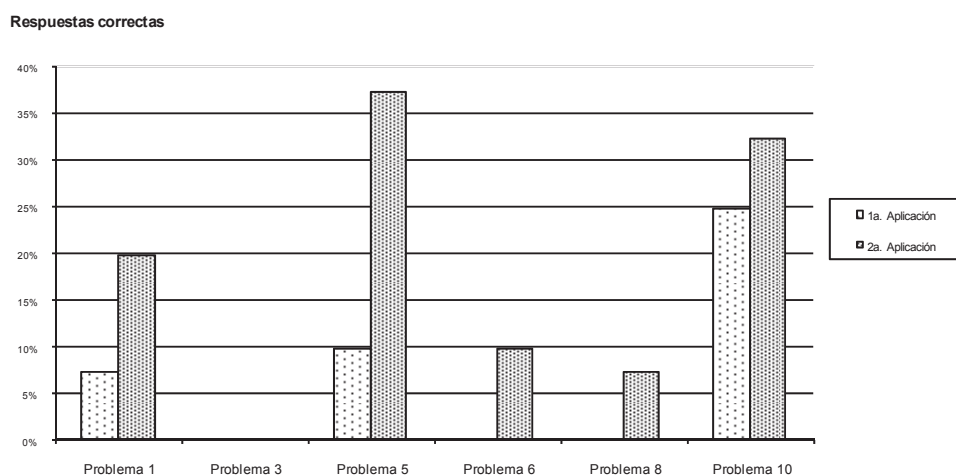


Figura 3. Resultados obtenidos en el enfoque clásico (antes y después de la enseñanza).

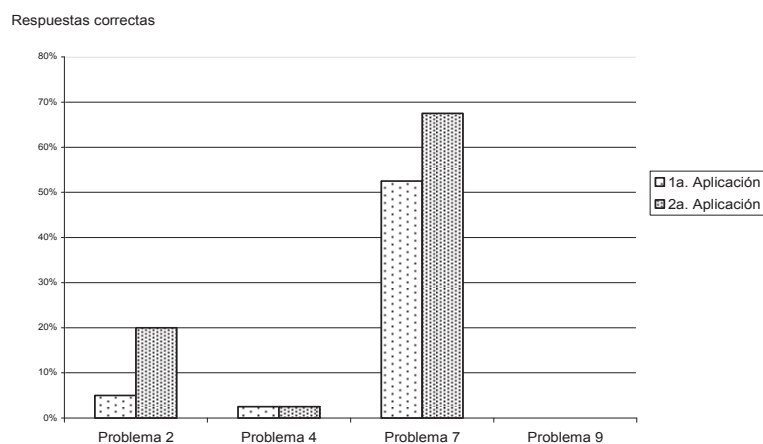


Figura 4. Resultados obtenidos en el enfoque frecuencial (antes y después de la enseñanza).

Para el problema 2, hasta la segunda aplicación sólo cuatro alumnos (10 %) proporcionaron una respuesta correcta fundamentada en la complementación de la gráfica presentada; otros cuatro estudiantes (10 %), aunque también respondieron correctamente, no completaron la gráfica. En la segunda aplicación, diez alumnos (25 %) completaron la gráfica correctamente, pero su respuesta fue incorrecta; mientras que, en la primera aplicación, la completaron incorrectamente.

Comentarios generales

La enseñanza y el tratamiento del enfoque frecuencial pudo haber contribuido para que en la segunda aplicación del cuestionario, los alumnos sistematizaran sus respuestas al completar tablas por su inclusión en lecciones; además, algunos alumnos, aunque no lograron completar las tablas de manera correcta, en la primera aplicación ni siquiera identificaban la información requerida. La enseñanza de probabilidad en el aula ofrece la oportunidad para aplicar otros contenidos de las distintas áreas del programa, ya sea

geometría o aritmética, pero se requiere conservar en primer plano la idea de azar y las de estocásticos implicadas (Heitele, 1975).

Se tuvo como principal limitación el desarrollo de sólo cuatro lecciones del libro de texto empleado como medio de enseñanza, las cuales se desarrollaron en seis sesiones en un período corto de un mes. La problemática compleja que reviste el tratamiento de estocásticos en la educación básica requiere realizar un estudio más amplio en cuanto al número de sesiones y de lecciones que se pongan en práctica, de tal manera que se pueda proveer a los alumnos de más elementos de estocásticos en su formación. También es necesario un seguimiento de los estudiantes y la realización de estudios clínicos.

Referencias bibliográficas

Carballo, M. T. (2004). *Estocásticos en el Segundo Ciclo de la Educación Primaria: Determinismo y Azar*. Tesis de maestría. Cinvestav-IPN, México.

Eisner, E. (1998). *El ojo ilustrado. Indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa*. Paidós, España.

Elizarrarás, S. (2004). *Enseñanza y comprensión del enfoque frecuencial de la probabilidad*. Tesis de maestría. Cinvestav-IPN, México.

Filloy, E., Rojano, T., Figueras, O., Ojeda, A. M. & Zubieta, G. (2006). *Matemática Educativa, primer grado*. Mc Graw Hill, México.

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Reidel, Holland.

Frawley, W. (1999). *Vygotsky y la ciencia cognitiva*. (Trad.: Arnáiz, V. M.). Paidós, España.

Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to Improve Bayesian Reasoning Without Instruction. Frequency Formats. *Psychological Review*, 102, pp. 684-704. APA, USA.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Stochastic Fundamental Ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, pp. 187-205.

Ojeda, A. M. (1994). *Understanding Fundamental Ideas of Probability at Pre-university Levels*. Ph.D. Thesis. King's College London. U. K.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1951). *La Génèse de l'Idée de Hasard Chez l'Enfant*. PUF, París.

SEP (2006). *Programas de Estudio 2006. Educación básica. Secundaria*, México.

Vázquez, O. (2004). *Enseñanza y comprensión del enfoque clásico de la probabilidad en primer grado de secundaria*. Tesis de maestría. DME, Cinvestav IPN. México.