ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE LA FUNCIÓN A PARTIR DE LA DERIVADA. ANÁLISIS DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA

Adriana Engler, Silvia Vrancken, María Inés Gregorini, Daniela Müller, Marcela Hecklein, Natalia Henzenn.
Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral Argentina
aengler@fca.unl.edu.ar
Campo de investigación: Pensamiento variacional Nivel: Medio, Superior

Resumen. *La preocupación por mejorar el aprendizaje del cálculo en una carrera universitaria no matemática conduce a la reflexión sobre las metodologías empleadas para su enseñanza. Por esto, desde hace tiempo trabajamos en el proyecto de investigación "Errores y dificultades: organizadores didácticos en el aprendizaje del cálculo en carreras no matemáticas". En el marco del mismo diseñamos una secuencia de actividades para favorecer el desarrollo del pensamiento variacional y sus aplicaciones en el estudio del comportamiento de funciones. Nos propusimos afianzar la relación derivada-función-función derivada. Presentamos los resultados de su implementación y describimos los principales errores y dificultades detectadas.*

Palabras clave: función, comportamiento variacional, derivada, estudio de funciones

Introducción

No es sencillo para los estudiantes entrar en el campo conceptual del Cálculo. Su aprendizaje trae aparejado numerosas dificultades relacionadas con un pensamiento de orden superior. Artigue (1995) manifiesta:

> *"Numerosas investigaciones realizadas muestran, con convergencias sorprendentes, que si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y primitivas y a resolver algunos problemas estándar, se encuentran grandes dificultades para hacerlos entrar en verdad en el campo del cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de este campo de las matemáticas" (p. 97).*

Se supone que los alumnos fracasan por no llegar con una preparación adecuada, no saben álgebra, no conocen las propiedades de los números, las características de las desigualdades y no saben geometría. Sin embargo, pueden tener todos estos conocimientos y aún fracasar o evidenciar serias dificultades. Generalmente las imágenes previas del concepto existentes en su mente interfieren inevitablemente generando obstáculos al mezclarse con las nuevas imágenes adquiridas, impidiendo el desarrollo de la comprensión completa del nuevo concepto. Cantoral & Mirón (2000 c.p. Zuñiga, 2007), señalan:

> *"la enseñanza habitual del análisis matemático logra que los estudiantes deriven, integren, calculen límites elementales sin que sean capaces de asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas en su comprensión. De modo que aún siendo capaces de derivar una función no puedan reconocer en un cierto problema la necesidad de una derivación" (p.150).*

Es esta realidad la que nos lleva a revisar lo que hacemos desde la enseñanza considerando lo que nuestros alumnos conocen, las dificultades que enfrentan y los errores. Trabajamos desde hace tiempo en el proyecto "Errores y dificultades: organizadores didácticos en el aprendizaje del cálculo en carreras no matemáticas". Durante la investigación comenzamos a diseñar, poner a prueba y evaluar secuencias didácticas articuladas en torno a diferentes organizadores. En primer lugar tuvimos en cuenta los errores y dificultades en el aprendizaje así como los obstáculos que se plantean o detectan para cada concepto. En segundo lugar, las distintas representaciones de los conceptos involucrados y por último la evolución histórica y epistemológica de los mismos. Con estas secuencias buscamos que tanto docentes como alumnos profundicen su propio proceso de comprensión y entendimiento de los conceptos y procesos matemáticos en relación a los contenidos abordados.

Teniendo en cuenta que el concepto de función es unificador en matemática y uno de los que más dificultades genera a la hora de aprender, realizamos un trabajo profundo en relación al mismo. Las funciones se utilizan como modelos de situaciones del mundo real, incluyendo aquellas que son resultado del avance tecnológico, y tienen enorme aplicación a la descripción de fenómenos físicos. Farfán (1992), asegura que, entre las causas que hacen de la función uno de los conceptos matemáticos más difíciles están las diversas concepciones y múltiples representaciones de ésta, más teniendo en cuenta que la enseñanza tiende a sobrevalorar la algoritmización y los métodos analíticos por encima del desarrollo de habilidades propias del pensamiento matemático. Las funciones cambian de maneras muy diferentes y para entender su comportamiento se debe comprender cómo cambian y determinar cuánto cambian. La derivada está estrechamente ligada con la cuantificación de los cambios y el comportamiento de estos.

