UN ESTUDIO INTERPRETATIVO SOBRE ERRORES DETECTADOS EN ALUMNOS UNIVERSITARIOS AL CALCULAR INTEGRALES

Raúl Katz, Natalia Sgreccia
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA) de la Universidad Nacional de Rosario — Argentina
rdkatz@fceia.unr.edu.ar; sgreccia@fceia.unr.edu.ar
Campo de investigación: Gráfica y funciones — Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo se avanza sobre estudios exploratorios anteriores acerca de las dificultades en el aprendizaje de integrales que permiten calcular el volumen de un sólido de revolución. Se realiza a partir del análisis de producciones escritas de alumnos que han cursado Análisis Matemático II (AM II) en carreras de Ingeniería de la FCEIA de la UNR. Se complementa con lo relevado en entrevistas realizadas a algunos de los alumnos. Como marco de referencia se consideran los conceptos de visualización; situaciones didácticas; distinción entre ejercicios y problemas; obstáculos didácticos y epistemológicos. Además anteriormente se efectuó un análisis de la secuencia didáctica del libro de texto. Es un estudio interpretativo porque, luego de describir y ubicar las variables, se procede a relacionarlas, con la intención de explicar parcialmente la problemática detectada.*

Palabras clave: cálculo de volumen, sólido de revolución, dificultades, visualización

Introducción

El trabajo se focaliza en la descripción de algunos errores que aparecen en el cálculo del volumen que genera una región del plano al girar alrededor de una recta paralela a uno de los ejes coordenados. Las evaluaciones que corresponden a un primer parcial de la asignatura -que comprende la integral definida y sus aplicaciones al cálculo de áreas, longitudes y volúmenes- constituyen los únicos documentos escritos que se consideran en este estudio. Por lo general estas evaluaciones se llevan a cabo a un mes y medio de iniciado el cursado de la asignatura AMII, de régimen cuatrimestral. Los contenidos se desarrollan siguiendo los lineamientos del libro "Cálculo" de J. Stewart (1999), que se constituye en una ayuda tanto para el docente como para el alumno, resultando para este último un material didáctico de referencia, ya utilizado en Análisis Matemático I.

Los autores del presente trabajo, movilizados por la dificultad percibida en el tratamiento del tema, intentan comprenderla para idear propuestas de superación.

En relación a la metodología del estudio

El estudio combina e integra los enfoques cualitativo y cuantitativo, es de tipo mixto (Hernández Sampieri, Fernández Collado & Baptista Lucio, 2003).

La muestra está constituida por 46 resoluciones de evaluaciones parciales de alumnos que estaban cursando la asignatura AMII en la FCEIA en el segundo cuatrimestre del año 2005. Los autores no fueron los docentes de dichos alumnos.

Se describen algunos errores prototípicos de la muestra y luego se avanza hacia un alcance interpretativo co-relacional con la intención de aproximar explicaciones e interrogantes sobre la problemática detectada. Este análisis interpretativo se complementa con interacciones personales (entrevistas) con algunos de los alumnos.

Se focaliza la mirada en el ejercicio que hace referencia al cálculo del volumen de un sólido de revolución. En un principio, en su versión no estándar (cuando el eje de rotación es paralelo a uno de los ejes coordenados) y, posteriormente, en una versión estándar (cuando el eje de rotación coincide con uno de los ejes coordenados).

A continuación se presentan las propuestas (ítem i: caso estándar; ítem ii: caso no estándar) del ejercicio cuyas resoluciones constituyen la fuente de análisis del presente trabajo.

> Sea Q la región del plano limitada por el eje x y el arco de curva de ecuación $xy = 1$ con $x \in [1; 4]$. Dibuje la región Q y calcule el volumen que se obtiene al girar la región Q: **i.** alrededor del eje x; **ii.** alrededor de la recta de ecuación $x = 5$.