Desde la perspectiva de la Matemática Educativa este trabajo se enmarca en el “enfoque variacional”, línea de investigación introducida por un grupo de investigadores de México. Cantoral (1991, c.p. Dolores, 2007) “propone rediseñar el discurso matemático escolar desde el fondo, cambiando el papel principal que los cursos de cálculo confieren al concepto de límite y poniendo en su lugar a la variación física…” (p.195) y expresa además:

> *“…en el terreno de la enseñanza, tendemos hacia la reconstrucción de una Didáctica del Cálculo basada en las intuiciones y vivencias cotidianas de los sujetos, mediante acercamientos fenomenológicos, por lo que se atiende más al fenómeno en su relación con el concepto matemático que al concepto per se” (p.195).*

En este artículo presentamos y analizamos una situación de aula que diseñamos y pusimos a prueba para favorecer el desarrollo del pensamiento variacional y su relación con el estudio del comportamiento de funciones. Corresponde al tema “Estudio de funciones” del programa analítico de Matemática II de la carrera Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral. En la misma se favorece la utilización de diferentes sistemas de representación y el paso de uno a otro. Bajo la premisa de una enseñanza activa nos propusimos afianzar la relación derivada-función-función derivada.

Desarrollo de la propuesta

El trabajo se basa en la propuesta de Dolores (1999) que busca desarrollar ideas variacionales para la comprensión de los conceptos fundamentales y se apoya en actividades que sugieren introducciones intuitivas e informales antes de abordar el desarrollo del tema desde una perspectiva lógico-formal. El mismo Dolores (2007) recomienda "ubicar como eje rector de todo el curso de Cálculo Diferencial al estudio de la variación, de modo que la derivada no sea un concepto matemático abstracto sino un concepto desarrollado para cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica".

Los alumnos ya habían estudiado funciones y valorado la utilización de diferentes representaciones. En esta oportunidad se busca que puedan construir relaciones entre el concepto de derivada y el comportamiento de una función. Para la preparación de las diferentes actividades se tuvieron en cuenta contenidos ya trabajados: razón de cambio media, razón de cambio instantánea, la definición de derivada, la función derivada, la interpretación geométrica de la derivada, las reglas de derivación y la relación de derivabilidad y continuidad.

En los diferentes ítems propuestos se favorece el trabajo en forma verbal, tabular, numérica, analítica y grafica. La guía se propuso a todos los alumnos inscriptos en Matemática II que estaban presentes en una clase habitual, en grupos de a dos integrantes, antes de comenzar a desarrollar el tema del programa analítico "Estudio de funciones".

Las actividades se corrigieron colocando: una tilde (✓) al correcto, una cruz (x) al incorrecto, la palabra incompleto y una marca horizontal pequeña (–) si no lo resolvían. Se hicieron algunas acotaciones y observaciones escritas en los casos que se consideró necesario. En una clase posterior se les devolvió, a cada uno de los grupos, su producción y, resolviendo en forma conjunta cada una de las actividades propuestas, se fueron desarrollando los distintos contenidos: valores extremos de una función, función creciente y decreciente, determinación de extremos relativos y concavidad.

En términos metodológicos el trabajo se desarrolló en tres momentos: el diseño de las actividades a incluir (según revisión bibliográfica realizada y, desde la práctica docente, dificultades y errores observados en trabajos recogidos de años anteriores), la resolución de las actividades y la utilización de las respuestas (con sus logros, dificultades y errores) para el desarrollo de los contenidos y la puesta en común de conclusiones. Desde el equipo docente, se analizaron y valoraron los resultados obtenidos a fin de favorecer la toma de decisiones en acciones futuras.

Presentación de algunas actividades y análisis de los resultados más importantes

Se obtuvieron un total de setenta y dos trabajos. Se enuncian a continuación algunas de las actividades propuestas (de un total de diez) y se presenta el análisis de las producciones realizadas por los alumnos.

(Sólo se incluyen algunas actividades. La guía completa se puede solicitar a los autores.)

Actividad 1

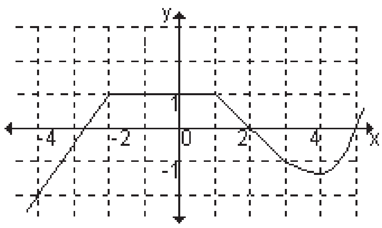
La gráfica muestra el comportamiento de la función $y = f(x)$. Analice la gráfica y conteste:

a) ¿Cuánto cambia f si x cambia de –4 a –2?

b) ¿Cuánto cambia f si x cambia de 2 a 3?

c) ¿Cuánto cambia f si x cambia de –1 a 1?

d) Si x cambia de izquierda a derecha, para qué valores de x, se cumplen las desigualdades siguientes?



$f(x + \Delta x)–f(x) > 0$; $f(x + \Delta x)–f(x) < 0$; $f(x + \Delta x)–f(x) = 0$.