Marco teórico de referencia

Según Garret (1987, citado en Johsua y Dupin, 2005), a la clásica distinción entre verdaderos “problemas” y simples “ejercicios” convendría agregar la noción de problema "local", problema "para el alumno", en el límite, evolutivo, de los dos polos extremos. Los autores denominan a esta noción como *ejercicios con dificultades implícitas* y son los que a priori se aproximan a los "ejercicios tipo" adecuados al contrato, pero que provocan una tasa de fracasos inesperada debido a la presencia de un "desvío" con respecto al ejercicio tipo del profesor y que crean confusión en muchos alumnos caracterizada por el insuficiente dominio de los conceptos, la fragilidad en el procedimiento algebraico y la falta de habilidad para reencontrar la ruta indicada en el ejemplo tipo del profesor. Los autores del presente trabajo consideran al ejercicio en estudio (particularmente el ítem ii correspondiente al caso no estándar) como un ejercicio con dificultades implícitas.

En Matemática se utilizan diferentes representaciones que requieren del proceso de *visualización*, el cual se concreta en dos direcciones: por un lado, la interpretación y la comprensión de modelos visuales y, por otro, la habilidad para traducir a imagen visual una información recibida en forma simbólica. Se considera que el alumno debe aprender a ver y a interpretar. Se coincide con Zaskis, Dubinsky & Dautermann (1996, citado en Villella, 2001: pp. 105-106) al pensar que

> *La visualización es una acción en la que los individuos establecen una fuerte concesión entre construcciones internas y algo que les aportan los sentidos. La concesión puede ser hecha en una de las dos direcciones. Un acto de visualización consiste en una construcción mental de los objetos o de los procesos que un individuo asocia con objetos o con eventos percibidos en el exterior. O bien puede consistir en la construcción sobre un elemento externo como puede ser papel, pizarrón, computadora, pantalla de objetos o eventos que se identifican como propios de su mente.*

En el trabajo de elaboración científica de los procesos de aprendizaje se va superando obstáculos permanentemente. Desde la alternativa constructivista se pone al alumno en situación de producir conocimientos reformulando y hasta luchando contra conocimientos antiguos. Brousseau (1988, citado en Johsua y Dupin, 2005) insiste sobre la posible naturaleza didáctica de ciertos obstáculos, como resultado artificial de decisiones didácticas desafortunadas, los cuales deben distinguirse de los obstáculos epistemológicos, cuya existencia en el proceso histórico de producción matemática está probada. La presencia de obstáculos epistemológicos en el acto educativo es inevitable; más que pensar en ignorarlos, negarlos o destruirlos, hay que idear estrategias -encuadradas en situaciones didácticas específicas- para superarlos, porque la progresión cognitiva del alumno se logra a través de superaciones y reacomodaciones.

Algunas cantidades. De 46 alumnos, con respecto al ítem:

i	44 alumnos lo resuelven bien (96%)	2 lo hacen mal (4%)
ii	6 alumnos lo resuelven bien (13%)	40 lo hacen mal (87%)

En relación a los errores detectados. Si bien los alumnos grafican correctamente la región Q del plano, en la mayoría de sus resoluciones se observa una diversidad de errores, que se constituyen en el objeto de estudio del presente trabajo.

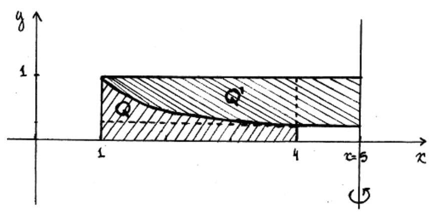
Se presenta en forma contigua tanto la resolución correcta como la resolución incorrecta de algunos alumnos, por considerar que la primera facilita la interpretación de la segunda.

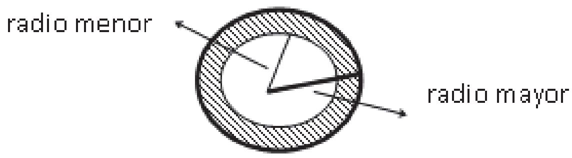
En lo que sigue se muestra el cálculo correcto del volumen del sólido de revolución cuando la región Q gira alrededor del eje x = 5.

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{4}}\left[(5-1)^2-(5-4)^2\right]dy+\pi\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left[(5-1)^2-\left(5-\frac{1}{y}\right)^2\right]dy$$

En función de los errores encontrados, se establecen tres grupos de resoluciones con peculiaridades afines y se muestran ejemplos representativos de cada uno de ellos.