En esta actividad se propicia, desde la gráfica, el análisis de los cambios que se producen tanto en la variable independiente como en la variable dependiente. En el ítem **a)** el 89% de las respuestas resultan correctas y en el ítem c) este porcentaje asciende al 96%. Al responder el ítem **b)** el 57% considera el cambio positivo, es decir +1. Con relación al ítem **d)** el 20% de los alumnos no responde ninguno de los casos solicitados.

Actividad 2

Una partícula se mueve en línea recta de acuerdo con la ley $s(t) = 2t^3 - 8t^2 + 6t$, donde s es la distancia en metros y t el tiempo en segundos. Complete la siguiente tabla.

Intervalos	Δs	Comportamiento de la función			Signo de s(t)
		Crece	Decrece	No cambia	
$0 \leq t \leq 0{,}5$					
$0{,}5 \leq t \leq 1$					
$1 \leq t \leq 1{,}5$					
$1{,}5 \leq t \leq 2$					

a) ¿Qué relación existe entre el crecimiento o decrecimiento de s(t) y los cambios Δs?

b) ¿Es cierto que si $s(t) > 0$ entonces los cambios $\Delta s > 0$? Justifique.

c) ¿Es cierto que si s(t) crece entonces $\Delta s > 0$ o que si $\Delta s < 0$ entonces s(t) decrece?

En esta actividad se plantea el trabajo verbal, algebraico y numérico. Se empieza a relacionar la idea de "cómo cambian" las variables con la variación de la función y su crecimiento y decrecimiento.

Al completar la tabla, en el 47% de los trabajos consideran $s(t) < 0$ en el segundo intervalo confundiéndolo con el signo de Δs. Los alumnos no hicieron observaciones en relación a los comportamientos en los extremos de los intervalos.En las preguntas un alto porcentaje no responde: 19% en el ítem **a)** y **b)** y baja al 13% en el ítem **c)**. Las respuestas correctas fueron 68 %, 51% y 76% cada ítem respectivamente.

Actividad 4

La función que describe la altura en el instante t (medido en segundos) alcanzada por un delfín al realizar un salto está dada por $h(t) = -t^2 + 10t$ metros.

a) Obtenga la ley de la función que expresa la velocidad de desplazamiento del delfín en cualquier instante t.

b) Complete la tabla:

Tiempo t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Altura h(t)											
Velocidad v(t)											

c) Represente ambas funciones en un mismo sistema de ejes cartesianos y compare la altura alcanzada con la velocidad observando las gráficas.

d) Complete el siguiente cuadro:

Intervalo de tiempo	Comportamiento de la función altura h(t)	Signo de la velocidad v(t)
$0 < t < 5$		
$t = 5$		
$5 < t < 10$		

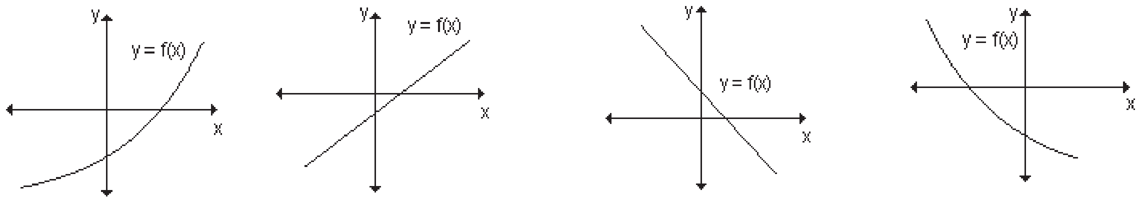
e) Relacione la función que describe la altura y la función velocidad.

En este caso, se propone un trabajo verbal, algebraico, numérico y gráfico donde se relaciona la función con la función derivada. Se debe tener en cuenta que la relación entre espacio – velocidad fue ampliamente discutida al trabajar los conceptos de razón de cambio instantánea, derivada y función derivada.

En general no se observan dificultades en el desarrollo de los diferentes ítems de la actividad. Al completar la tabla en comportamiento de la función cuando t = 5, el 61% responde que la misma “no cambia”, o “no crece ni decrece”. El 31% responde “máximo” o “25” que es el valor máximo que presenta la función. Con respecto al signo de la velocidad en ese punto, el 90% responde en forma correcta.En el ítem **e)** el 47% de las respuestas son correctas y el 24% de los trabajos no responden. Actividad 5

a) Observando la gráfica de f(x), analice el signo de f '(x) en todo su dominio. (Dada la extensión del trabajo sólo presentamos algunas de las gráficas propuestas).

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.



La actividad propone relacionar el signo de la derivada con el comportamiento de la función (crecimiento y decrecimiento).