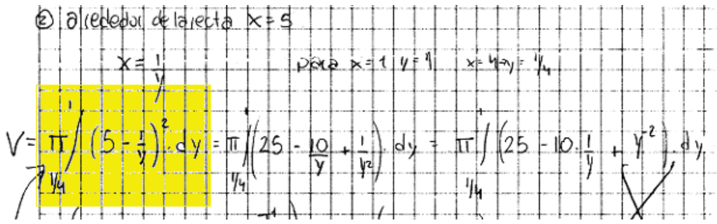
Grupo A: El volumen que calculan corresponde a un sólido que se genera a través de una región Q’. Esta región Q’ es excluyente con Q y su frontera tiene contacto con el eje de rotación.





El radio de cada una de las secciones del sólido generado por Q’ coincide con el radio menor de la corona, sección del sólido cuando se considera la región Q.

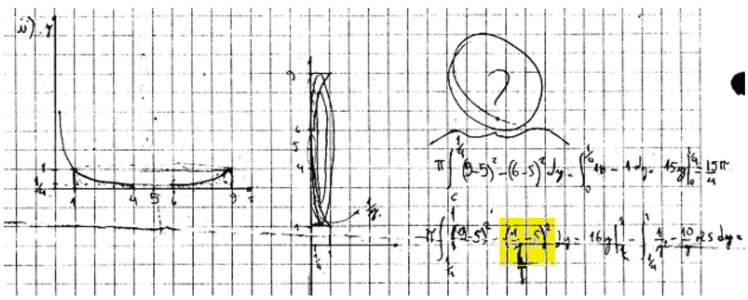
(El círculo de radio menor es la sección de considerar Q’. La corona es la sección de considerar Q). En lo que sigue se muestra una resolución incorrecta de este grupo.



En este grupo se evidencian dificultades en la visualización de la verdadera región Q.

Grupo B: En este grupo se encuentran aquellas resoluciones que buscan encuadrar el problema en un caso estándar, pero desatendiendo ciertas consideraciones que derivan en errores. Transforman el problema en otro que suponen equivalente al dado y no lo es.

Dentro de este grupo, se ha seleccionado la siguiente resolución:

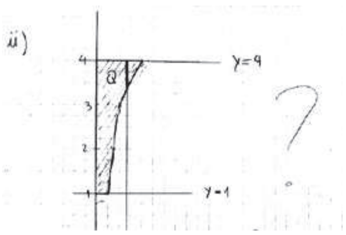


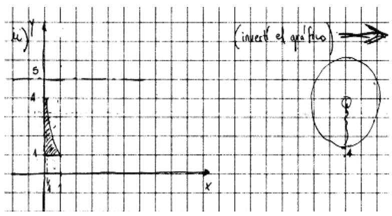
En la misma se observa que el alumno considera la región simétrica a la región Q respecto de la recta de ecuación x = 5, pero no efectúa la transformación en la ley de la función.

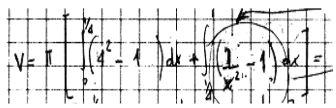
En este grupo se evidencia una falta de superación del obstáculo que supone el trabajo del caso estándar al caso no estándar.

Grupo C: En este grupo se encuentran las resoluciones de los alumnos que creen que regiones congruentes generan el mismo volumen independientemente de su posición con respecto a los ejes de rotación.

En lo que sigue se muestran dos intentos de resoluciones incorrectas de este grupo.







Este grupo no logra visualizar las diferencias de los sólidos, y por lo tanto de sus volúmenes, que se obtienen al rotar regiones planas congruentes sobre distintos ejes.

En relación a las entrevistas con alumnos. A continuación se transcriben algunas de las declaraciones de los alumnos entrevistados.

“Es lo primero que se me vino a la mente”. “Tendría que haber marcado cuál era la región que tenía que girar”. “Es costumbre, la mayoría de los ejercicios son girando alrededor de los ejes coordenados”. “Al principio buscaba el método rápido, luego fui practicando”. “Lo tomé como fórmula y luego ‘a trabajar’”. “Cuando empezaron a aparecer ejes distintos a los coordenados me empecé a preocupar un poco más por cómo cambiaba la fórmula”. “Alguna vez supe de dónde venía esta integral, ahora no lo sé”. “Estudio un poco de fundamento y me centro mucho más en la práctica, la leo, anoto lo más importante (el resultado final) y luego hago la práctica”

En general, las declaraciones de los alumnos sugieren que las dificultades no son propias de este tema, sino más bien de su actitud de estudio independientemente del tópico específico.

*Algunas primeras reflexiones***.** Se observa que los alumnos suelen expresar el radio de la sección restando el radio mayor del radio menor de la corona. Si bien esta situación aún no se encuadra bajo un prototipo o grupo de error, abre un nuevo interrogante a tenerse en cuenta en futuras ampliaciones de este estudio: ¿por qué los alumnos expresan el radio de la sección de este modo? Cabe señalar que, como la diferencia entre los radios aparece luego elevada al cuadrado, el resultado final no se ve afectado, pero podría no corresponderse con una visualización apropiada de la sección.

Se observa, además, que en general los estudiantes resuelven bien la parte de radio constante, no así la de radio variable. ¿Cómo explicar esta dificultad de abstraer a un nivel ligeramente superior?, ¿se trata sólo de un obstáculo epistemológico?, ¿o quizá esto evidencia una falta de propuestas didácticas intencionadas que inviten a los alumnos a luchar contra sus conocimientos antiguos (vinculados más bien con el caso estándar)? En este sentido, ¿se está en presencia de obstáculos didácticos?

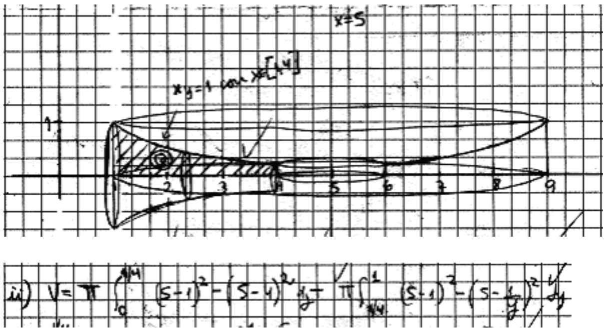
Por otro lado, una mirada holística de las resoluciones sugiere que los alumnos tienen menos dificultades al calcular el volumen cuando la región gira alrededor del eje x que cuando lo hace alrededor del eje y. Se conjetura al respecto que la costumbre de trabajar con funciones de variable independiente x, por una parte, y los ejemplos del libro que, en el caso no estándar, consideran únicamente los sólidos generados por regiones que giran alrededor de ejes paralelos al eje x, por la otra, son determinantes de nuestra sospecha.

En términos generales los alumnos se manifiestan activamente en el hacer, pero queda el interrogante de cuál es la vinculación -que ellos han construido en su red cognitiva- entre sus procedimientos y los conceptos involucrados. La información recogida a partir de lasentrevistas realizadas no ha otorgado respuestas alentadoras al respecto.

En relación a las resoluciones correctas

En cinco de las seis resoluciones correctas de la muestra, los alumnos, para efectivizar el cálculo de la integral, apoyan su razonamiento en un esquema gráfico, donde destacan la región que resulta de seccionar el sólido con planos perpendiculares al eje de rotación.

¿Puede interpretarse esta representación gráfica como una visualización de la integral como el límite de la suma de los volúmenes de cilindros? A la derecha se muestra una resolución correcta donde se utilizan representaciones gráficas



En la resolución correcta restante, donde no se observa esquema gráfico alguno, el alumno hace coincidir el eje de rotación de ecuación x = 5 con un eje coordenado de un nuevo sistema de referencia, transformando adecuadamente las ecuaciones de las curvas que delimitan la región Q. En este caso se observa la priorización de un procedimiento algebraico que convierte al problema al caso estándar.

En relación al caso estándar

A medida que se avanzó en el estudio, surgió el interrogante de cómo habían procedido los alumnos en el ítem i de la evaluación, el cual se corresponde con el caso estándar. En este apartado, salvo dos alumnos (3%), todos resuelven correctamente el problema. En cuanto a los recursos utilizados se encuentran:

- quienes sólo aplican la fórmula para el cálculo (26 alumnos, 57%);
- quienes representan el sólido generado (9 alumnos, 20%);
- quienes representan el sólido, destacando las secciones (9 alumnos, 20%).

¿Puede la omisión gráfica devenir de la simplicidad intrínseca de la situación? Es decir, en este caso, ¿no se necesitaba del soporte concreto de un gráfico para lograr la visualización?