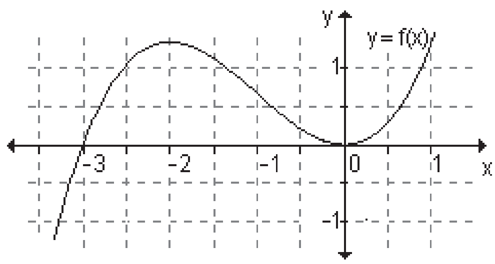
La mayoría de los alumnos respondió. Los principales inconvenientes se presentaron en el caso de las rectas a pesar de que en Matemática I la pendiente de una recta fue un tema ampliamente estudiado. El 15% analiza mal el signo de la derivada en el caso de la recta creciente y el 18% en el caso de la decreciente.

Actividad 7

Dada la gráfica de y = f(x),

a) Determine el signo de la derivada en x = –3, x = –2, x = –1 y x = 0.

b) ¿En esos valores de x, la función crece o decrece?



Para x = –2, se observa el mayor porcentaje de respuestas incorrectas, tanto para determinar el signo de f '(–2) (15%) y el comportamiento de la función en ese punto (32%). Mientras que en x = 0 se observa el menor porcentaje de respuestas incorrectas al determinar el signo de f '(0) (6%).En **b)** hablan de “máximo” o “mínimo” para x = –□2 y x = 473

0. No responden alrededor del 10%.Al final se pedía que respondan algunas preguntas que se enuncian a continuación.

1) ¿Cómo reconoce los puntos en los cuales la derivada es menor que cero, igual a cero o mayor que cero?; 2)¿Qué características tiene la función en esos puntos?; 3)¿Qué relación existe entre el crecimiento de una gráfica, razón de cambio y pendiente?; 4)¿Qué relación existe entre el decrecimiento de una gráfica, razón de cambio y pendiente?; 5) ¿Qué relación existe entre el crecimiento de una gráfica, la existencia de valores extremos y la primer derivada?

Solamente en veintidós trabajos se encontraron las respuestas. (Dada la extensión del trabajo no podemos incluir las respuestas obtenidas pero resultaron muy interesantes).

También se sugirió que completen las afirmaciones que enunciamos a continuación.

- Si la derivada de una función es positiva en un intervalo entonces la función es .... en ese intervalo.
- Si la derivada de una función es negativa es un intervalo entonces la función es .... en ese intervalo.

*Sólo completaron estas proposiciones en cuarenta y seis trabajos y las respuestas correctas fueron cuarenta.*Si la derivada de una función es cero en un intervalo entonces la función es .... en ese intervalo.

En este caso, sólo respondieron en cuarenta y cinco trabajos y cuarenta y tres resultaron correctas. La función puede alcanzar valores máximos o mínimos para valores de x en los que .....

- La función alcanza valores máximos o mínimos para valores de x en los que ....

De las treinta y seis respuestas a cada una de las últimas afirmaciones sólo cuatro fueron correctas.

Conclusiones

Los alumnos lograron una idea aceptable de variación. Casi todos coincidieron en que los cambios se miden por medio de restas. Los resultados fueron mejores cuando los mismos debían calcularse en el registro numérico y en el gráfico, presentando mayores dificultades en la evaluación algebraica. Según lo observado en el desarrollo de las clases y en los trabajos posteriores (parciales y evaluaciones finales) la resolución de las actividades les permitió desarrollar una idea correcta acerca de las condiciones de crecimiento y decrecimiento de una función, así como la de existencia de valores extremos, a un número considerable de alumnos.

Resultó un desafío interesante desarrollar estrategias de enseñanza basadas en la cooperación y el trabajo en grupo buscando reforzar conocimientos y compartir o disentir desde las diferentes miradas sobre las actividades matemáticas. Los alumnos manifestaron interés en trabajar, indagar qué sabían y qué eran capaces de "descubrir" y "construir".

El debate y discusión entre los docentes en todos los momentos de la puesta en marcha de esta propuesta favoreció el trabajo inmediato en el aula y el repensar acciones futuras.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L.; Gómez, P., (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación.* Cuadernos didácticos. Volumen 6. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (2007). La derivada y el Cálculo. Una mirada sobre su enseñanza por medio de los textos y programas. En Dolores, C.; Martínez, G.; Farfán, R.M., Carrillo, C.; López, I. y

Navarro, C. (Eds.). *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula* (pp.169-204). Madrid: Ediciones Díaz de Santos.

Farfán, R. (1992). ¿Matemática Educativa en el nivel superior? Seis años de investigación en la Reunión Centroamericana y del Caribe. En Cantoral, R., Farfán, R. M. & Imaz, C. (Eds.). *Publicaciones Centroamericanas, 6*(2), 236-253.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En Kilpatrick. J., Gómez, P. y Rico, L. *Educación Matemática*. (pp. 69-108). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Zuñiga, L. (2007) El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. RELIME. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *10* (1), 145-175.