El error que cometen los dos alumnos anteriormente señalados es no elevar al cuadrado la función integrando. Esto significa que el resultado que obtienen al integrar está en unidades al cuadrado y no cúbicas como corresponde. ¿Es sólo una omisión, una distracción?, ¿o indica que el alumno no está concibiendo el cálculo desde su fundamentación? Se considera que este tipo de error se da en aquellos alumnos que priorizan procedimientos de cálculo, algoritmos, en desmedro del desarrollo de estructuras conceptuales.

Algunos comentarios e interrogantes a modo de síntesis

Por lo general, los alumnos que se equivocan no realizan una representación gráfica pertinente del sólido de revolución, situación que, se supone, contribuiría a la visualización de la situación y al planteo correcto de la integral. Los alumnos con mejor desenvolvimiento acompañan la resolución con un soporte gráfico adecuado (que no se restringe a la región Q). Que un alumno apele al recurso gráfico, ¿es un indicador de comprensión conceptual?, ¿está dando cuenta que visualiza el volumen del sólido como límite de la suma de los volúmenes de cilindros?, ¿significa la presencia de distintos registros semióticos a disposición del alumno?, ¿o constituye quizá una mera rutina?, ¿o cierta dependencia a este tipo de representaciones?

Cabe resaltar que mientras, en una cantidad significativa de alumnos, la representación gráfica del sólido no presenta dificultades, la expresión del radio sí las presenta, lo cual da cuenta de una falta de correspondencia entre ambos registros de representación, generando interrogantes como por ejemplo, ¿cuáles aspectos de una representación estarían favoreciendo un apropiado proceso de visualización? Asimismo, la omisión del recurso gráfico frente al cálculo se interpreta como una tendencia a aplicar únicamente una fórmula, cuya validez por lo general es objeto de escasa reflexión, como se constató en las entrevistas, la cual se afianza mediante prácticas estandarizadas de ejercicios de fijación.

En el intercambio áulico, ¿cómo generar instancias que propicien la reflexión continua sobre la génesis de las fórmulas, superando una mera aplicación de las mismas? Tanto en la enseñanza como en el aprendizaje, ¿se pone más énfasis en el caso estándar?, ¿se trabaja más con regiones ubicadas en el primer cuadrante?

Como casi todos los alumnos de la muestra resuelven correctamente el caso estándar e incorrectamente el caso no estándar, ¿se puede considerar al cálculo del volumen de un sólido de revolución un tema aprendido?, ¿o esto insinúa que queda una versión superficial, sin movilidad, del concepto, atado a la primera versión que el alumno vio en clase?

En la búsqueda de respuestas al interrogante: ¿cuáles estrategias didácticas específicas podrían contribuir al desarrollo conceptual que supere el mero tratamiento estándar, tipo receta?, nos preguntamos: ¿cuáles serían las situaciones didácticas que favorecerían a la conceptualización del tema?, particularmente ¿cuáles estrategias específicas estarían contribuyendo a la superación de los obstáculos que involucra el tránsito del caso estándar al no estándar?

Consideramos que la construcción de conocimiento matemático puede lograrse cuando el individuo es capaz de reconocer el mismo objeto por lo menos en dos representaciones distintas, cuando puede transitar libremente de un modo de resolución algebraico a su correspondiente representación gráfica y viceversa. Creemos que se deberían generar, desde los momentos de enseñanza en la clase, reflexiones sobre el tema ante situaciones distintas sin llegar a caer en la explicitación de todos los casos, lo cual provocaría una mecanización mediante una vinculación estímulo-respuesta. Las interpretaciones e interrogantes que se formulan constituyen un punto de partida para futuras indagaciones, tendientes a la búsqueda de situaciones didácticas que contribuyan, desde su intencionalidad, a poner el acento en aquellos aspectos en los cuales se encontraron dificultades.

Referencias bibliográficas

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., Baptista Lucio, P. (2003). *Metodología de la investigación* (3° ed.). México DF: Mc Graw Hill.

Johsua, S., Dupin, J. (2005). *Introducción a la Didáctica de las Ciencias y la Matemática.* Buenos Aires: Colihue.

Stewart, J. (1999). *Cálculo. Trascendentes tempranas* (3° ed.). México: Thomson.

Villella, J. (2001). *Uno, dos, tres. Geometría otra vez.* Buenos Aires: Aique.